Linearna kombinacija vektora u školskim predmetima: kemiji, fizici i hrvatskom jeziku

Petar Mladinić, Zagreb

17. lipnja 2020.

Vektori su pojam koji se poučava u školskoj matematici i jedan je od temeljnih pojmova moderne matematike.

Uobičajeno ga susrećemo u nastavi matematike i, posebice u fizici (ali na savim drukčiji način nego u nastavi matematike).

Nitko niti ne pokušava taj matematički alat prezentirati kao alat u drugim predmetima (osim u fizici na poseban način).

U ovom tekstu ukazat ćemo na moguću uporabu vektora u kemiji, fizici i hrvatskom jeziku.

Pojmovi koji se ovdje rabe pojmovi su koji se poučavaju u školskoj nastavi. Ukazujemo na dubinske veze sa spomenutim školskim predmetima. Vektori nam ovdje omogućuju "globalni"/opći apstraktni pogled i primjenu utemeljenu na dubinskom razumijevanju općeg pojma modela/modeliranja matematičkim alatom (u ovom slučaju vektorom) i konkretnog sadržaja (koji je i sam po prirodi neka apstrakcija i model) iz nekog školskog predmeta.

Čitatelj će presuditi je li ovo ukazivanje produktivno i jesu li ovdje iznijeti argumenti prihvatljivi u školskoj nastavi.

*****

Uvod: pojmovi, jednadžbe, prikazi/zapisi, poučci

Ukazat ćemo samo na neke (u natuknicama) pojmove i činjenice koje ćemo uporabiti u daljnjem tekstu.

Svi pojmovi (spomenuti i nespomenuti) i činjenice koje ćemo ovdje uporabiti poučavaju se i uče u školskoj nastavi spomenutih predmeta.

Dakle, u ovom tekstu ne će biti pojmova nepoznatih u kurikulima matematike, fizike i hrvatskog jezika.

a) Vektori

Podsjetimo na neke pojmove vektorskog računa koje ćemo u nastavku uporabiti u radu.

Kažemo da su vektori $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ *linearno nezavisni* ako iz

$$\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + \cdots + \alpha_n\vec{a_n} = \vec{0}$$

slijedi da je

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Inače su *linearno zavisni vektori.*

Broj linearno nezavisnih vektora je *dimenzija* vektorskog prostora.

U ravnini (u 2D) su dva *nekolinearna vektora* linearno nezavisna i dimenzija ravnine jednaka je 2.

Svaki se vektor $\vec{c}$ u ravnini može prikazati kao *linearna kombinacija* linearno nezavisnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. vrijedi

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Analogno, u 3D prostoru su tri *nekomplanarna vektora* $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ *linearno nezavisna* i pomoću njih se svaki vektor $\vec{d}$ može prikazati kao njihova *linearna kombinacija*, tj. vrijedi

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}.$$

Dakle, ova se analogija može primijeniti i na višedimenzijske prostore (nD), tj. svaki se vektor $\vec{b}$ u tom prostoru može prikazati kao linearna kombinacija linearno nezavisnih vektora $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$, tj. vrijedi

$$\vec{b} = \alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + \cdots + \alpha_n\vec{a_n}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}.$$

Svaki *skup n linearno nezavisnih vektora* zove se *baza* n-dimenzionalnog vektorskog prostora V^n.

Ako su $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}$ *jedinični linearno nezavisni vektori*, onda se svaki vektor $\vec{a}$ u V^n može prikazati kao njihova linearna kombinacija, tj. kao

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + \cdots + a_n\vec{e_n}, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}.$$

Baza je skup $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$.

Brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zovu se *koordinate vektora.*

Koordinatni zapis vektora $\vec{a}$ prikazat ćemo kao uređenu n-torku brojeva

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Primjer 1 *U ravnini s Kartezijevim pravokutnim koordinatnim sustavom jedinični koordinatni su vektori* $\vec{i}, \vec{j}$*, pa je baza* $\{\vec{i}, \vec{j}\}$*. Zapišimo koordinate tih jediničnih vektora i prikažimo koordinatni zapis bilo kojeg vektora* $\vec{a}$*.*

Koordinate jediničnih vektora su $\vec{i} = (1, 0)$ i $\vec{j} = (0, 1)$.

Vektor $\vec{a}$ prikazuje se kao linearna kombinacija

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

ili koordinatno

$$\vec{a} = (a_x, a_y).$$

Zadatak 1 *Prikažite linearnu kombinaciju bilo kojeg vektora $\vec{a}$ i njegov koordinatni prikaz u prostoru u kojem je definiran pravokutni Kartezijev koordinatni sustav s jediničnim koordinatnim vektorima $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$.*

(`Rješenje:` $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$, $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$)

b) Kemijske jednadžbe

Prikaz kemijske reakcije pomoću kemijske formule, primjerice

$$CH_4 + 2O_2 \to CO_2 + 2H_2O$$

prikazuje izgaranje metana, reakciju predočenu pretvorbom jedne molekule metana s dvije molekule kisika u molekulu ugljikovog dioksida i dvije molekule vode.

Formule lijevo od strjelice predočuju jedinke *reaktanata*, a formule desno od strjelice jedinke *produkata*.

Stehiometrijski izjednačena jednadžba vjerno odražava očuvanje atoma u kemijskoj reakciji (u skladu sa zakonom o očuvanju mase), tako da je broj atoma pojedinih kemijskih elemenata na lijevoj i desnoj strani jednadžbe jednak.

c) Diofantske jednadžbe

Linearna diofantska jednadžba u n varijabli je jednadžba oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \;\; a_1 \in Z, b \in Z$$

čija rješenja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tražimo u skupu Z cijelih brojeva.

Poučak 1 *Jednadžba*

$$ax + by = c, a^2 + b^2 \neq 0, a, b, c \in Z$$

ima cjelobrojno rješenje ako i samo ako $D(a, b)|c$.

Riješimo sljedeće primjere.

Primjer 2 *Ima li jednadžba $3x+5y = 8$ cjelobrojna rješenja? Ako ima, onda nađite barem dva cjelobrojna rješenja.*

Vidimo da je $D(3,5)=1$ i da $1|8$, pa jednadžba ima cjelobrojna rješenja. Lako je odrediti sljedeća dva cjelobrojna rješenja $(1,1)$ i $(11,-5)$.

Primjer 3 *Ima li jednadžba* $12x+3y=5$ *cjelobrojna rješenja?*

Ova diofantska jednadžba nema cjelobrojnih rješenja jer $D(12,3) \not| 5$.

Analogno, vrijedi sljedeći poučak i primjer.

Poučak 2 *Jednadžba*

$$ax+by+cz=d, a^2+b^2+c^2 \neq 0, a,b,c,d \in Z$$

ima cjelobrojno rješenje ako i samo ako $D(a,b,c)|d$.

Primjer 4 *Ima li jednadžba* $2x+3y+5z=15$ *cjelobrojna rješenja?*

Vidimo da je $D(2,3,5)=1$ i da 1 dijeli 15, pa jednadžba ima cjelobrojna rješenja. Jedno od rješenja je uređena trojka $(1,1,2)$.

d) Fizikalne veličine

Međunarodni SI sustav jedinica omogućuje nam da se fizikalne veličine, primjerice, mogu predočiti pomoću mase M, duljine L i vremena T.

Najčešće je taj prikaz u obliku

$$\mathrm{M}^a\mathrm{L}^b\mathrm{T}^c, \text{gdje su } a,b,c \in Q.$$

Linearna kombinacija vektora u:

a) **kemiji,**

b) **fizici,**

c) **hrvatskom jeziku.**

Razmotrima svaki od ovih slučaja primjene pojma linearne kombinacije vektora.

a) Kemija - određivanje koeficijenata u kemijskim jednadžbama

U ranije spomenutom primjeru prikaza kemijske reakcije pomoću formule vidimo da vrijedi

$$CH_4+2O_2 \rightarrow CO_2+2H_2O.$$

Prikažimo ovu formulu vektorima.

U našem primjeru imamo 3 elementa: C, H i O i da je riječ o 3D prostoru. Ova tri kemijska elementa definiraju bazu $\{C, H, O\}$ linearno nezavisnih jediničnih vektora u 3D prostoru čije se koordinate

$$C = (1,0,0), H = (0,1,0), O = (0,0,1).$$

Molekula CH_4 je vektor s koordinatama

$$CH_4 = C + H_4 = C + 4 \cdot H = (1,0,0) + 4 \cdot (0,1,0) = (1,4,0).$$

Koordinatni prikazi ostalih molekula su

$$O_2 = 2 \cdot O = 2 \cdot (0,0,1) = (0,0,2),$$

$$CO_2 = C + O_2 = (1,0,0) + (0,0,2) = (1,0,2)$$

i

$$H_2O = H_2 + O = 2 \cdot H + O = 2 \cdot (0,1,0) + (0,0,1) = (0,2,0) + (0,0,1) = (0,2,1).$$

Dakle, linearne kombinacije lijeve i desne strane kemijske jednadžbe su jednake, tj. vrijedi

$$\alpha \cdot CH_4 + \beta \cdot O_2 = \gamma \cdot CO_2 + \delta \cdot H_2O, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in N.$$

Brojevi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ predočuju broj molekula u kemijskom procesu.

Odavde je

$$\alpha(1,4,0) + \beta(0,0,2) = \gamma(1,0,2) + \delta(0,2,1),$$

odnosno

$$(\alpha, 4\alpha, 2\beta) = (\gamma, 2\delta, 2\gamma + \delta).$$

Iz koordinatnog prikaza slijedi da vrijedi

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & \gamma \\ 4\alpha & = & 2\delta \\ 2\beta & = & 2\gamma + \delta \end{array} \right.$$

odnosno

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha - \gamma & = & 0 \\ 4\alpha - 2\delta & = & 0 \\ 2\beta - 2\gamma - \delta & = & 0, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in N. \end{array} \right.$$

Ovo su diofantske linearne jednadžbe za koje je najmanji broj molekula, tj. rješenje

$$\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 1, \delta = 2.$$

Riješimo dva primjera kemijskih jednadžbi.

Primjer 5 *Odredimo koeficijente u kemijskoj jednadžbi*

$$\alpha \cdot NaCl + \beta \cdot H_2SO_4 \to \gamma \cdot Na_2SO_4 + \delta \cdot HCL.$$

Baza ove kemijske formule čini 5 kemijskih elemenata $\{Na, Cl, H, S, O\}$ i radi se o 5D prostoru čiji su jedinični koordinatni vektori

$$Na = (1,0,0,0,0), Cl = (0,1,0,0,0), H = (0,0,1,0,0), S = (0,0,0,1,0), == (0,0,0,0,1).$$

Odavde slijedi da je prikaz linearne kombinacije kemijske formule

$$\alpha(1,1,0,0,0) + \beta(0,0,2,1,4) = \gamma(2,0,0,1,4) + \delta(0,1,1,0,0),$$

odnosno

$$(\alpha, \alpha, 2\beta, \beta, 4\beta) = (2\gamma, \delta, \delta, \gamma, 4\gamma).$$

Iz jednakosti istoimenih koordinata lijeve i desne strane dobivamo da su najmanje pozitivne cjelobrojne vrijednosti

$$\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 2.$$

Primjer 6 *Odredimo koeficijente u kemijskoj jednadžbi*

$$\alpha \cdot Ca + \beta \cdot H_3PO_4 \to \gamma \cdot Ca_3(PO_4)_2 + \delta \cdot H_2.$$

Bazu ove jednadžbe čine kemijski elementi $\{Ca, H, P, O\}$ i njihove koordinate u ovom slučaju su

$$Ca = (1,0,0,0,), H = (0,1,0,0), P = (0,0,1,0), O = (0,0,0,1).$$

Koordinate molekula su $H_3PO_4 = (0,3,1,4), Ca_3(PO_4)_2 = (3,0,2,8)$ i $H_2 = (0,2,0,0)$, a koordinate linearne kombinacije molekula na desnoj i lijevoj strani jednadžbe jednake su, tj. vrijedi

$$(\alpha, 3\beta, \beta, 4\beta) = (3\gamma, 2\delta, 2\gamma, 8\gamma).$$

Odavde dobivamo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha & = & 3\gamma \\ 3\beta & = & 2\delta \\ \beta & = & 2\gamma \\ 4\beta & = & 8\gamma. \end{array} \right.$$

Stavimo li za $\gamma = t$ dobivamo $\alpha = 3 \cdot t, \beta = 2 \cdot t, \delta = 3 \cdot t$.

Za vrijednost $t = 1$ dobivamo $\alpha = 3, \beta = 2, \gamma = 1$ i $\delta = 3$.

Kemijska formula procesa je

$$3 \cdot Ca + 2 \cdot H_3PO_4 \to 1 \cdot Ca_3(PO_4)_2 + 3 \cdot H_2.$$

Zadatak 2 *Odredite koeficijente u kemijskoj jednadžbi:*

a) $\alpha \cdot KMnO_4 + \beta \cdot H_2SO_4 + \gamma \cdot KBr \to \delta K_2SO_4 + \epsilon \cdot Br_2 + \zeta \cdot MnSO_4 + \eta \cdot H_2O$

b) $\alpha \cdot As_2S_3 + \beta \cdot H_2O + \gamma \cdot HNO_3 \to \delta NO + \epsilon \cdot H_3AsO_{+}\zeta \cdot H_2SO_4$.

(Rješenje:
a) $\alpha = 2, \beta = 8, \gamma = 10, \delta = 6,\ \epsilon = 5, \zeta = 2, \eta = 8$;
b) $\alpha = 3, \beta = 4, \gamma = 28, \delta = 28, \epsilon = 6, \zeta = 9$.)

b) Fizika - analiza dimenzija fizikalnih veličina

Najčešće je prikaz veličina u dijelu školske fizike u obliku

$$\mathrm{M}^a\mathrm{L}^b\mathrm{T}^c, \text{gdje su } a, b, c \in Q.$$

Dakle, radi se o 3D vektorskom prostoru čija je baza $\{M, L, T\}$.

Izraz $v = \mathrm{M}^a\mathrm{L}^b\mathrm{T}^c$ je vektor $\vec{v} = (a, b, c)$, gdje su koordinatni prikazi jediničnih vektora baze

$$M = (1, 0, 0), L = (0, 1, 0), T = (0, 0, 1).$$

Ilustrijamo sljedećim primjerom.

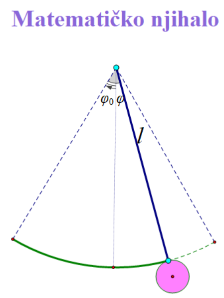
Primjer 7 *Prikažimo koordinatno na ovaj način vektor sile $F = m \cdot a$.*

Znamo da je $F = m \cdot s \cdot t^{-2}$. Koordinatno/dimenzijski je prikazan kao $F = (1, 1, -2)$.

Dimenzijska analiza svodi se na uočavanje linearne zavisnosti među vektorima.

Pokažimo takvu analizu u sljedeća dva primjera.

Primjer 8 *Pronađimo zakon matematičkog njihala.*



Pretpostavimo da vrijeme T matematičkog njihala zavisi o duljini niti l, masi njihala m i gravitacijskoj akceleraciji g.

To su sve pojmovi uočljivi u definiranju matematičkog njihala.

Dakle, pretpostavljena veza/zavisnost je opisana sa sljedećim izrazom

$$T = kl^{\alpha}m^{\beta}g^{\gamma},$$

gdje je k numerička konstanta (bez dimenzije) uobičajena u fizici i analizi ovakvog pojma.

Koordinatni prikazi veličina T, m i g su $T = (0, 0, 1), m = (1, 0, 0)$ i $g = (0, 1, -2)$.

Dakle, linearna zavisnost je dana s

$$(0, 0, 1) = \alpha(0, 1, 0) + \beta(1, 0, 0) + \gamma(0, 1, -2),$$

odnosno

$$(0, 0, 1) = (\beta, \alpha + \gamma, -2\gamma).$$

Odavde se dobiva sustav linearnih jednadžbi čije je rješenje

$$\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 0, \gamma = -\frac{1}{2}.$$

Dakle, naš *dimenzijski model* matematičkog njihala je

$$T = kl^{\frac{1}{2}}m^{0}g^{-\frac{1}{2}},$$

odnosno

$$T = k \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

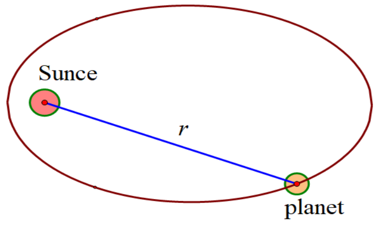
Konstanta k ne može se općenito odrediti ovom analizom jer ona je bez dimenzije i njena se vrijednost (uobičajeno je u fizici) određuje eksperimentom.

U našem je primjeru $k = 2\pi$, pa je formula fizikalnog zakona

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Primjer 9 *Analizirajmo 3. Keplerov zakon koji govori o gibanju planeta oko Sunca.*

Pretpostavimo da vrijeme T rotiranja planeta oko Sunca zavisi od udaljenosti r planeta od Sunca, mase Sunca m i univerzalne gravitacijske konstante G.



Imamo sličan model kao u prethodnom primjeru

$$T = kr^{\alpha}m^{\beta}G^{\gamma},$$

gdje je k numerička konstanta (bez dimenzije).

Univerzalna gravitacijska konstanta iznosi $G = 6,67428 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.

Dakle, koordinatni su prikazi

$$T = (0,0,1), r = (0,1,0), M = (1,0,0), G = (-1,3,-2).$$

Odavde je lako zapisati linearnu kombinaciju vektora

$$(0,0,1) = (0,\alpha) + (\beta,0,0) + (-\gamma,3\gamma,-2\gamma)$$

i dobiti da su

$$\alpha = \frac{3}{2}, \beta = -\frac{1}{2}, \gamma = -\frac{1}{2}.$$

To znači da je traženi zakon gibanja u sunčevom sustavu jednak

$$T = kr^{\frac{3}{2}}m^{-\frac{1}{2}}G^{-\frac{1}{2}},$$

odnosno

$$T^2 = k^2r^3m^{-1}G^{-1}.$$

Uočimo da su veličine k, m i G konstantnih vrijednosti, pa odavde slijedi 3. Keplerov zakon: *kvadrat vremena rotacije planeta proporcionalan je kubu udaljenosti od Sunca.*

`Napomena:` Dimenzijska analiza dovodi do pogrješnih rješenja, ako u modelu "sudjeluju" pogrješne/krive fizičke veličine.

Zadatak 3 *Nađite jedan primjer fizikalnog zakona koji pomoću dimenzijske analize možete obrazložiti/otkriti njegov zapis.*

c) Hrvatski jezik - je li Krilov u pravu?

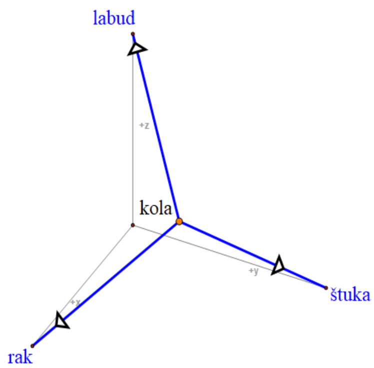
Ruski književnik **Ivan Andejevič Krilov** (1769. - 1844.) napisao je sljedeću basnu koja se uči u našim školama:

Labud, rak i štuka

Među drugovima kad nestane sloge,
Neprilike tada pojave se mnoge,
i namjesto rada iskrsne muka.
Jednom su se tako labud, rak i štuka
Upregli, da vuku nakrcana kola
Preko brda, dola.
Znoje se i muče, al' kola ni smjesta,

iako je njihov teret posve lak.
Rak unatrag vuče, labud pod oblak,
A štuka u vodu zaroni i nesta.
Tko je kriv, ja ne znam - nisu brige moje,
Ali kola tamo još i sada stoje.

Analizirajmo ovu basnu i njezinu pouku. Očito je riječ o 3 sile kojima labud, rak i štuka djeluju na nakrcana kola. Dakle, radi se o silama koje se mogu prikazati vektorima $\vec{l}, \vec{r}, \vec{s}$.



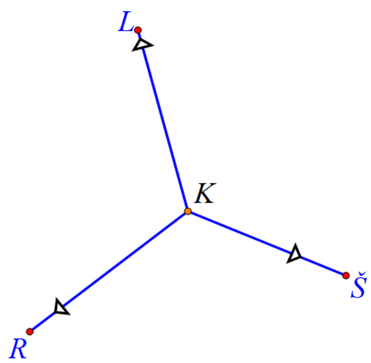
Krilov u basni tvrdi da za ove vektore u 3D vrijedi $\vec{l} + \vec{r} + \vec{s} = \vec{0}$ jer "*kola tamo još i sada stoje*".

Je li to moguće? Je li moguće da 3 linearno nezavisna vektora zbrojena daju nulvektor $\vec{0}$?

Zbroj 3 vektora može biti jednak nulvektoru $\vec{0}$ ako su u istoj ravnini, tj. ako su *komplanarni.* U tom slučaju dva *nekolinearna* vektora su linearno nezavisna, a treći se može prikazati kao linearna kombinacija ostala dva. Primjerice,

$$\vec{s} = \alpha \cdot \vec{l} + \beta \cdot \vec{r}, \alpha, \beta \neq 0.$$

Dakle, ta tri vektora "razapinju" trokut s vrhovima L, R, $Š$, a unutar trokuta je točka K kao početna za $\vec{r} = \vec{KR}$, $\vec{l} = \vec{KL}$ i $\vec{s} = \vec{KŠ}$.



Iz vektorskog računa znamo da vrijedi sljedeći poučak.

Poučak 3 *(Poučak o težištu trokuta) Zbroj vektora težišnica trokuta jednak je nulvektoru.*

Odavde zaključujemo da je točka K težište trokuta $LR\check{S}$ i da jedino u tom slučaju *kola ... stoje.*

Zaključak: Krilovljeva basna nije korektna u matematičkom smislu i sukladno tome "naravoučenje" iliti poruka nije točna.

U odgojnom i obrazovnom smislu trebalo bi je izbjegavati jer nije bezuvjetno/općenito istinita što svaka basna mora biti. Ova je basna jedino istinita uz uvjete koji realno nisu mogući, tj. da labud, rak i štuka budu u istoj ravnini, a kola u težištu trokuta $LR\check{S}$.