

1. Vizualna razina

Aritmetičko - grafička razina

Početna razina razvoja pojma eksponencijalne funkcije. Učenici su svjesni postojanja pojma eksponencijalne funkcije, ali ne uočavaju specifična svojstva. Prepoznaju osnovnu eksponencijalnu funkciju zadanu grafički, pravilom pridruživanja i tablično. Učenici mogu riječima opisati rekurzivno pravilo, primjerice: „udvostručujem prethodni broj da bih dobio sljedeći“. Koriste osnovni funkcijski jezik, npr. varijabla, vrijednosti funkcije, graf i pravilo pridruživanja.

Razrada:

[1.]Uvod u prikaze eksponencijalne funkcije:

- Rekurzivno zadavanje (uputa dana verbalno);
- Pridruživanje (naglasak na domenu i kodomenu) prikazano Vennovim dijagramima i dvama paralelno postavljenim brojevnim pravcima;
- Tablica pridruženih vrijednosti i uređeni parovi;

[2.]Graf eksponencijalne funkcije:

- Lokalna razina: prikazivanje i očitavanje točaka;
- Globalna razina:
 - Razina prepoznavanja grafa funkcije $f(x) = a^x$, ali bez određivanja pravila;
 - Utjecaj baze a na oblik grafa funkcije (pad i rast);

[3.]Ulaz u simbolički prikaz eksponencijalne funkcije:

- Prepoznavanje pravila pridruživanja $f(x) = a^x$ kao eksponencijalne i razlikovanje eksponencijalne i polinoma;
- Povezivanje pravila pridruživanja $f(x) = a^x$ s odgovarajućom tablicom vrijednosti i obratno;

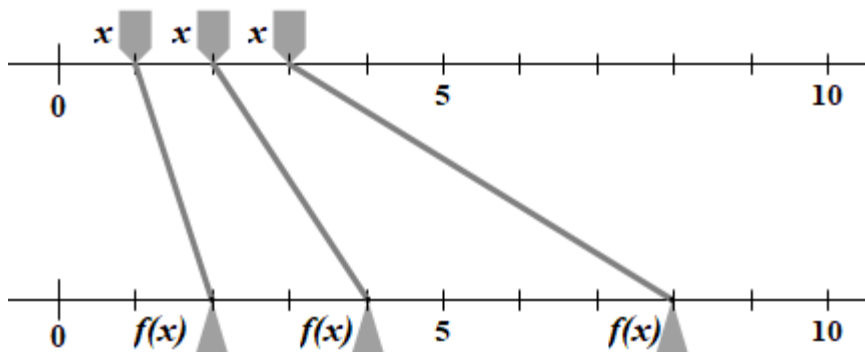
[4.]Definicija eksponencijalne funkcije: diskusija oko domene i kodomene (Vennovi dijagrami i verbalno) i pravila pridruživanja;

[5.]Primjena eksponencijalne funkcije u realnom kontekstu:

- Rekurzivno (bez pravila pridruživanja): količina se udvostručuje, smanjuje se za 30%
- Aktivnosti očitavanja podataka iz tablica pridruženih vrijednosti i grafa;
- Aktivnosti izračunavanja vrijednosti kad je funkcija zadana pravilom pridruživanja – radioaktivni raspad;

PRIMJERI:

1. Potencirajte 2 zadanim brojem i prikažite pridruživanje na brojevnim pravcima.



2. Usporedite tablice A i B:

Tablica A

x	$f(x)$
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

Tablica B

x	$g(x)$
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243

- a) Koja tablica opisuje linearnu funkciju?
- b) Koja tablica opisuje eksponencijalnu funkciju?
- c) Kako biste opisali razliku između linearne i eksponencijalne funkcije služeći se tablicama?

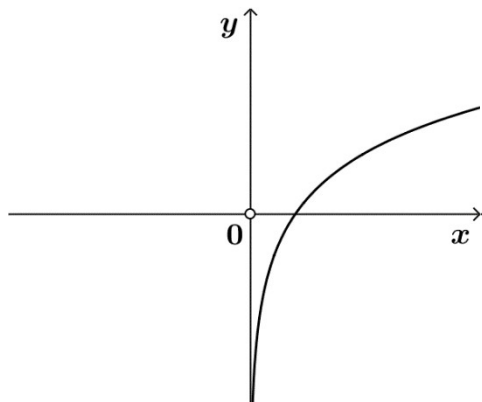
3. Popunite tablicu

x	$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
0	
	81
-2	
	$\frac{1}{27}$

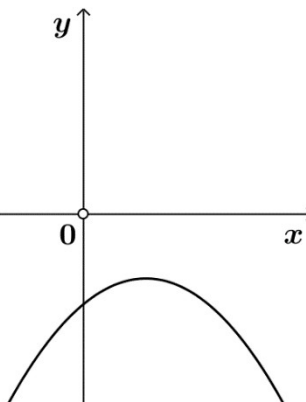
3. Odredite dvije točke koje pripadaju grafu funkcije $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$.

4. Koji od navedenih grafova predstavlja graf eksponencijalne funkcije?

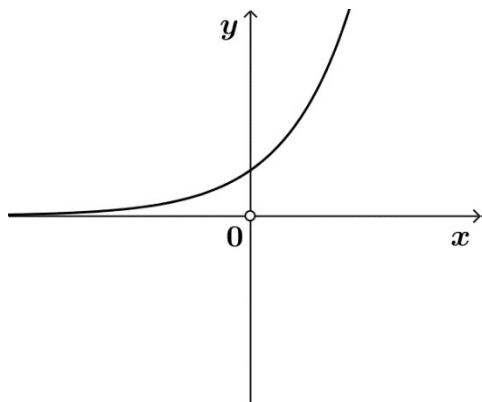
A



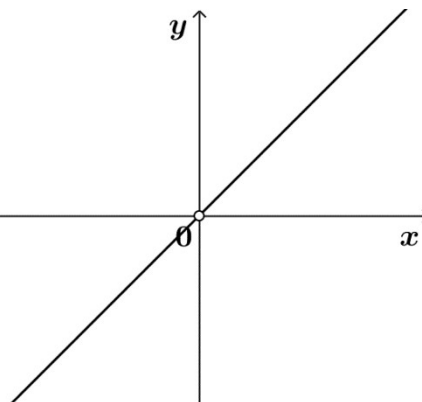
B



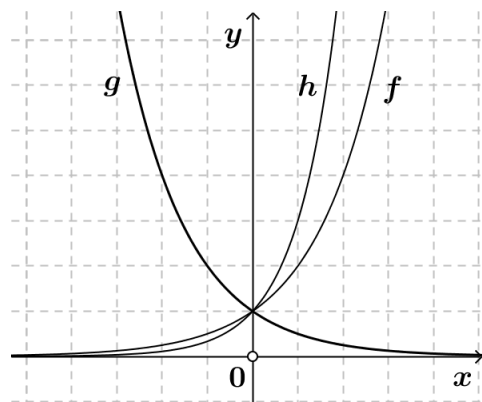
C



D



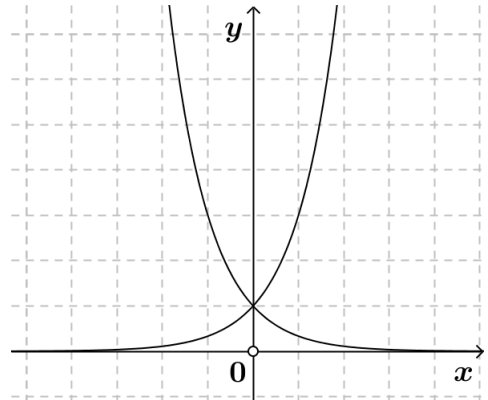
5. U koordinatnom su sustavu prikazani grafovi funkcija f, g, h . Svakome od njih pridružite pravilo.



- f $\left(\frac{1}{2}\right)^x$
- g 5^x
- h 3^x
- h 2^x

6. Na slici su grafovi funkcija s pravilima pridruživanja: $f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

- Označite grafove odgovarajućim slovom.
- S obzirom na koju os su grafovi funkcija f i g osnosimetrični?
- Odredite tri uređena para koja pripadaju grafu funkcije g .
- Odredite tri uređena para koja pripadaju grafu funkcije f .
- Odredite koordinate točke koja pripada jednom i drugom grafu.



7. Ana je u nedjelju u 8 sati ujutro stavila u kasicu 1 kunu i svaki dan u isto vrijeme stavlja dvostruko više kuna nego prethodnoga dana. Koliko će kuna imati u kasci sljedeće nedjelje u podne?

2. Operacijska razina

Grafičko - algebarska razina

Učenici poznaju osnovne pojmove (npr. asimptota grafa, presjek s osi y) i svojstva (npr. monotonost). Učenici su upoznati, ne samo s osnovnom eksponencijalnom funkcijom, već i s eksponencijalnim funkcijama, čiji se grafovi dobiju transformacijom grafa osnovne eksponencijalne funkcije i u mogućnosti su ih koristiti. Na ovoj razini se još ne uspostavlja veza među pojmovima i svojstvima. Obzirom da se radi o operacijskoj razini koja se očituje prelaskom na simbolički prikaz, učenici su u mogućnosti izvesti standardne proceduralne zadatke, uključujući prevođenje funkcije iz zadanog prikaza u traženi.

Razrada:

[1.] Procedure povezane s konceptima i značenjem (jednokoračni zadatci);

- Zadani prikaz eksponencijalne funkcije (npr. $f(x) = a^x$) prevesti u traženi prikaz (npr. graf funkcije);
- Grafička interpretacija svojstava monotonosti i injektivnosti, horizontalni test;
- Grafička interpretacija koeficijenata eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x + y_0$,
 $f(x) = N_0 a^x$;

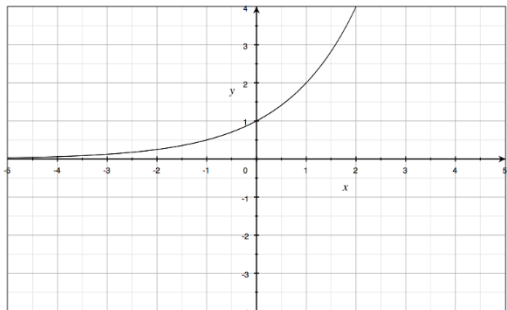
[2.] Odgovarajuća primjena eksponencijalne funkcije u realnom kontekstu:

- Prevođenje rekurzivnog pravila zadanog opisno u pravilo pridruživanja $f(x) = a^x$;
- Interpretacija koeficijenata u pravilu pridruživanja $f(x) = N_0 a^x$;

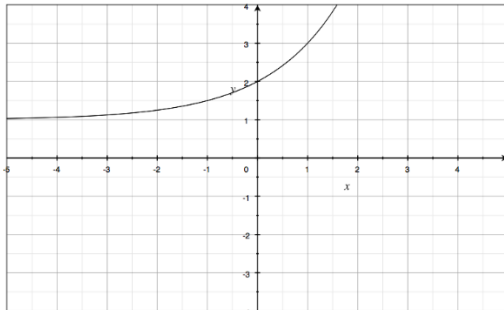
PRIMJERI:

1. Odredite asimptote grafova funkcija:

a)



b)



2. Funkcija f zadana je pravilom pridruživanja $f(x) = 3^x$.

- Odredite tri uređena para koja pripadaju grafu zadane funkcije i nacrtajte njezin graf.
- Nacrtajte novi graf koji se dobije translacijom grafa u pozitivnom smjeru duž osi y
- Napišite pravilo pridruživanja nove funkcije
- Napišite tri uređena para koji pripadaju grafu nove funkcije.

3. Koristeći tablicu vrijednosti, odgovorite na slijedeća pitanja:

- Ulazne vrijednosti se povećavaju za 1 u svakom sljedećem redu. Što se događa s izlaznim vrijednostima?
- Opisuju li vrijednosti u tablici funkciju ili ne, ako da koju?
- Ako je ulazna vrijednost 4, što će biti izlazna vrijednost?
- Ako je izlazna vrijednost 16 384, kolika je ulazna vrijednost?
- Koje pravilo opisuje određivanje izlaznih vrijednosti ako je ulazna vrijednost n ?
- Nacrtajte graf koji predstavlja vrijednosti iz tablice.

Ulaz	Izlaz
0	1
1	4
2	16
3	64

4. Sara se odlučila štedjeti. Na početku ima 10 eura. Njezina baka je pristala pomoći u štednji. Ona će kroz 6 mjeseci svaki mjesec Sarinu uštedevinu udvostručiti. Ispunite tablicu kako biste prikazali kako se Sarina uštedjevina povećava svaki mjesec.

- Odredite pravilo (opisno, riječima) ili formulu (koristeći simbole) po kojem se može odrediti koliko novca Sara može uštedjeti u 12. mjesecu ako uvjeri svoju baku da nastavi toliko dugo sudjelovati u štednji.
- Odredite opće pravilo pomoću kojeg Sara može odrediti koliko novca će uštedjeti nakon x mjeseci.

Početak	10
Mjesec 1	
Mjesec 2	
Mjesec 3	
Mjesec 4	
Mjesec 5	
Mjesec 6	

3. Manipulacijsko-generalizacijska razina

Algebarsko - geometrijska razina

Učenici uspostavljaju vezu među svojstvima eksponencijalne funkcije. Promatraju eksponencijalnu funkciju kao objekt, radi čega su u mogućnosti uočavati i primjenjivati svojstva poput utjecaja koeficijenata na izgled grafa funkcije te transformacije grafa. Učenici koriste neformalnu dedukciju prilikom odabira i obrazlaganja koraka u procesu rješavanja matematičkog problema. U mogućnosti su izložiti smislenu definiciju funkcije i povezati je s karakterističnom eksponencijalnom promjenom.

Razrada:

[1.] Proceduralno – konceptualno razumijevanje (višekoračni zadatci)

- Transformacije grafa eksponencijalne funkcije;
- Primjena svojstva injektivnosti i monotonosti eksponencijalne funkcije;
- Asimptotsko ponašanje i usporedba s rastom linearne i kvadratne funkcije;

[2.] Odgovarajuća primjena eksponencijalne funkcije u realnom kontekstu:

- Interpretacija koeficijenata u pravilu pridruživanja $f(x) = N_0 a^{kx} + y_0$;
- Aktivnosti modeliranja eksponencijalnom funkcijom;

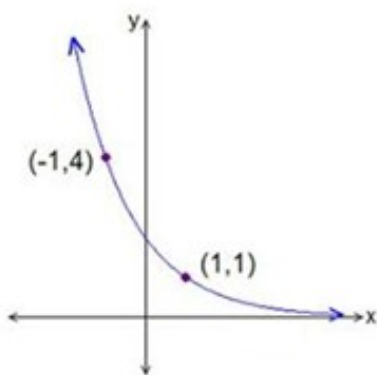
PRIMJERI:

1. Koristeći tablicu vrijednosti eksponencijalne funkcije odgovorite na pitanja:

- a) Što možete reći o vrijednosti $f(x)$ ako je x veći od 3?
- b) Što možete reći o vrijednosti $f(x)$ ako je x manji od 0?
- c) Što možete reći o vrijednosti x ako je $f(x) < 1024$?

x	$f(x)$
0	1
1	0.5
2	0.25
3	0.125

2. Na slici je prikazan graf funkcije f . Popunite tablicu koristeći dani graf:



x	$f(x)$
-2	
-1	
0	2
1	
2	
n	

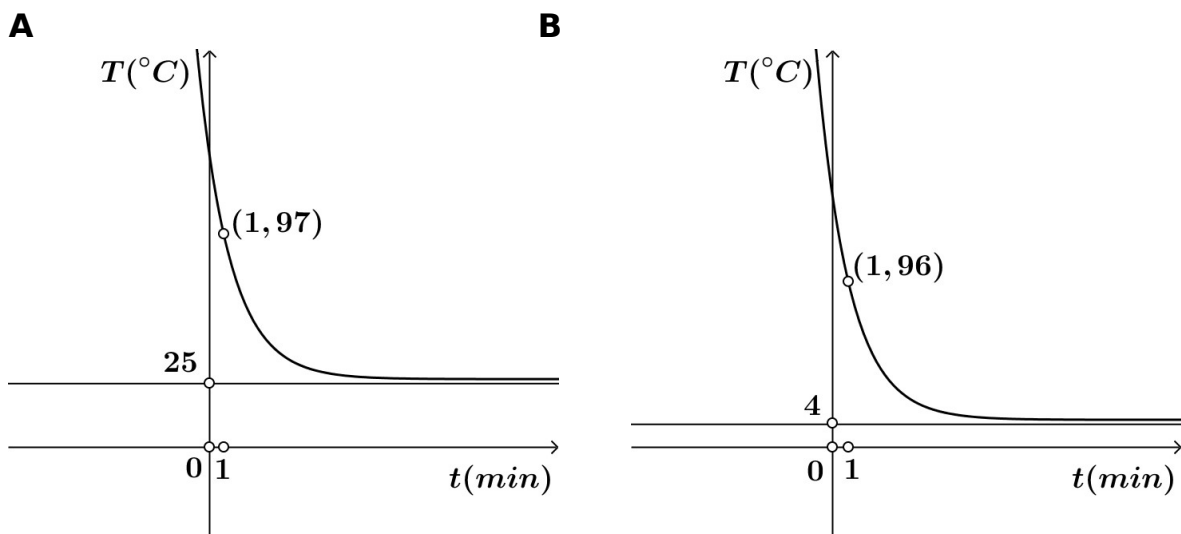
3. Imate na raspolaganju sljedeće dvije opcije ulaganja:

Opcija 1: Prvog dana počinjete s kovanicom od 1 centa. Taj se iznos udvostručuje sljedeći dan, pa se dobiveni iznos opet udvostručuje sljedeći dan itd. sve do 20. dana.

Opcija 2: Prvog dana počinjete s 1 000 Eura. Taj iznos se povećava za 100 eura svaki sljedeći dan sve do 20. dana.

- a) Kolika je razlika u iznosima koje bi imali 10. dana štedeći po ovim dvjema opcijama?
- b) Koja opcija će vam dati više novaca nakon 20 dana?
- c) Zapišite algebarski izraz za svaku opciju koji pokazuje koliko biste zaradili nakon x dana.
- d) Usporedite iznose koje biste uštedjeli po ovim dvjema opcijama nakon godinu dana.
- e) Utvrdite koji tip funkcije je opisan opcijom 1, a koji opcijom 2.

4. Dvije šalice vrućega čaja temperature 100°C želimo ohladiti na temperaturu pogodnu za konzumiranje. Jednu šalicu stavimo u hladnjak, a drugu ostavimo na sobnoj temperaturi. Grafovi A i B prikazuju ovisnost temperature čaja T o proteklom vremenu t .



- Koji graf prikazuje hlađenje čaja na sobnoj temperaturi?
 - Ako je za piće pogodna temperatura od 50°C , hoće li se neka od šalica čaja ohladiti za 5 minuta?
 - Može li temperatura čaja u hladnjaku pasti ispod 2°C ?
- Obrazložite odgovore!

4. Razina diferencijalnog i integralnog računa

Na ovoj razini funkcija je objekt. Pomoću funkcija je moguće opisati pojave (kao promjene), koristeći odgovarajuća svojstva funkcija. Uvodi se pojam derivacije kao brzine promjene. Uvodi se pojam integrala kao antiderivacije, odnosno ukupne promjene. Računa se i interpretira derivacija funkcije u točki, te se primjenjuje integral.

5. Razina matematičke analize

Matematički strogo zasnivanje pojma funkcije i ostalih vezanih pojmova. Fakultetska razina.