

TEORIJSKI OKVIR ZA RAZVOJ POJMA FUNKCIJE: PRIMJER KVADRATNE FUNKCIJE

Matea Gusić, mag. educ. math
prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

RAZVOJ MATEMATIČKOG POJMA

- Brojne teorije govore o izgradnji matematičkog pojma i razvoju razumijevanja (npr. teorija o slici i definiciji pojma; APOS teorija, van Hieleova teorija)



Funkcija kao niz operacija i uputa, „korak po korak”

Iste operacije, ali na umnoj razini. Razvijena ideja pridruživanja.

Shvaćanje da određena svojstva i pravila vrijede za cijeli koncept. Funkcija kao cjelina.

Znanje o funkciji je organizirano i strukturirano na način da je koncept primjenljiv.

PRISTUP POJMU FUNKCIJE

OPSEŽNOST POJMA FUNKCIJE



KURIKULARNI DOKUMENTI U RH

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	1.	2.	3.	4.
						○	○	○	○	○	○
						○		○	○		○
						○		○	○		○

- Klase funkcija: linearna, kvadratna, eksponencijalna, logaritamska, trigonometrijske;
- Pojam funkcije;
- Pojam derivacije i integrala;
- Dominantni aspekt: pravilo pridruživanja;
- Dominantni pristup: algebarski;

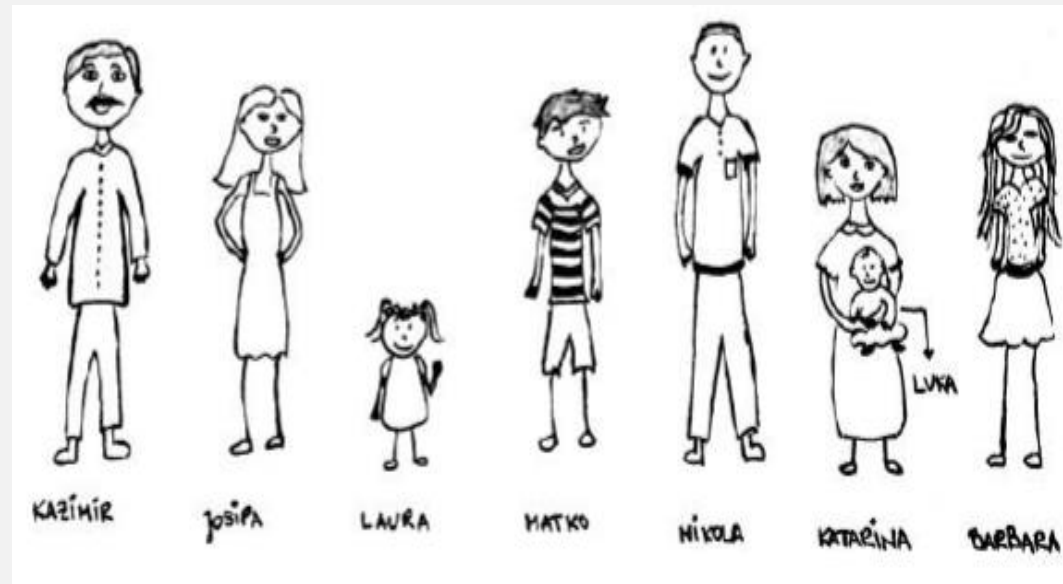
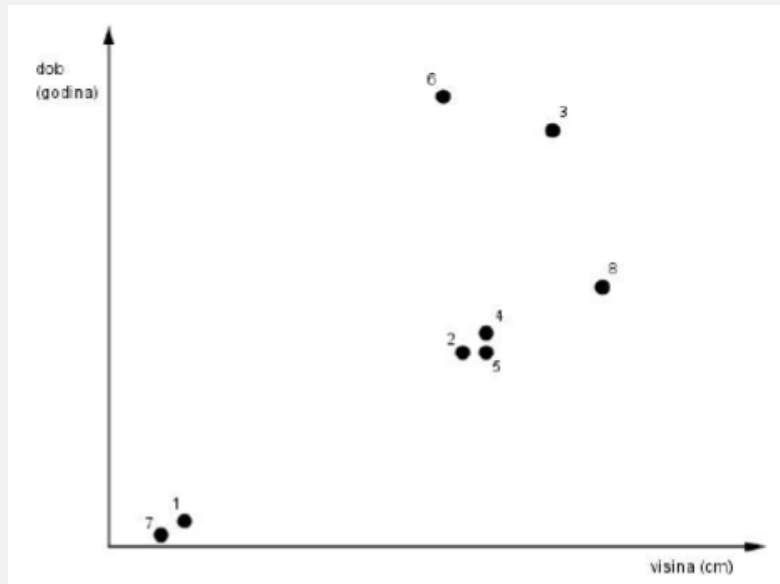
RAZINE RAZVOJA KONCEPTA FUNKCIJE

- Masami Isoda, prema van Hieleovoj teoriji za geometriju i japanskom kurikulumu definira 5 razina:
 - R0 – razina svakodnevnog jezika
 - R1 – razina aritmetike
 - R2 – razina algebre i geometrije
 - R3 – razina diferencijalnog računa
 - R4 – razina analize

RAZINA 0 –RAZINA SVAKODNEVNOG JEZIKA

- Funkcija se proučava kao veza između dvije veličine, odnosno odnos između pojava i to u realnoj situaciji;
- Učenici su svjesni osnovne ideje funkcije kao matematičkog objekta koji opisuje **pridruživanje** (ili odnos između pojava);
- Objekt (funkcije) učenici prikazuju na konkretnim, svakodnevnim primjerima koristeći se poznatim svakodnevnim jezikom;
- Razlike među objektima učenici uočavaju vizualno, bez proučavanja specifičnih svojstva promatranih objekata;

Primjer: Odredite svakoj nacrtanoj osobi kojim je brojem predstavljena u danom grafu. Svoja zapažanja i odgovore zapišite.



Izvor zadatka [1]

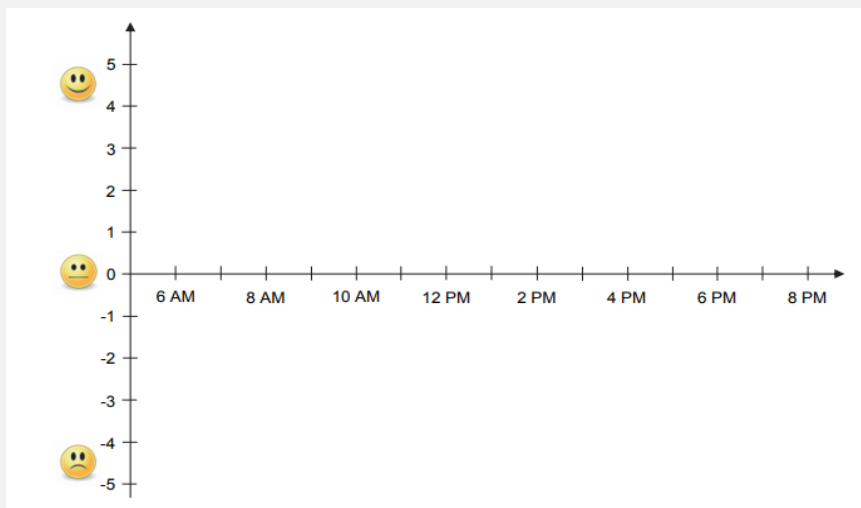
Primjer: „Aktivnost raspoloženje“



a) Svakom danu u proteklom tjednu pridruži raspoloženje:

Dan u tjednu	PON	UTO	SRI	ČET	PET	SUB	NED
Raspoloženje							

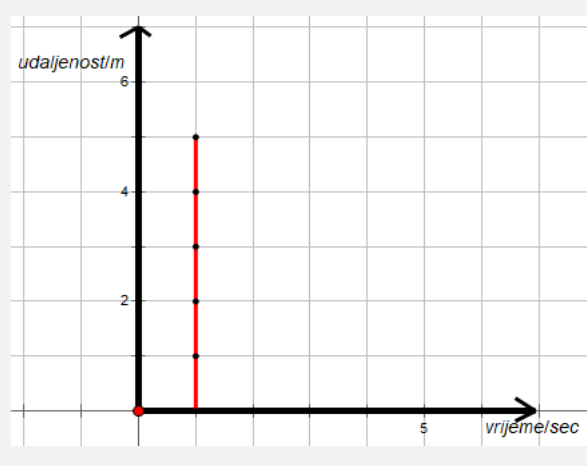
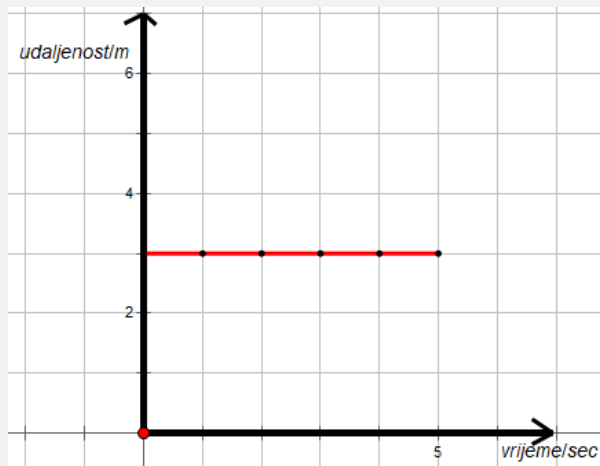
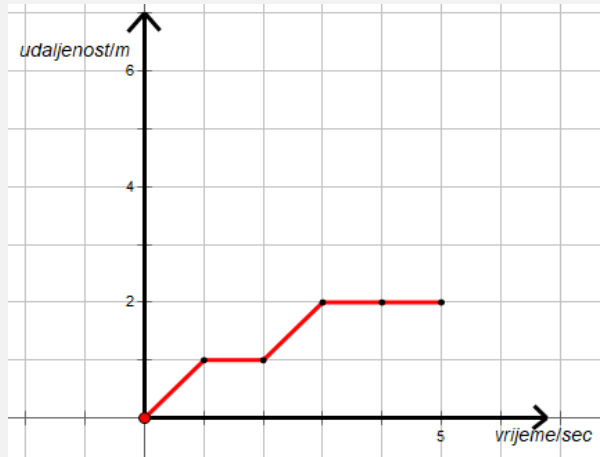
b) Nacrtaj graf osobnog raspoloženja jučerašnjeg dana:



Zadatak inspiriran primjerom iz [7]

Primjer: „Aktivnost šetnja grafom”

Odaberi početnu poziciju. Odglumi i zatim opiši riječima situaciju prikazanu grafom.
Dani grafovi opisuju udaljenost od početne pozicije u ovisnosti o vremenu.



Zadatak inspiriran primjerom iz [7]

RAZINA I – RAZINA ARITMETIKE

- Funkcija se proučava kao veza između dvije veličine, uočavajući svojstva **specifične promjene**;
- Zavisnost se promatra kao numerički objekt;
- Učenici su upoznati sa specifičnim promjenama različitih klasa funkcija;
- Razinu karakterizira upoznavanje specifičnih promjena i mogućnost određivanja/izračunavanja konkretnih vrijednosti;
- Učenici su u mogućnosti identificirati pripadnost pravila pridruživanja i grafa klasi funkcija, ali na ovoj razini još ne operiraju s njima;

Primjer: Dane su tri tablice pridruženih vrijednosti koje prikazuju: linearnu ovisnost, eksponencijalni rast i eksponencijalni pad. Imenuj svaku tablicu tako da odgovara vrsti promjene koju opisuje.

X	Y
1	6
2	9
3	12
4	15

X	Y
1	56
2	28
3	14
4	7

X	Y
1	6
2	9
3	13.5
4	20.25

Skiciraj graf koji prikazuje svaku od tri dane ovisnosti.

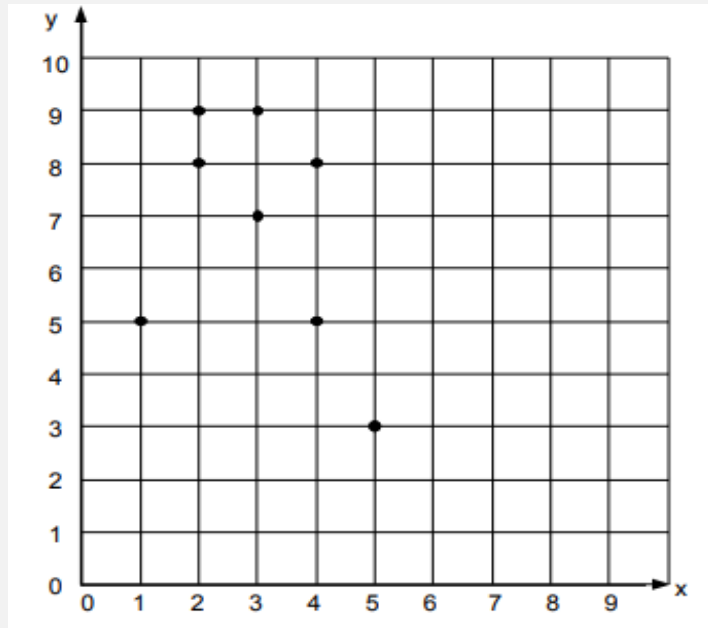


Izvor zadatka [6]

RAZINA 2 – RAZINA ALGEBRE I GEOMETRIJE

- Svojstva specifične promjene promatraju se preko pravila pridruživanja i grafova funkcija;
- Učenici su upoznati s pravilima pridruživanja različitih klasa funkcija;
- Razinu karakterizira algebarska perspektiva, tj. manipulacija pravila pridruživanja iako je istaknuto i crtanje grafa funkcije;

Primjer: U koordinatnom sustavu istaknuto je 8 točaka. Graf tražene linearne funkcije prolazi kroz točno 4 od istaknutih 8 točaka. Preostale 4 točke leže na grafu tražene kvadratne funkcije.



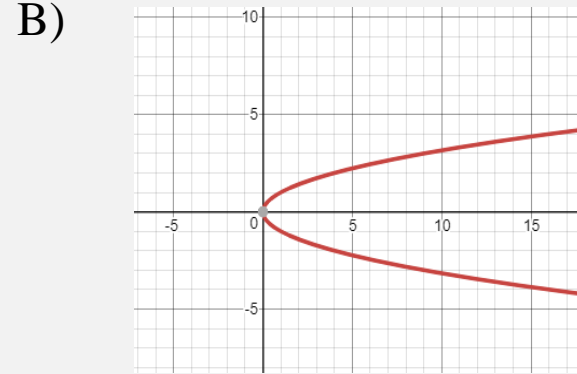
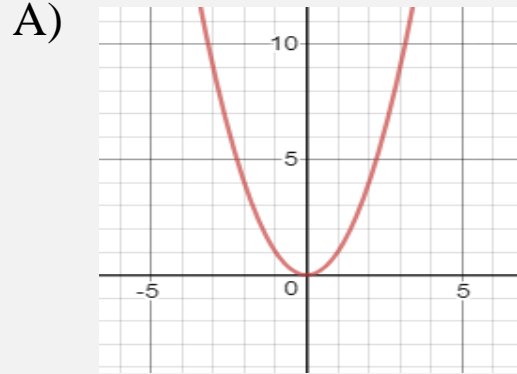
- Ispiši koordinate 4 točke kroz koje prolazi graf tražene linearne funkcije.
- U zadanom koordinatnom sustavu nacrtaj graf linearne funkcije.
- Napiši pravilo pridruživanja tražene linearne funkcije.
- Ispiši koordinate 4 točke koje leže na grafu tražene kvadratne funkcije.
- U zadanom koordinatnom sustavu nacrtaj graf kvadratne funkcije.
- Napiši pravilo pridruživanja tražene kvadratne funkcije.

Izvor zadatka [6]

RAZINA 3 – RAZINA DIFERENCIJALNOG RAČUNA

- Svojstva pravila pridruživanja i grafova funkcija proučavaju se na razini **objekta** (klasa funkcija sa svim pripadnim svojstvima, derivacija, primitivna funkcija);
- Proučavaju se svojstva funkcije kao objekta (domena, slika funkcije, parnost, simetričnost, periodičnost, injektivnost, surjektivnost, bijektivnost, inverzne funkcije);
- Učenici promatraju objekt kroz prizmu koncepta funkcije i analitičke geometrije (npr. parabolu);

Primjer: Dana su dva grafička prikaza A) i B):



a) Odredi tablice pridruženih vrijednosti:

x_A				
y_A				

x_B				
y_B				

b) Zapiši pravilo pridruživanja grafičkog prikaza A: _____

c) Zapiši pravilo pridruživanja grafičkog prikaza B: _____

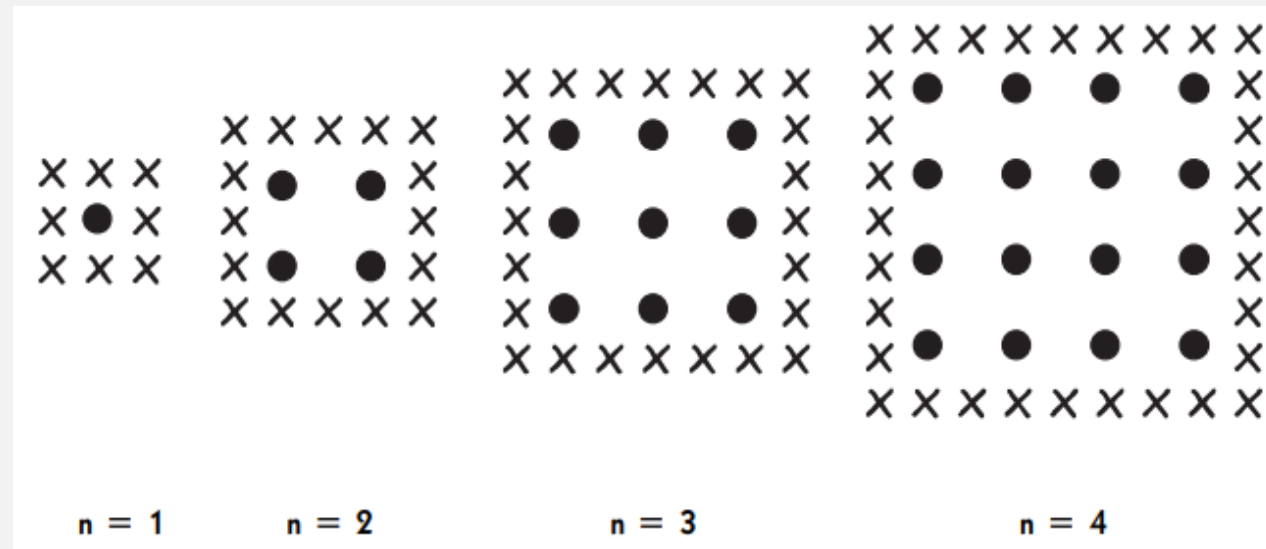
d) Usporedi dane grafičke prikaze: _____

PRIMJER: PISA

Farmer sadi stabla jabuka u obliku kvadratnog uzorka. Kako bi zaštitio jabuke od vjetra, farmer je oko voćnjaka odlučio posaditi čemprese.

Dani dijagram prikazuje uzorak po kojem se sade jabuke i čempresi u ovisnosti o broju redova stabala jabuka (n).

X = stablo čempresa
● = stablo jabuke



PRIMJER: PISA

1. Popuni danu tablicu:

n	Broj stabala jabuke	Broj stabala čempresa
1	1	8
2	4	
3		
4		

7		
---	--	--

2. Broj stabala jabuka, odnosno broj stabala čempresa možeš izračunati uz pomoć formula. Ako je n broj redova u kojima su posađena stabla jabuka,

onda je broj stabala jabuka =

onda je broj stabala čempresa =

Postoji broj redova n za koji je broj stabala jabuka i broj čempresa jednak. Odredi vrijednost n i pokaži račun kojim si došao/la do odgovora.

3. Zamisli da farmer želi izgraditi puno veći voćnjak s mnogo redova stabala jabuka.

Povećanjem broja redova jabuka, što brže raste: broj stabala jabuka ili broj stabala čempresa?

Obrazloži kako si došao/la do zaključka.

RAZINE RAZVOJA POJMA KVADRATNE FUNKCIJE

1. Vizualna razina (aritmetičko – grafička)
2. Operacijska razina (grafičko – algebarska)
3. Manipulacijsko-generalizacijska (algebarsko – geometrijska)
4. Razina diferencijalnog i integralnog računa
5. Razina matematičke analize

VIZUALNA RAZINA (ARITMETIČKO – GRAFIČKA) KVADRATNE FUNKCIJE

- Učenici su svjesni postojanja pojma kvadratne funkcije, ali ne uočavaju specifična svojstva;
- Prepoznaju opću kvadratnu funkciju zadanu grafički i pravilom pridruživanja, a osnovnu kvadratnu funkciju i tablično;
- Mogu riječima opisati pravila pridruživanja, primjerice: „pomnožim varijablu samu sa sobom“ ili „ulaz kvadriram kako bih dobio izlaz“;
- Koriste osnovni funkcijski jezik, npr. varijabla, vrijednosti funkcije, graf i pravilo pridruživanja;

VIZUALNA RAZINA (ARITMETIČKO – GRAFIČKA) KVADRATNE FUNKCIJE

- Uvod u prikaze kvadratne funkcije:
 - Funkcijski stroj (uputa dana verbalno i algebarskim izrazom), pridruživanje (Vennovi dijagrami i dva paralelno postavljena brojeva pravca); tablica pridruženih vrijednosti i uređeni parovi;
- Graf kvadratne funkcije:
 - Lokalna razina: prikazivanje i očitavanje točaka;
 - Globalna razina: oblik grafa kvadratne funkcije (riječima: parabola); prepoznavanja grafa funkcije (bez određivanja pravila pridruživanja), utjecaj predznaka vodećeg koeficijenta a na izgled grafa;
- Početak simboličkog prikaza kvadratne funkcije:
 - Prepoznavanje pravila pridruživanja kao kvadratne, povezivanje pravila pridruživanja s odgovarajućom tablicom vrijednosti i obratno;
- Primjena kvadratne funkcije u realnom kontekstu:
 - Aktivnosti očitavanja podataka iz tablica pridruženih vrijednosti i grafa, aktivnosti izračunavanja vrijednosti kad je funkcija zadana pravilom pridruživanja;

VIZUALNA RAZINA (ARITMETIČKO – GRAFIČKA) KVADRATNE FUNKCIJE

Primjer: „Aktivnost Funkcijski stroj“

Prateći zadane korake odredi što je izlaz funkcijskog stroja, ako je ulaz 5:

- i) Kreni sa zadanom ulaznom vrijednosti.
- ii) Oduzmi jedan.
- iii) Kvadriraj rezultat dobiven pod ii).
- iv) Oduzmi 4 od rezultata dobivenog pod iii).
- v) Dobiven je izlazni rezultat. Zapiši ga.

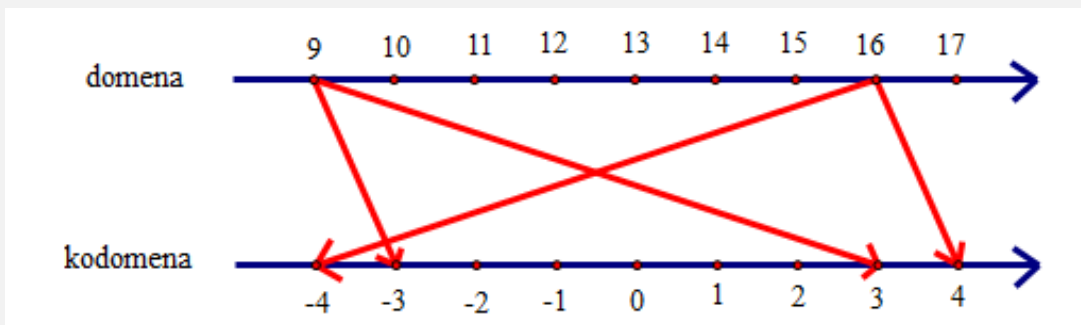
Koristeći zadane korake odredi pravilo pridruživanja kojim se ulazu p pridružuje odgovarajući izlaz.

Izvor zadatka [8]

VIZUALNA RAZINA (ARITMETIČKO – GRAFIČKA) KVADRATNE FUNKCIJE

Primjer: „Prikazivanje i definicija”

Dani su sljedeći uređeni parovi: $(16, 4)$, $(16, -4)$, $(9, 3)$, $(9, -3)$. Prikazuju li dani uređeni parovi kvadratnu funkciju? obrazloži odgovor.



Izvor zadatka [8]

OPERACIJSKA RAZINA (GRAFIČKO – ALGEBARSKA) KVADRATNE FUNKCIJE

- Razinu karakterizira prelazak na simbolički zapis funkcije, te vršenje operacija s pravilima pridruživanja kvadratne funkcije;
- Učenici su upoznati s različitim oblicima zapisa pravila pridruživanja kvadratne funkcije i u mogućnosti su ih koristiti;
- Učenici poznaju osnovne pojmove (npr. tjeme, nultočke, presjek s y -osi) i svojstva (npr. simetričnost);
- Učenici izvode standardne proceduralne zadatke, uključujući prevođenje funkcije iz zadanog prikaza u traženi karakteristika;
- Na razini se ne uspostavlja veza među pojmovima i svojstvima

OPERACIJSKA RAZINA (GRAFIČKO – ALGEBARSKA) KVADRATNE FUNKCIJE

- Procedure povezane s konceptima i značenjem (jednokoračni zadatci):
 - Uvođenje pojmova: tjeme, nultočka, presjek s y-osi (zadano algebarski, grafički i tablično) i svojstva: parnost, simetričnost;
 - Uvođenje različitih zapisa pravila pridruživanja kvadratne funkcije: tjemeni i faktorizirani oblik i njihova poveznica s grafičkim prikazom;
 - Zadani prikaz kvadratne funkcije (npr. $f(x) = ax^2 + bx + c$) prevesti u traženi oblik (npr. graf funkcije);
- Primjena kvadratne funkcije u realnom kontekstu:
 - Aktivnosti određivanja npr. maksimalnog profita li minimalne potrošnje kada je zadana funkcija;

OPERACIJSKA RAZINA (GRAFIČKO – ALGEBARSKA) KVADRATNE FUNKCIJE

Primjer:

Odredi pravilo pridruživanja funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$, čiji graf siječe x os u točkama $(-3,0)$ i $(1,0)$ te prolazi točkom $(3,12)$. Nacrtaj graf te funkcije.

MANIPULACIJSKO-GENERALIZACIJSKA RAZINA (ALGEBARSKO-GEOMETRIJSKA) KVADRATNE FUNKCIJE

- Učenici uspostavljaju vezu među svojstvima kvadratne funkcije;
- Kvadratnu funkciju promatraju kao objekt (uočavanje i primjenjivanje svojstva: npr. utjecaja koeficijenata na izgled grafa funkcije, transformacije grafa, odabir i najprikladnijeg oblika zapisa itd.);
- Učenici koriste neformalnu dedukciju prilikom odabira i obrazlaganja koraka u procesu rješavanja matematičkog problema;

MANIPULACIJSKO-GENERALIZACIJSKA RAZINA (ALGEBARSKO-GEOMETRIJSKA) KVADRATNE FUNKCIJE

- Proceduralno – konceptualno razumijevanje (višekoračni zadatci):
 - Grafička interpretacija koeficijenta kvadratne funkcije, transformacije grafa kvadratne funkcije;
 - Algebarske manipulacije sa svrhom dobivanja različitih pravila pridruživanja;
 - Odabir i primjena svojstva i odgovarajućeg oblika pravila pridruživanja kvadratne funkcije;
 - Obrazlaganje odgovora i odabira procedura;
- Primjena kvadratne funkcije:
 - Aktivnosti prevođenja verbalne informacije u simboličku i aktivnosti modeliranja kvadratnom funkcijom;

MANIPULACIJSKO-GENERALIZACIJSKA RAZINA (ALGEBARSKO-GEOMETRIJSKA) KVADRATNE FUNKCIJE

Primjer:

Odredi pravilo pridruživanja kvadratne funkcije čiji graf siječe x os u točkama $(-3,0)$ i $(1,0)$ te prolazi točkom $(3,12)$ u obliku $f(x) = a(x-p)^2 + q$.

4. RAZINA DIFERENCIJALNOG I INTEGRALNOG RAČUNA

- Funkcija je objekt pomoću kojeg je moguće opisati pojave (kao promjene), koristeći odgovarajuća svojstva;
 - Uvodi se pojam derivacije kao brzine promjene;
 - Uvodi se pojam integrala kao antiderivacije, odnosno ukupne promjene;
 - Računa sa i interpretira derivacija funkcije u točki, te se primjenjuje integral;
1. Računanje i interpretacija derivacije (brzina promjene) kod kvadratne funkcije.
 2. Brzina promjene je linearna funkcija, primjerice kod jednoliko ubrzanog/usporednog gibanja.
 3. Računanje i interpretacija neodređenog i određenog integrala

5. RAZINA MATEMATIČKE ANALIZE

- Matematički strogo zasnivanje pojma funkcije i ostalih vezanih pojmova;
- Fakultetska razina.

ZAKLJUČAK

- Uočen manjak zastupljenosti 1. razine u hrvatskoj nastavnoj praksi;
- Važnost stjecanja „dohvatljivog” bazičnog razumijevanja;
- Visoka zastupljenost viših razina (2. i 3.), ali nedostatak zahtjeva obrazlaganja i verbalizacije;
- Što su posljedice?

LITERATURA

1. Brežnjak, B. (2017). Funkcije i njihov grafički prikaz u osnovnoškolskoj nastavi matematike. Diplomski rad, PMF-MO, mentorica: prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš.
2. Dubinsky, Ed. (2014). Actions, Processes, Objects, Schemas (APOS) in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 8-11). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
3. Glasnik ministarstva kulture i prosvjete RH (1994). *Nastavni programi za gimnazije*, Zagreb.
4. Isoda, M. (1996). The development of language about function: An application of Van Hiele's levels. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol.3, pp.105-112.
5. MZOŠ (2006). *Nastavni plan i program za osnovnu školu*. Ministarstvo znanosti, obrazovanja i športa, Zagreb.
6. PISA zadatak: http://www.gov.pe.ca/photos/original/ed_PISA_math1.pdf
7. Mathematics Assessment Project: <https://www.map.mathshell.org/>
8. Developing Key Competences by mathematics education: <http://keycomath.eu/>
9. Dokument sa zadatcima: prof. dr. sc. Hannah Barnes