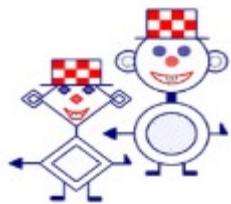




Kružnica je kvadrat

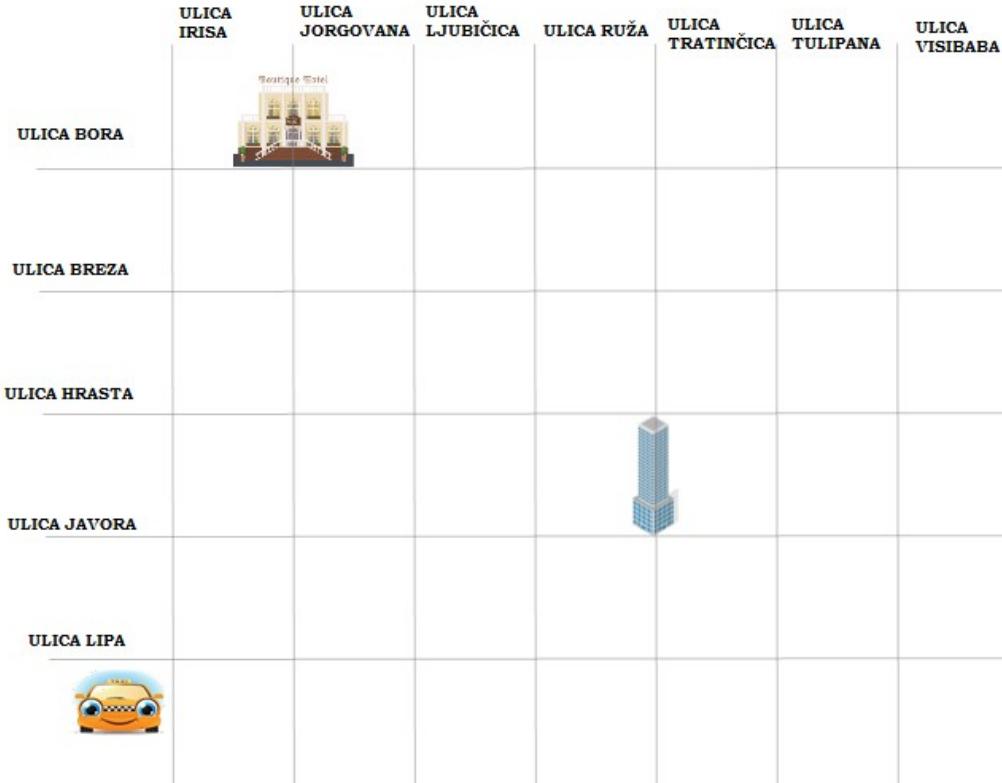
... ili proučavanja novih geometrija

Petar Mladinić, Nikol Radović

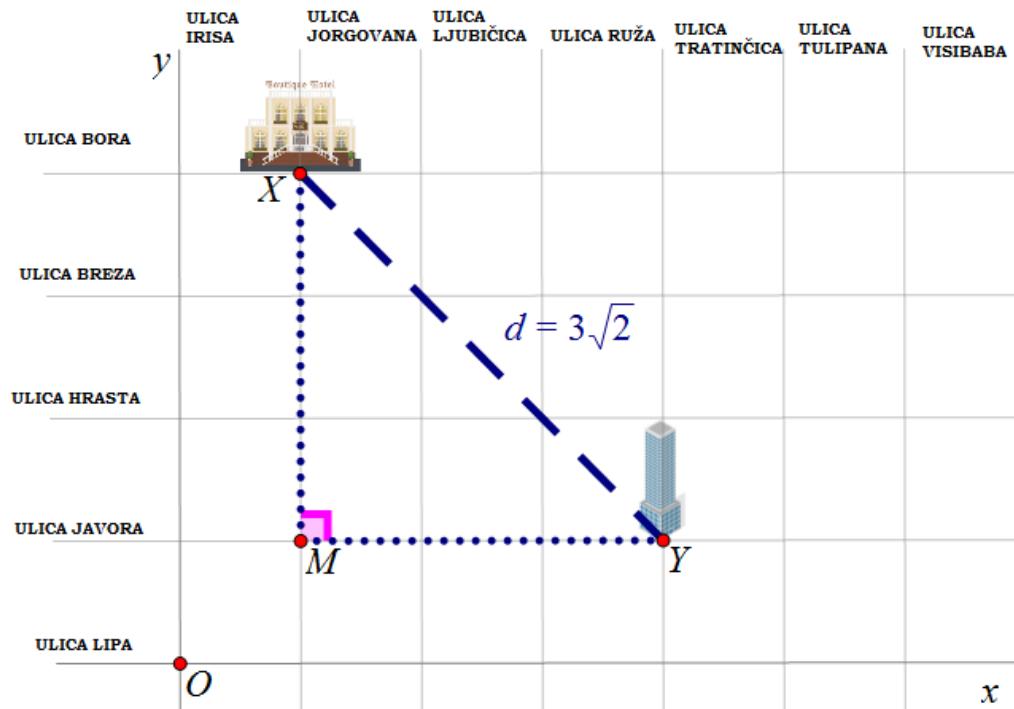


- Nastava geometrije ima važnu ulogu u obrazovanju učenika **svih** uzrasta.
- Euklidska geometrija je uobičajeno okružje. Što se događa kada to okružje promijenimo?
- Kružnica je kvadrat! Je li to istina?
- Ako je, da li to znači vizualizaciju istog u „novom geometriji“ sa nekim drugačijim ili u stvarnosti istim pravilima a različitim metrikama?
- Da li o tome razmišljamo kada sjedamo u taksi i žurimo na odredište ili to samo prihvaćamo *zdravo za gotovo*?

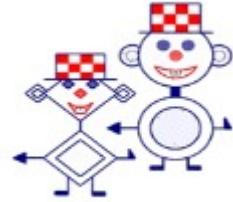
U Matkogradu ulice su međusobno usporedne ili okomite i jednako razmaknute. U Grand hotelu Matkograda se održava važan sastanak matematičara. Grand hotel je na križanju ulice jorgovana i ulice bora, dok se sva predavanja i ostale aktivnosti održavaju u kongresnoj dvorani na križanju ulice javora i ulice tratinčica. Profesor Kosinus kasni na početak predavanja. Pozvao je taksi. Koji je najkraći put?



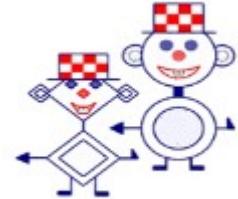
- Najkraći put jednak je udaljenosti Grand hotela i kongresne dvorane.
- Ulice Matkograda definiraju *koordinatni sustav* tako da su Grand hotel i kongresna dvorana određeni pridruženim točakama X i Y , tj. njihovim koordinatama.
- Primjenom Pitagorinog poučka računamo najkraći put.



➤ **Vrijedi:** najkraća udaljenost jednaka duljini hipotenuze zamišljenog pravokutnog trokuta XMY .



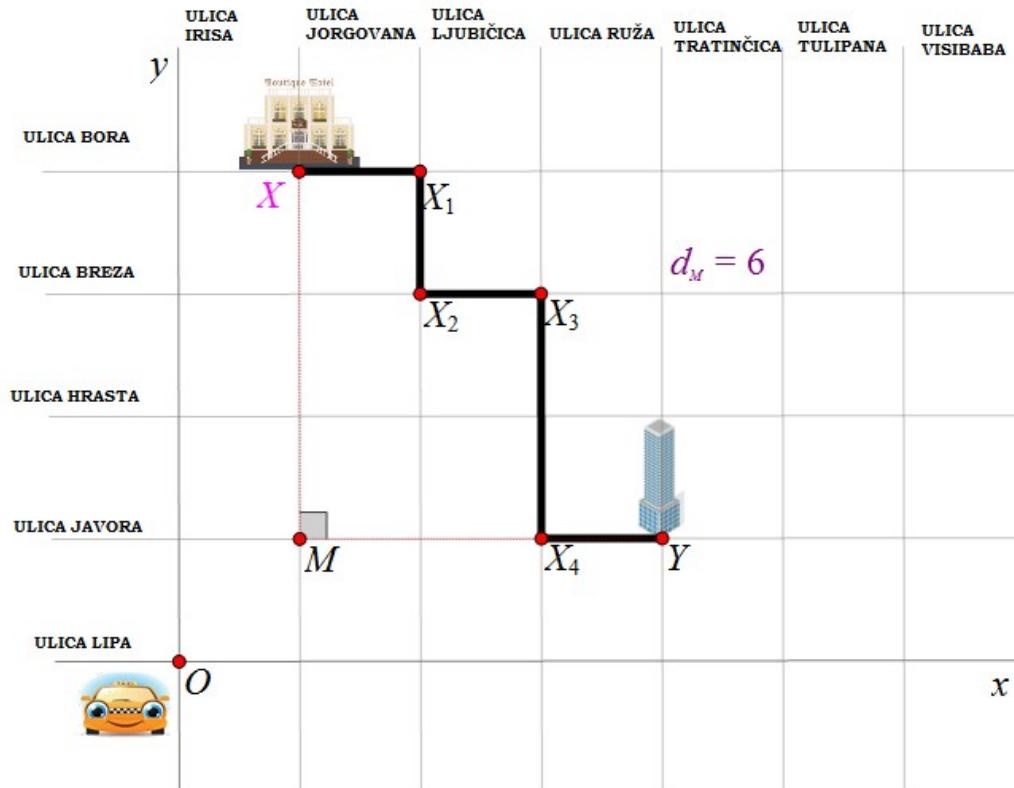
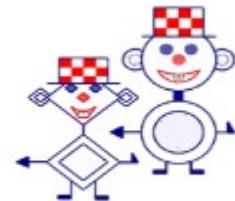
- Račun je točan, ali da li tako smijemo/ možemo postupati?
- Pri izračunu zanemarili smo sve građevine na putu, i činjenicu da taksi/ automobil ne može letjeti (osim u filmovima naučne fantastike i animiranim filmovima) po zraku preko građevina ili kroz iste, ostalih automobila, . . .
- Dakle, geometrija u kojoj „radi“ taksist je neka drugačija geometrija.



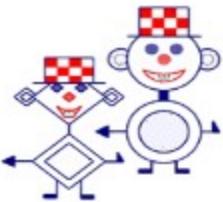
- Nova geometrija koju proučavamo naziva se i geometrija taksista.
- **H. Minkovski** (1865. – 1909.) je prvi izložio temelje *nove* geometrije.
- K. Manger (1902. – 1985.) naziva je *taxicab geometry* ili *Manhattan geometry*



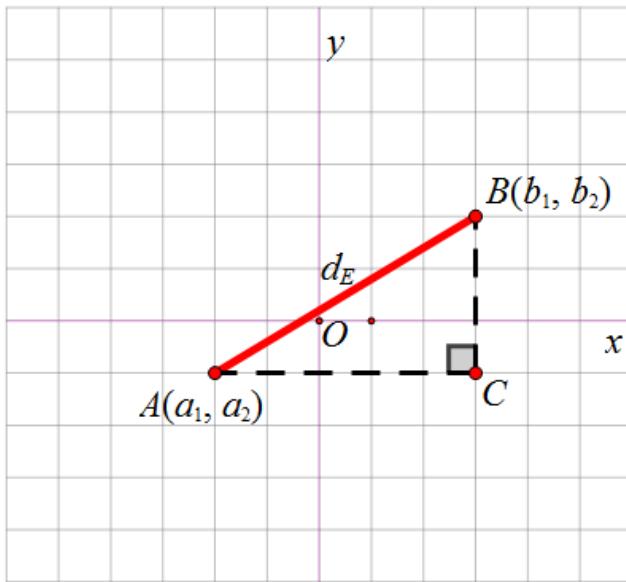
- Geometriju taksija karakteriziraju pomaci *lijево* ↔ *desno* odnosno *gore* ↔ *dolje*.
- Imajući to na umu *jedno* od mogućih rješenja



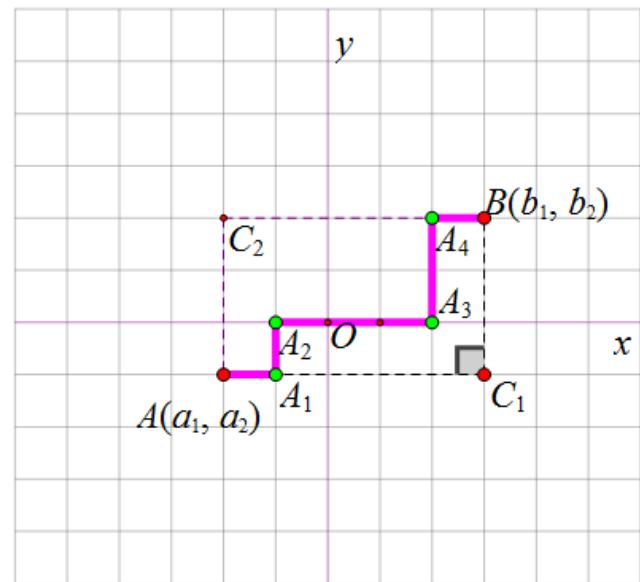
➤ **Vrijedi:** udaljenost je jednaka zbroju duljina kateta zamišljenog pravokutnog trokuta *XMY*.



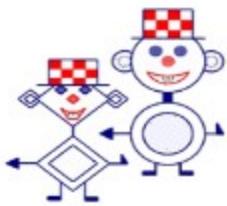
- Na ovom **Primjeru** vidjivo da je udaljenost definirana na dva različita načina.
- Neka su točke A i B u Kartezijevom pravokutnom koordinatnom sustavu xOy zadane koordinatama, tada razlikujemo



$$d_E(A, B) = |AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

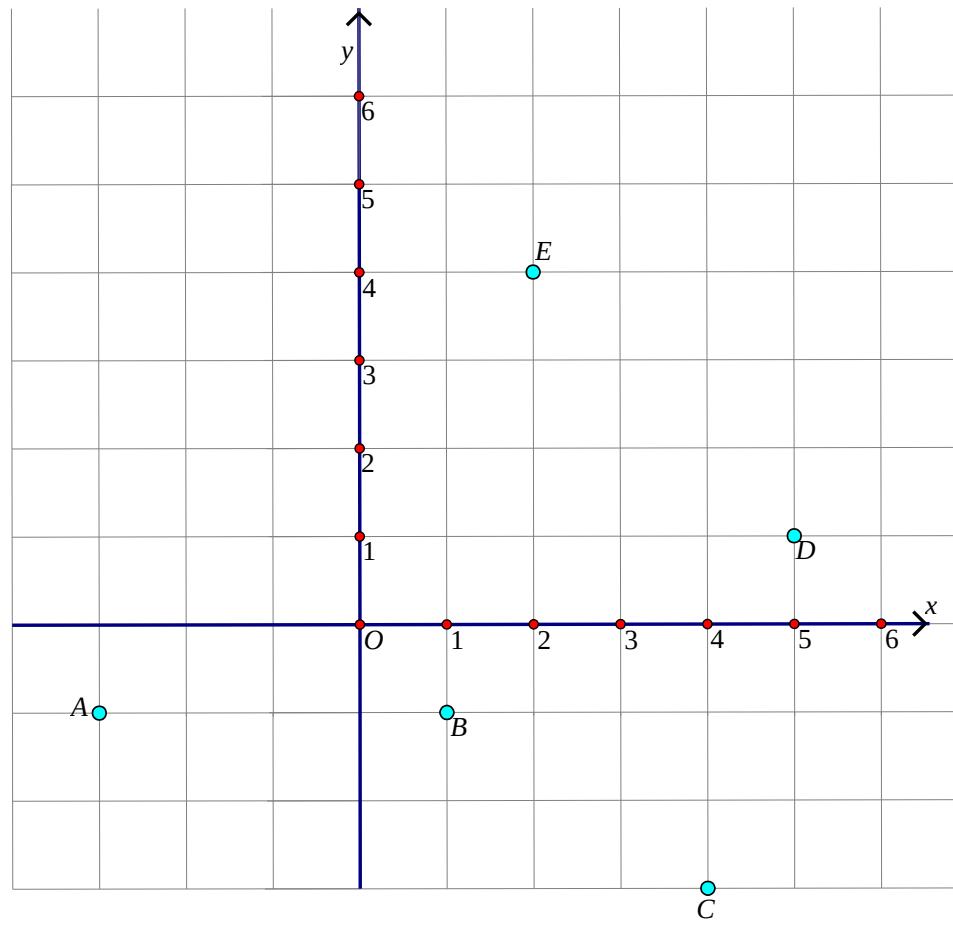


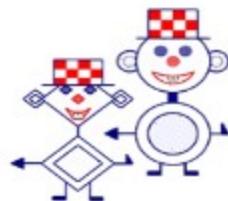
$$|AB| = d(A, B) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$



- U novoj/ taksi geometriji **točka je točka, dužina je dužina i pravac je pravac**.
- Pogledajmo kroz primjere „posljedice“ na razičite geometrijske figure (simetralu dužine, kružnicu, međusobnom položaju dviju kružnica, elipsi, paraboli, hiperboli) euklidske geometrije na vizualizaciju u novoj taksi geometriji ili geometriji Minkowskog s posebnim naglaskom primjene programa dinamične geometrije Sketchpad 5.03 HR.
- Naime, cilj je postizanje najviše, 5. razine van Hiela u geometrijskom/ matematičkom poučavanju i učenju kako u osnovnoj tako i srednjoj školi kojoj

Zadan je Kartezijev pravokutni koordinatni sustav xOy i u njemu su nacrtane točke.





Izračunajte udaljenosti, na dvije decimale.

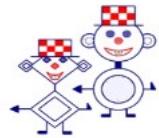
| | | |
|------------------|------|----|
| | | |
| Točaka A i B | 4 | 4 |
| Točaka A i C | 7.28 | 9 |
| Točaka A i D | 8.25 | 10 |
| Točaka A i E | 7.07 | 10 |

sve mjere su iskazane u cm

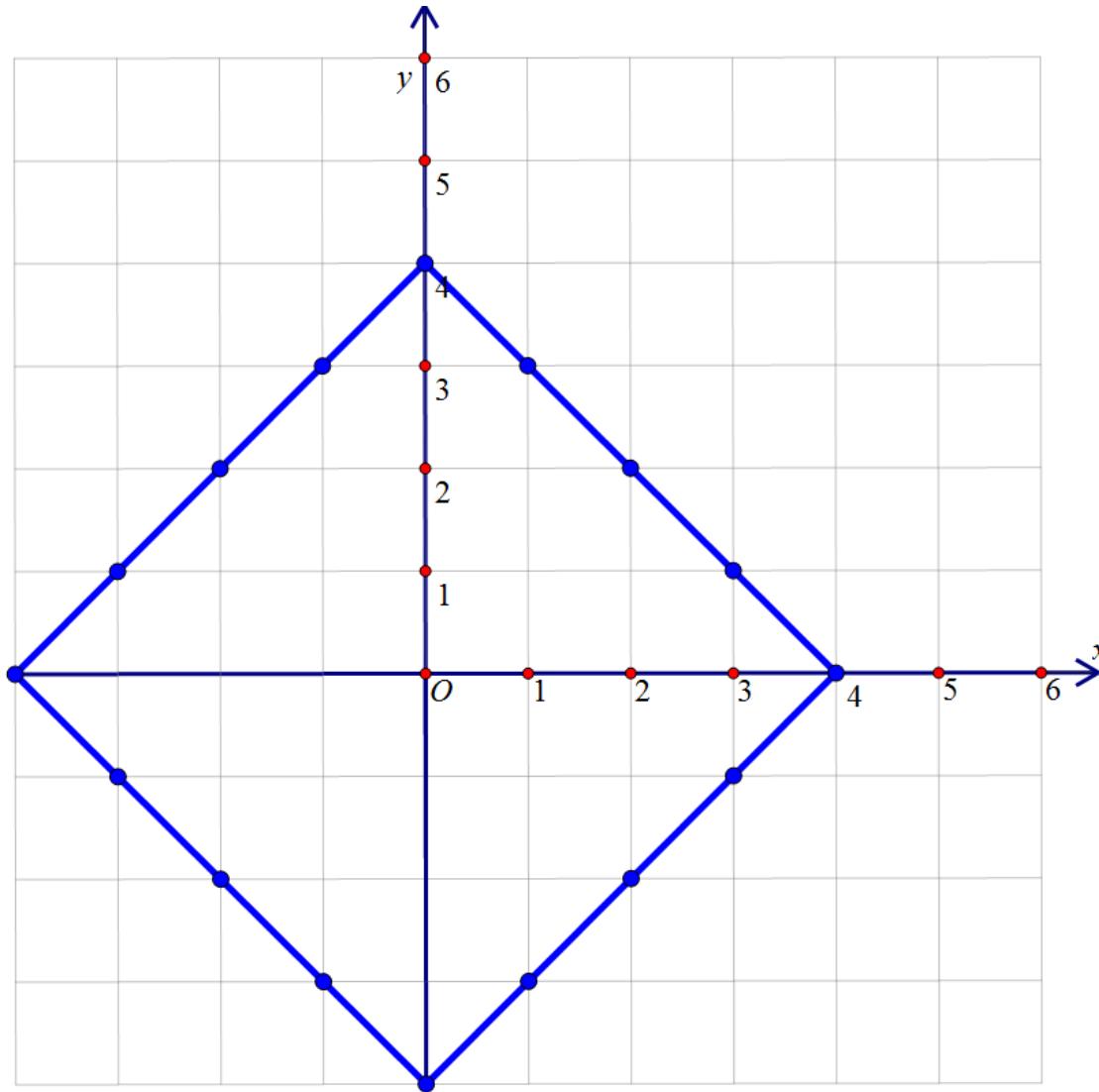
$$d_E \leq d_M$$

Profesor Kosimus šeće samo 4 bloka oko kongresne dvorane da malo razbistri glavu nakon predavanja. Kongresna dvorana je smještena u ishodištu Kartezijevog pravokutnog koordinatnog sustava xOy .

Odredimo sve točke koje su najdalje udaljene od kongresne dvorane.

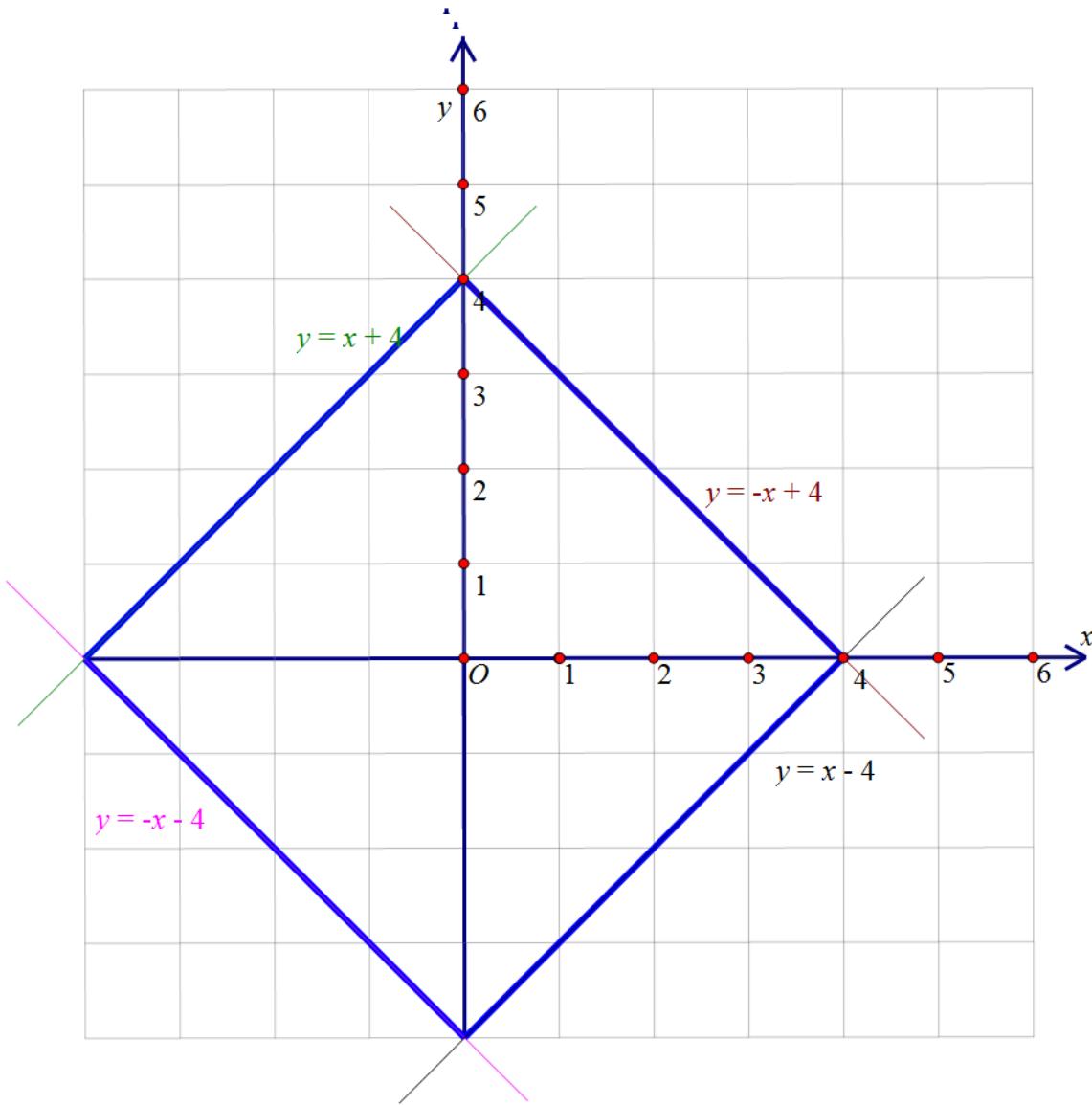
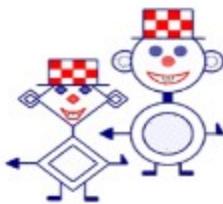


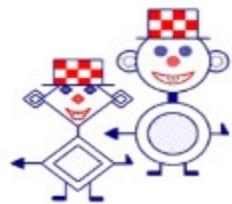
"ODOKATIVNO"



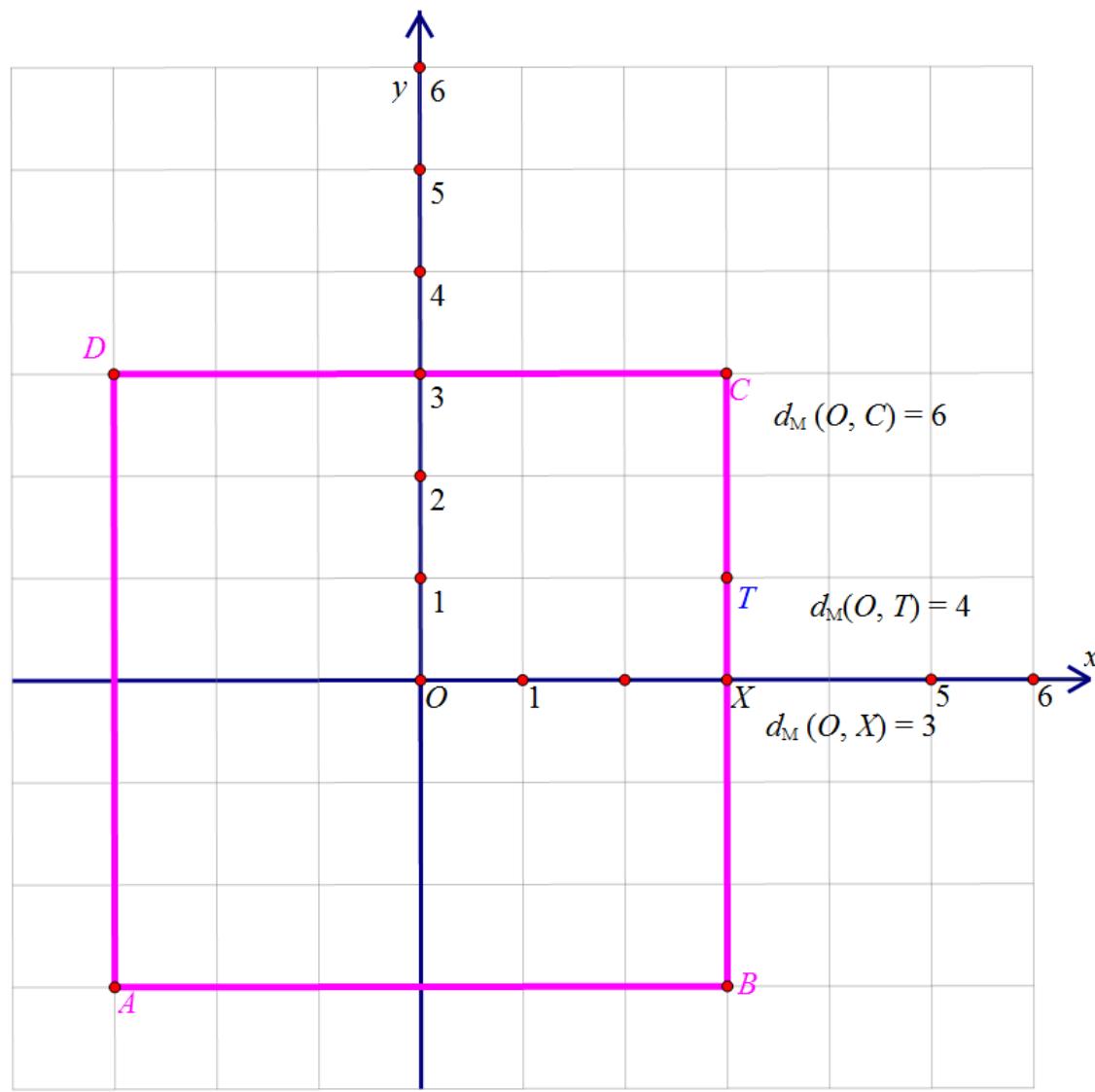
- **NA DRUGI NAČIN**

$$|x| + |y| = 4$$



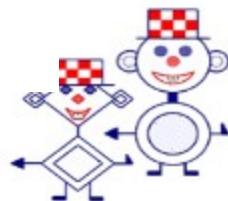


Da li je nacrtana M - kružnica? Obrazložite odgovor.

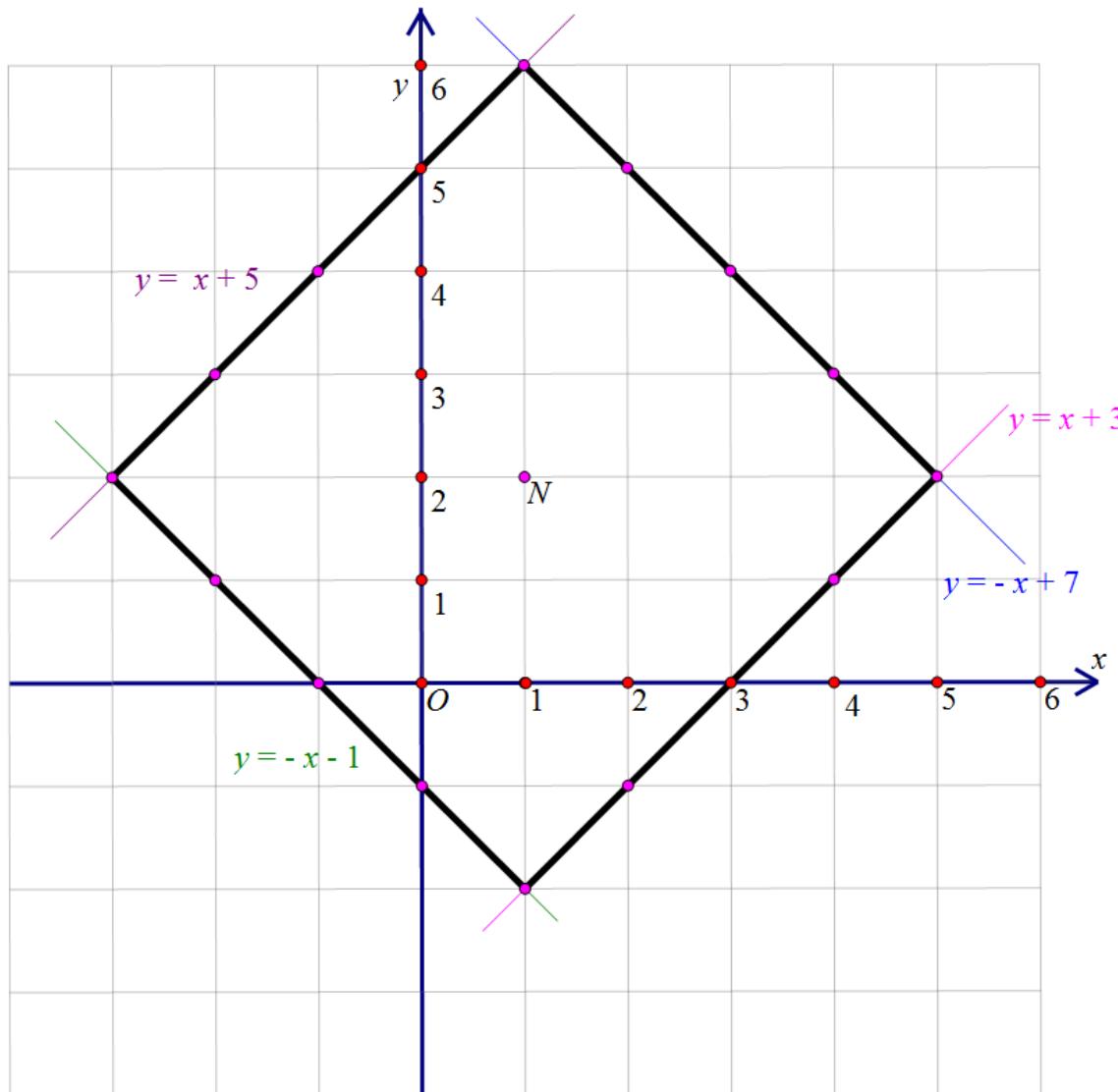


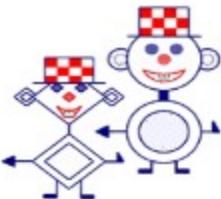
Kvadratoslav voli vikendom ići u video-igranocu koja je u Kartezijevom pravokutnom koordinatnom sustavu xOy označena sa N . Svaka 2 sata ide na pauzu prošetati i nešto slasno pojesti u obližnjim kvartovskim zalogajnicama i slastičarnicama ali pri tome Kvadratoslav prošeće točno 4 bloka oko video-igraone kako bi se vratio na početak nove igre.

Gdje su smještene slastičarne i zalogajnice kako bi se Kvadratoslav okrijepio?



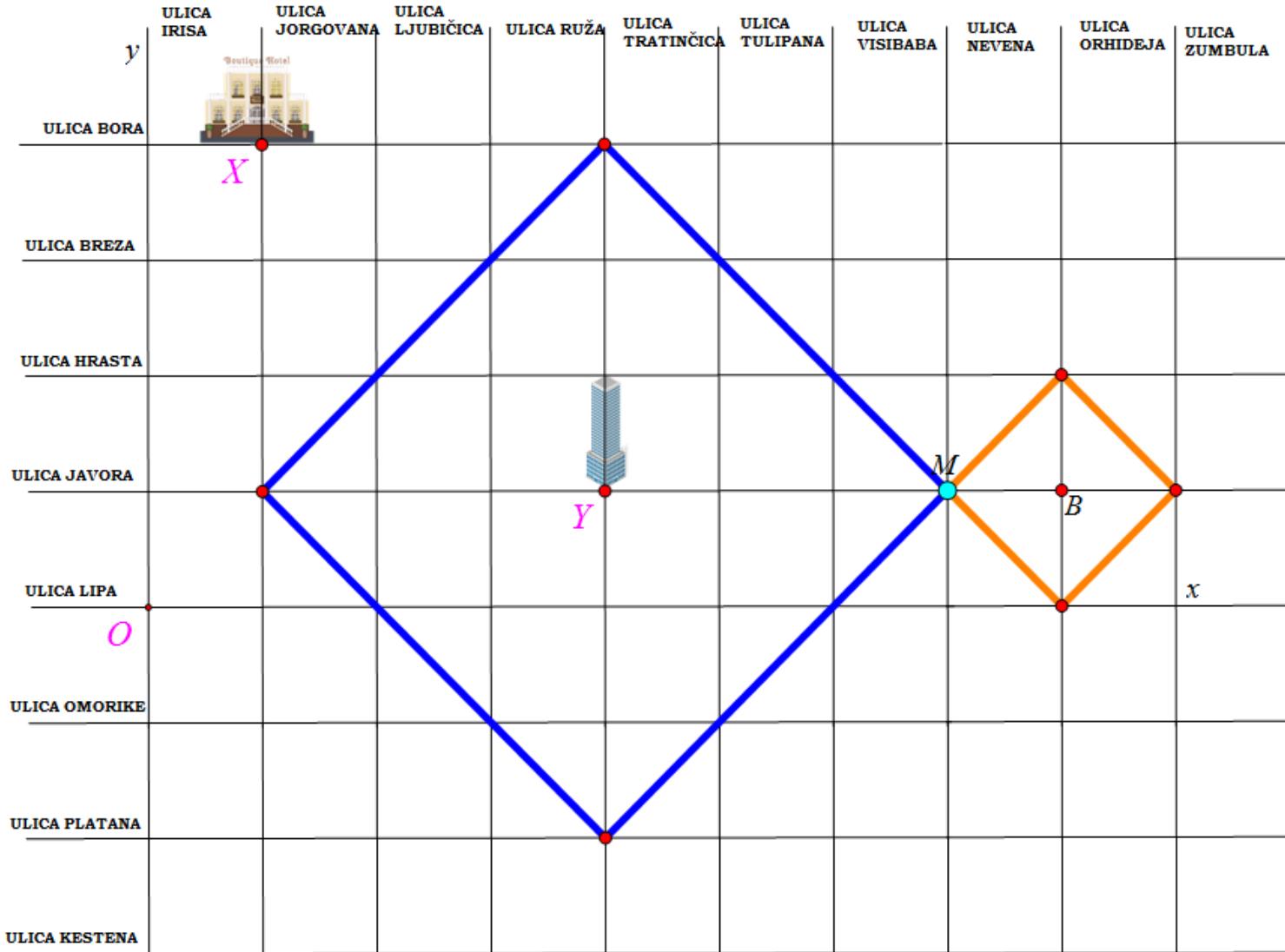
$$|x - 1| + |y - 2| = 4$$

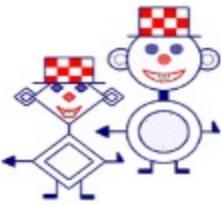




Profesor Baltazar se šeće blok od svog laboratorija.

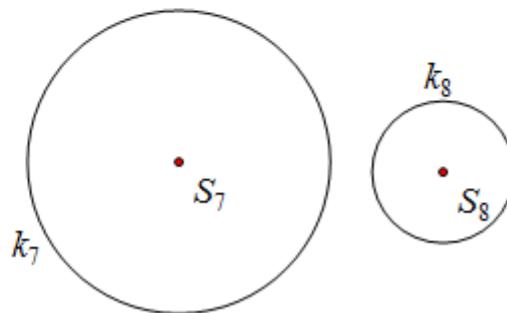
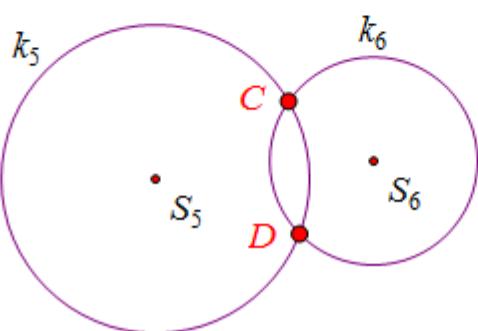
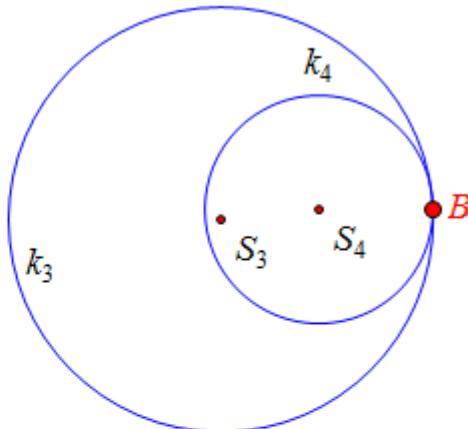
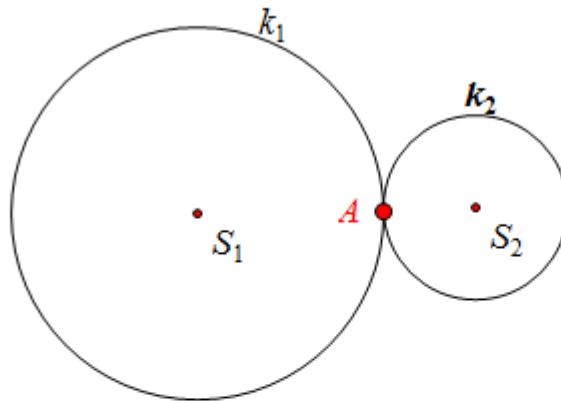
Mogu li se sresti profesori Baltazar i Kosinus na nekom križanju ulica Matkograda, ako se profesor Kosinus šeće 3 bloka od kongresnog centra?



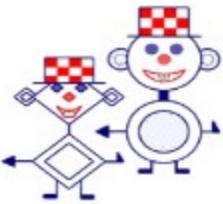


Prisjetimo se

položaj dviju kružnica . . .



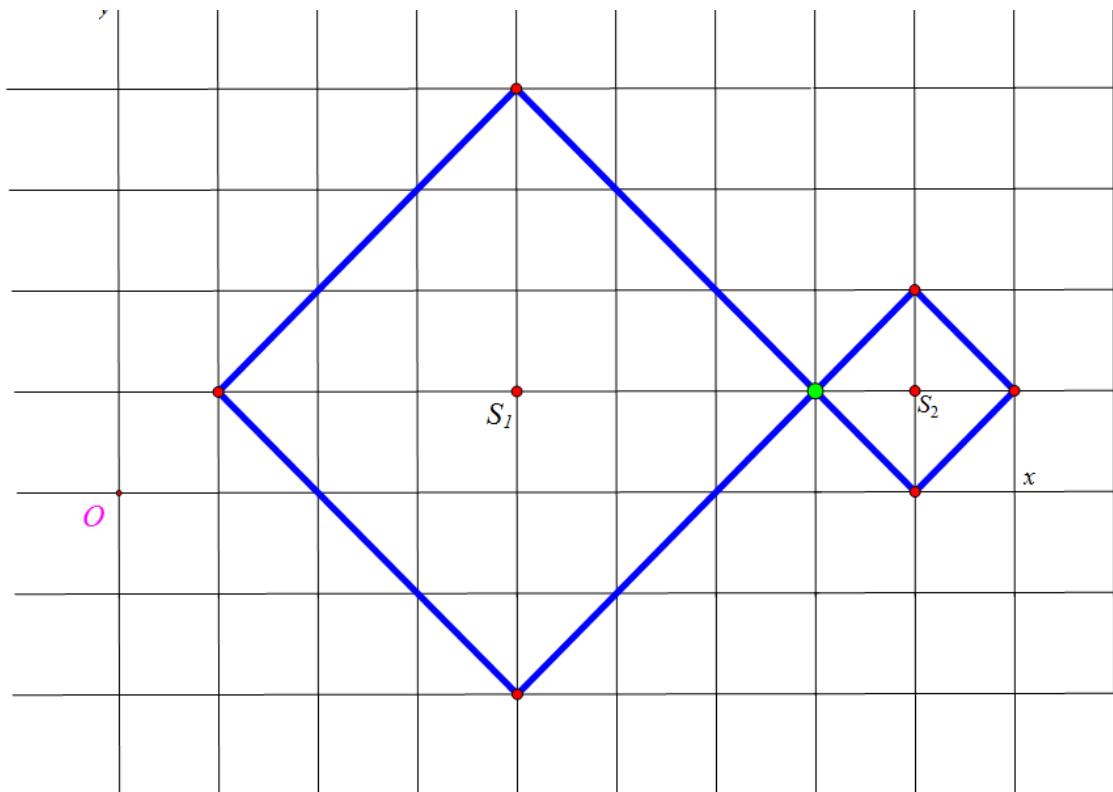
. . . i kako one izgledaju u taksi geometriji?

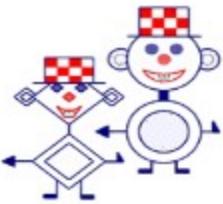


Neka su zadane dvije M -kružnice $k_M(S_1, r_1)$ i $k_M(S_2, r_2)$.
Sa d označimo udaljenost središta kružnica, tj. $d = |S_1S_2|$.

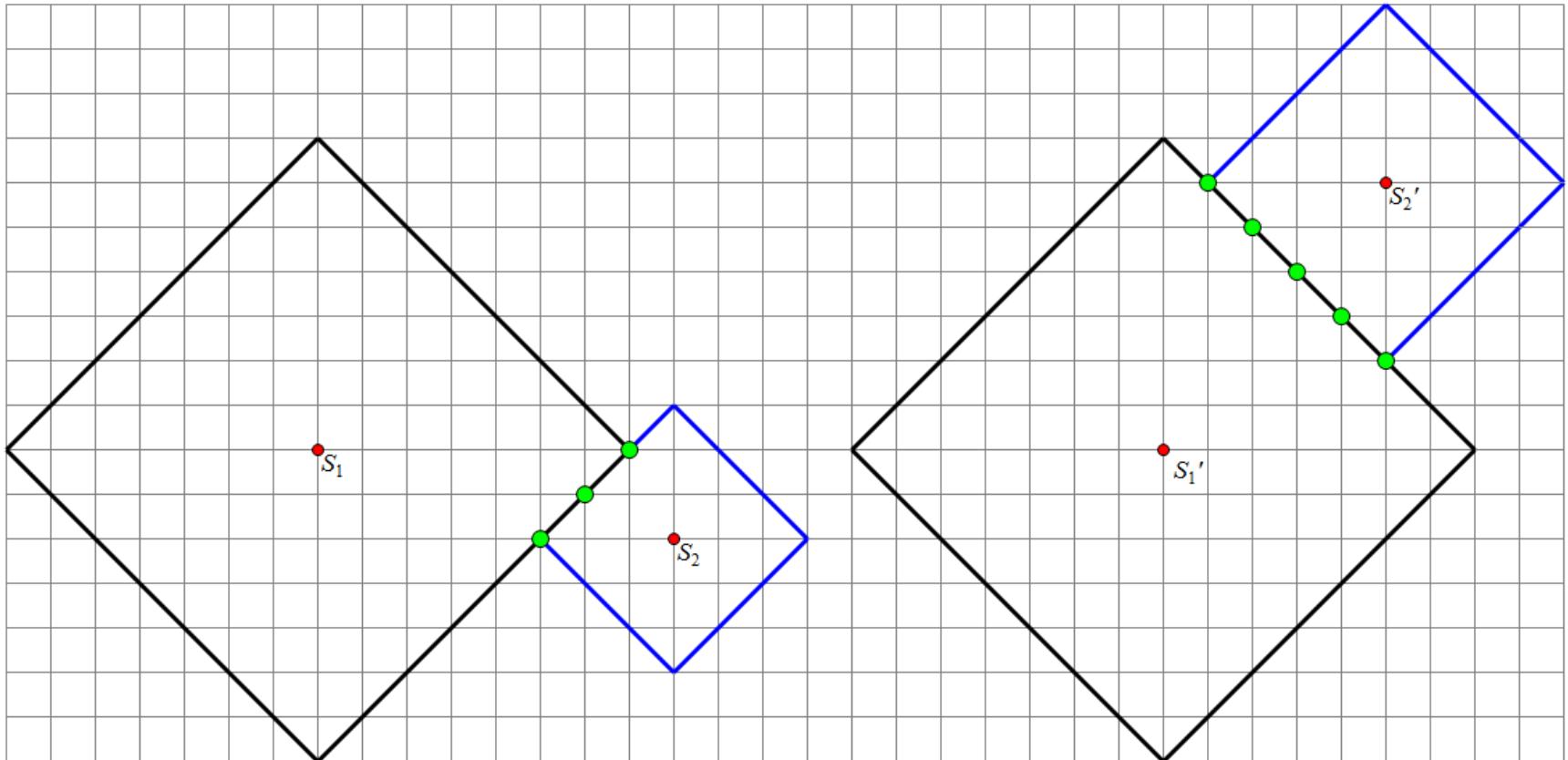
$d > r_1 + r_2$ ■ Nema presjek! Provjerite!

$d = r_1 + r_2$ • Presjek je *točka*

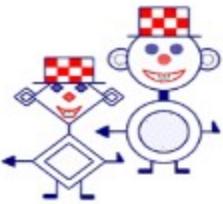




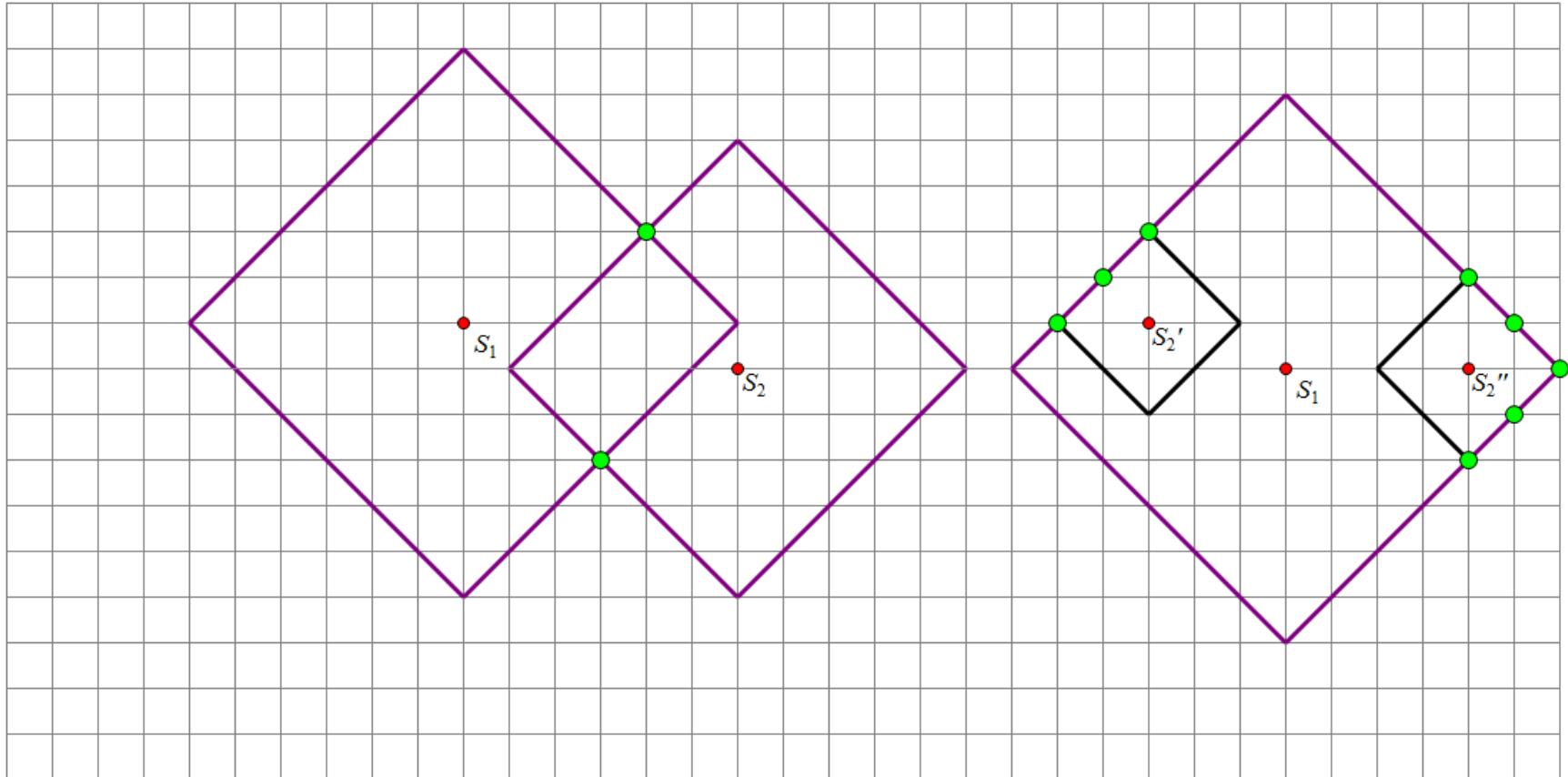
Za iduće M - kružnice vrijedi $d = r_1 + r_2$



ali presjek su *dužine*!

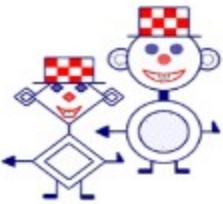


$$d < r_1 + r_2$$

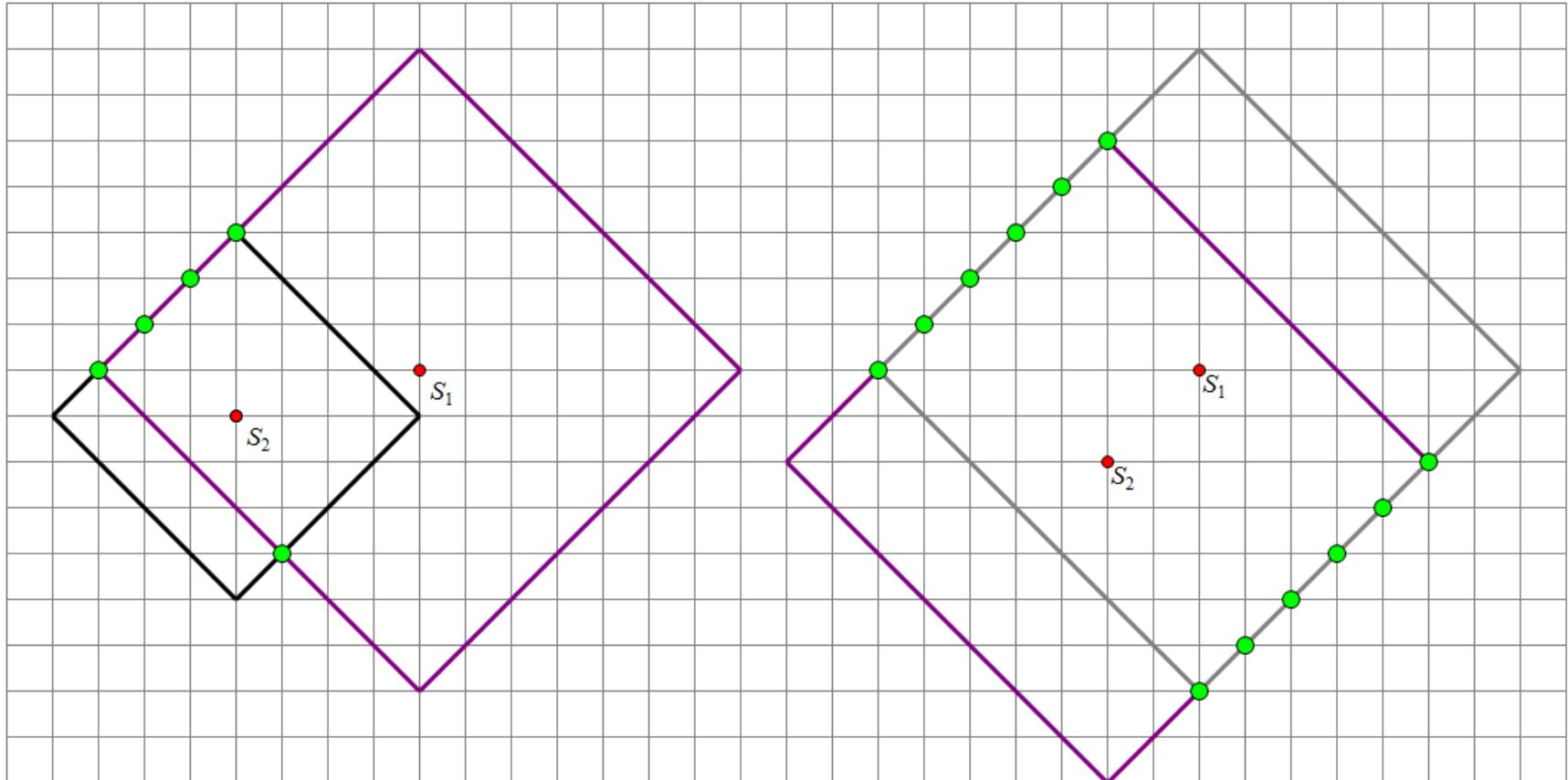


presjek su *točke*!

presjek su *dužine*!



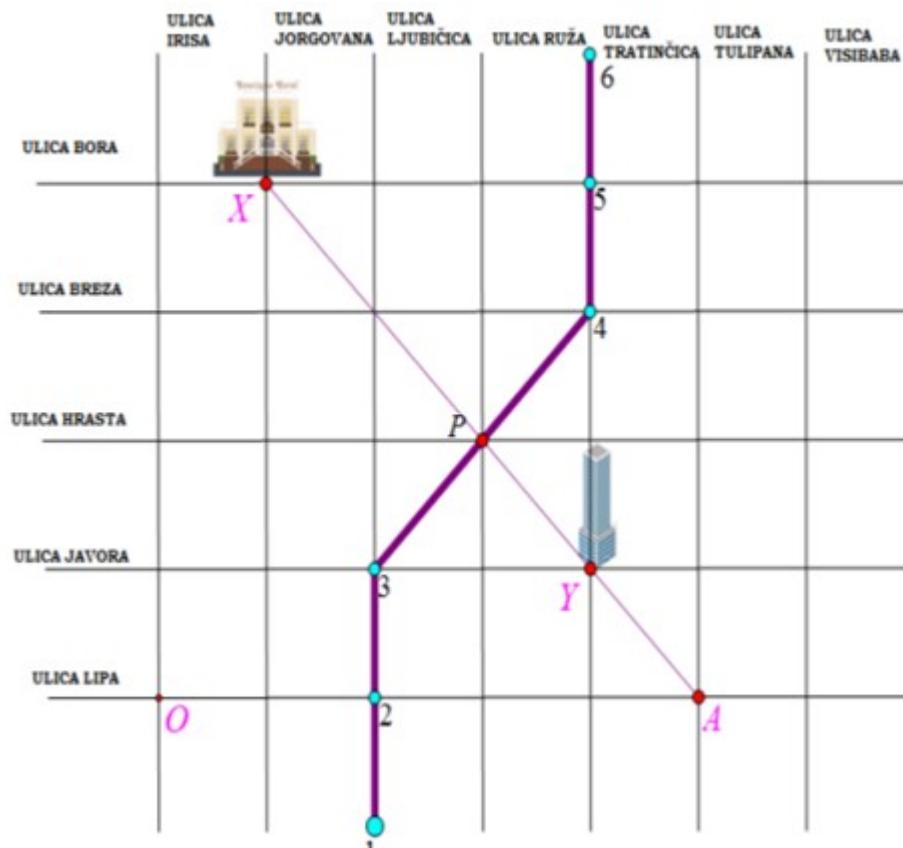
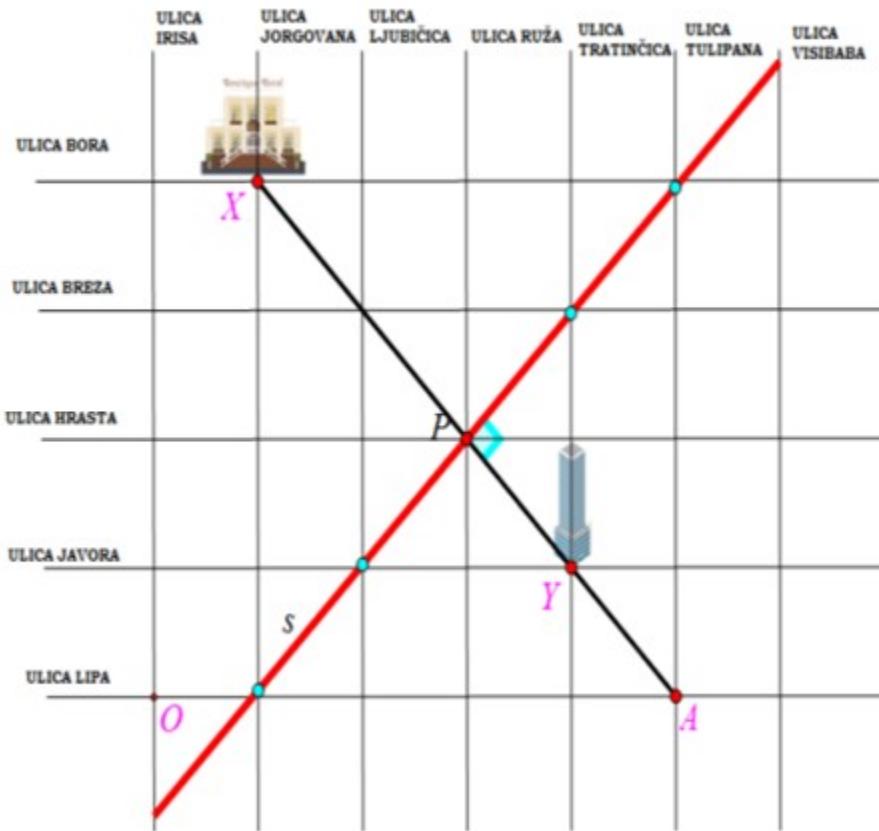
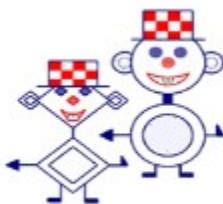
I za iduće M - kružnice vrijedi $d < r_1 + r_2$

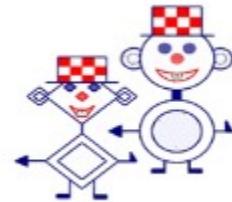


presjek je *točka i dužina!*

presjek su *dužine!*

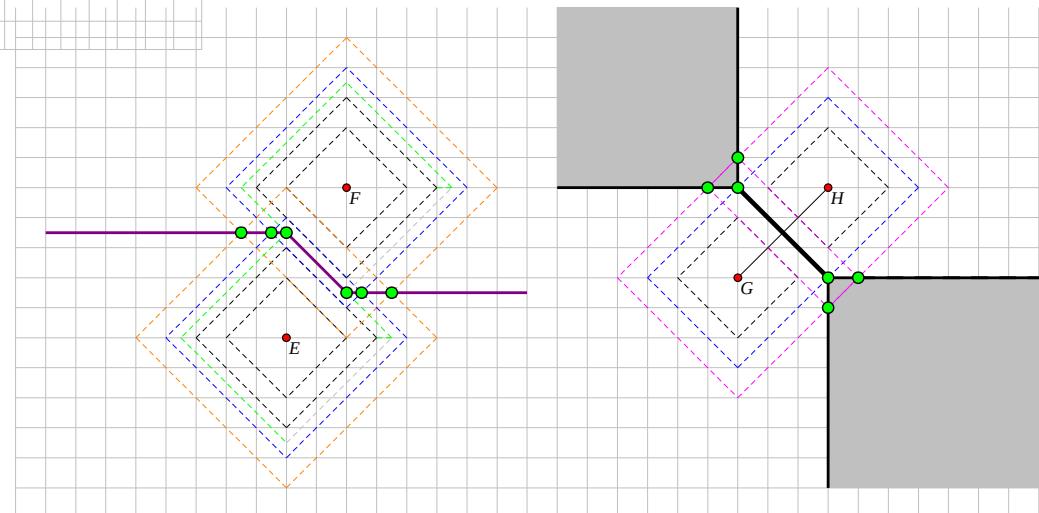
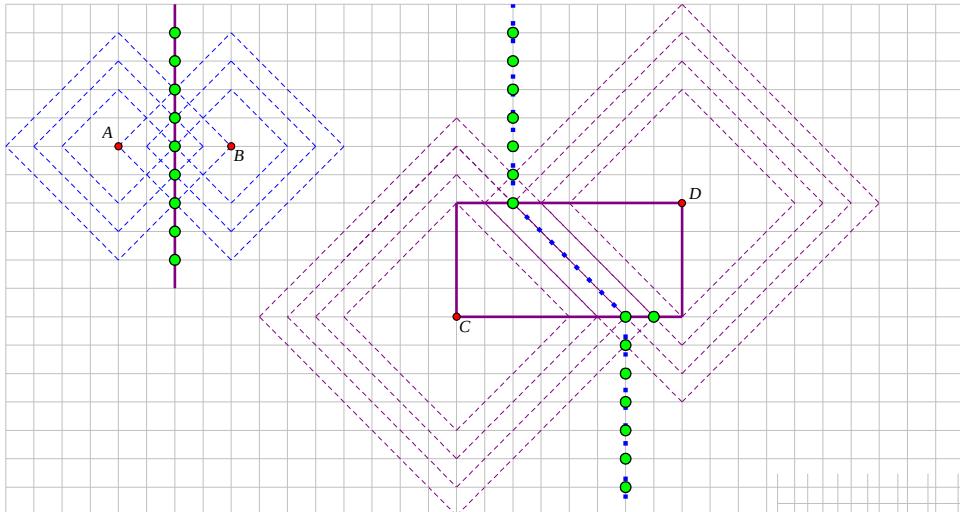
Profesor Kosinus želi se sastati sa svojim dobrim prijateljem profesorom Abakusom. No, dogovor je da se nađu na križanju jednako udaljenom od hotela profesora Kosinusa i kuće profesora Abakusa u geometriji taksija. Odredimo sve točke ravnine koje ispunjavaju to svojstvo.

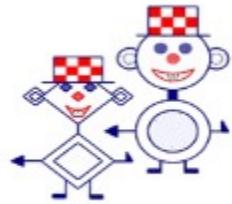




Simetrala dužine

- položaj točaka određuje različite skupove točaka koje su jednako udaljeni od dvojice zadanih točaka u geometriji taksija



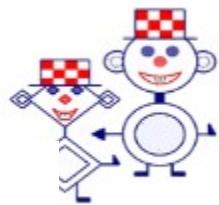


- Budući da smo usporedili definicije i vizualizaciju temeljne pojmove euklidske geometrije, možemo vizualizirati i krivulje, primjerice elipsu.

Elipsa je skup točaka T neke ravnine za koje vrijedi da je zbroj udaljenosti od dviju točaka F_1 i F_2 stalan i jednak $t > 0$. Međusobna udaljenost točaka F_1 i F_2 manja je od t ,

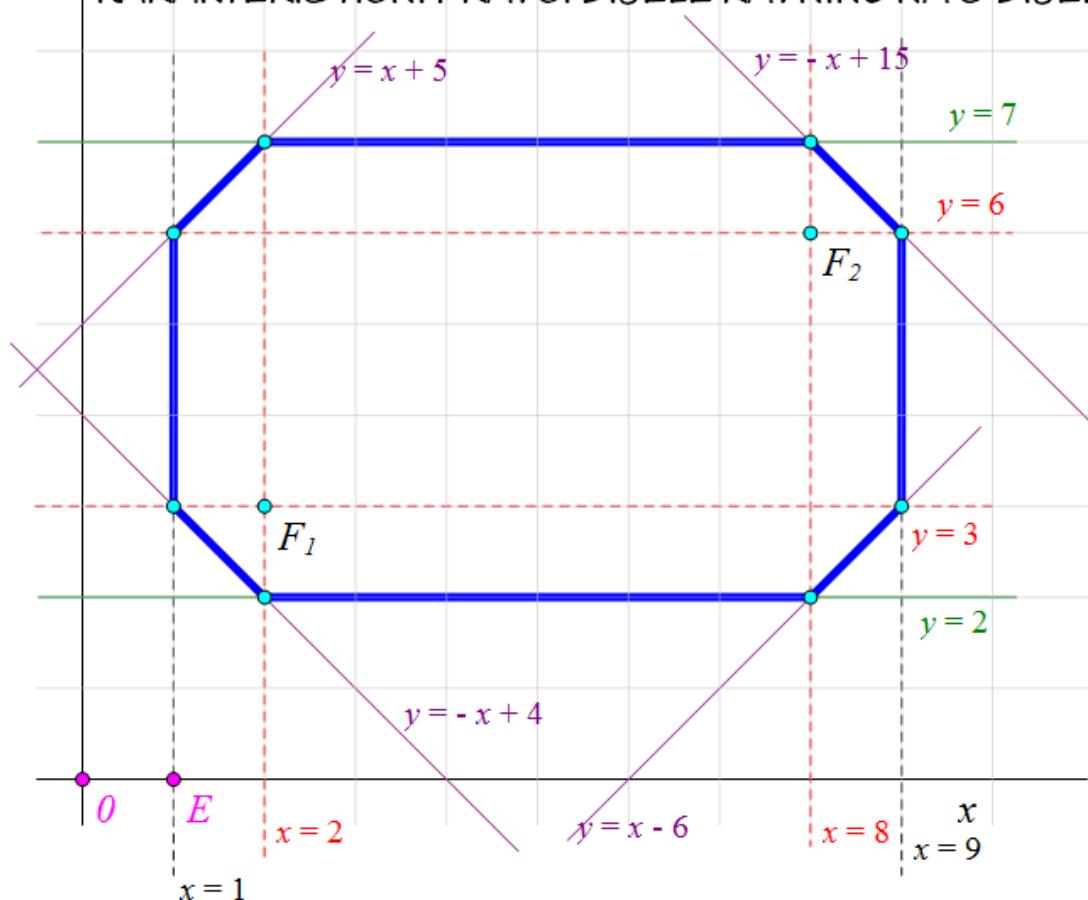
$$\{ T : |TF_1| + |TF_2| = t, t > 0, |F_1F_2| < t \}$$

$$|x - 2| + |y - 3| + |x - 8| + |y - 6| = 11$$



PO PODRUČJIMA U "POTRAZI" ZA TOČKAMA.

KARAKTERISTIČNI PRAVCI DIJELE RAVNINU NA 9 DIJELOVA.



$$x \geq 8, y \geq 6 \Rightarrow y = -x + 15$$

$$2 \leq x \leq 8, y \geq 6 \Rightarrow y = 7$$

$$x \leq 2, y \geq 6 \Rightarrow y = x + 5$$

$$x \leq 2, 3 \leq y \leq 6 \Rightarrow x = 1$$

$$x \geq 8, 3 \leq y \leq 8 \Rightarrow x = 9$$

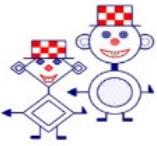
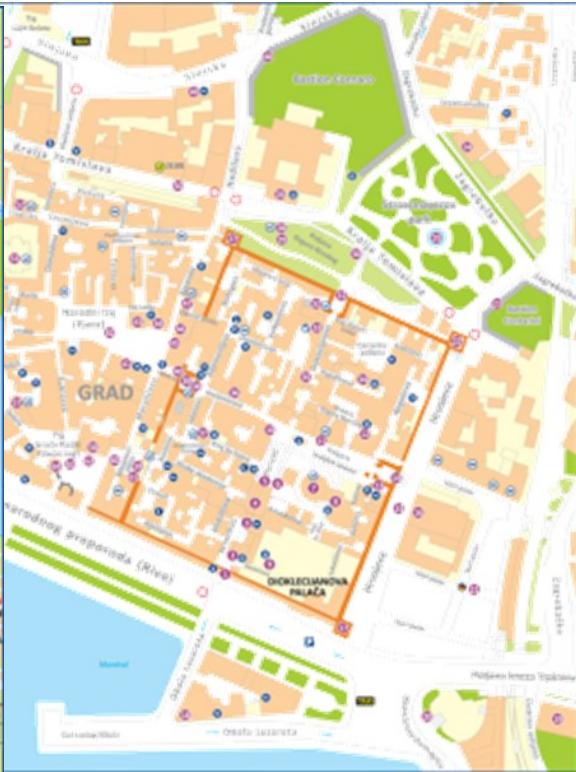
$$x \geq 8, y \leq 3 \Rightarrow y = x - 6$$

$$2 \leq x \leq 8, y \leq 3 \Rightarrow y = 2$$

$$x \leq 2, y \leq 3 \Rightarrow y = -x + 4$$

$$2 \leq x \leq 8, 3 \leq y \leq 6 \Rightarrow 9 = 11 \Rightarrow \emptyset$$

- Konačno, učitelji matematike mogu za svoje učenike prirediti **Izazove** u koje će ukomponirati tramvajske linije/ željezničku prugu ili autobusne linije koje ne prate idealne gradove (ulice su usporedne i okomite međusobno udaljene).
- Takovi izazovi vode učenike na crtanje analogija parabola kao i diskusiju o udaljenosti točke od pravca.



IZAZOV!

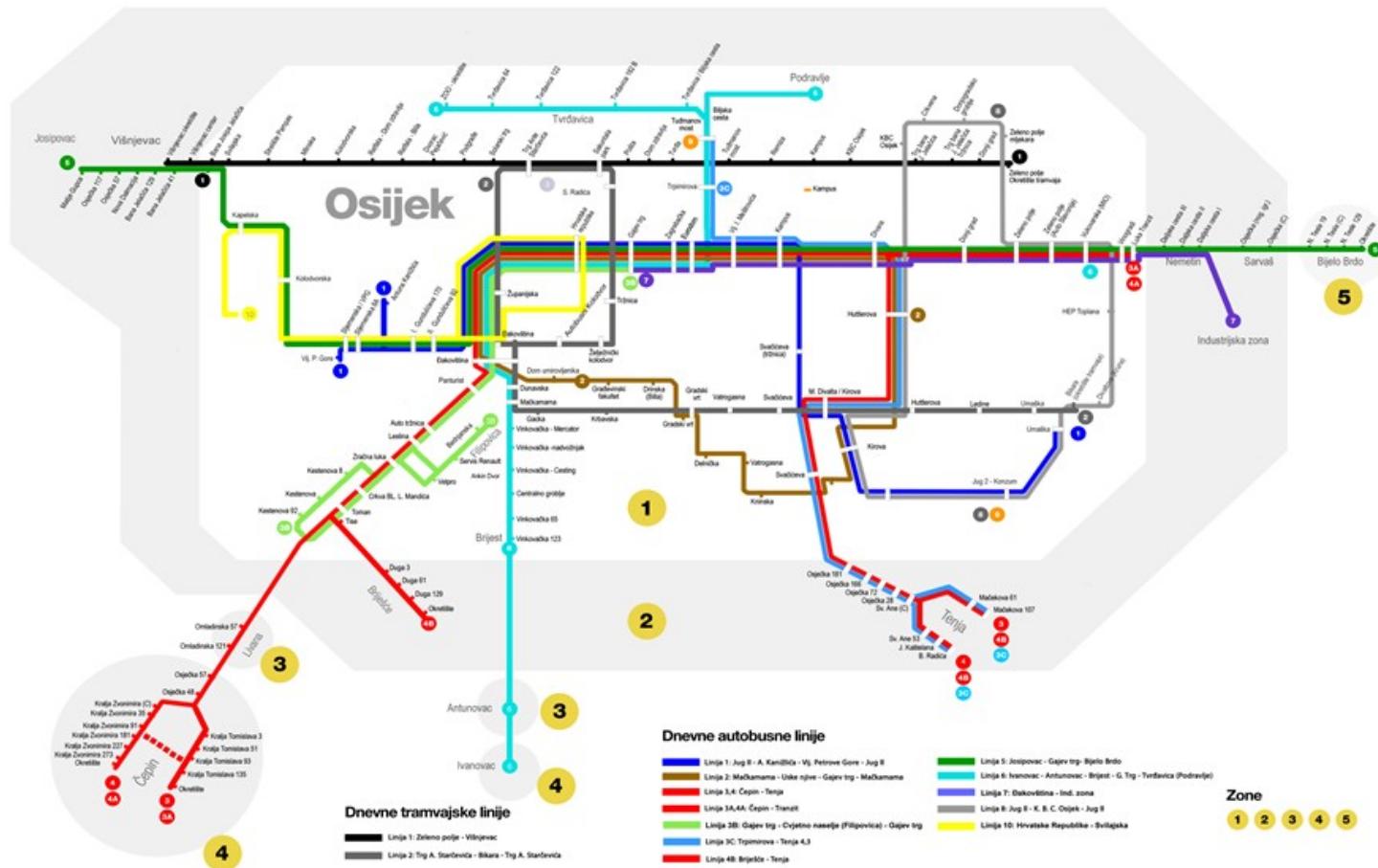


Shematski prikaz tramvajskih i autobusnih linija

Gradski prevoz putnika d.o.o.

Adresac:
Cara Hadrijana 1, 31000 Osijek
Telefon:
031 / 228 - 300
Faks:
031 / 207 - 077
Info:
031 / 228 - 306, 031 / 206 - 032

E-mail:
gpp@gpp-osijek.com
Web:
www.gpp-osijek.com
Mobilni web:
m.gpp-osijek.com



IZAZOV!



Mreža dnevnih tramvajskih linija
Tram Network Map

