



## Rezultat testiranja u projektu HUNI-ja 2019. - 2020. godina

### Uvod

U ovom izvješću osvrnut ćemo se na projekt udruge *Hrvatska udruga nastavnika istraživača - HUNI* u osmišljavanju i provedbi istraživanja znanja naših učenika o temeljnim matematičkim funkcijama (matematičari i ostali školnici bi rekli: ispitivanje znanja dijela matematičke abecede).

Udruga HUNI utemeljena je kao pokušaj da školski nastavnici zajedno sa sveučilišnim nastavnicima istražuju sve segmente svojeg poučavanja, ukazuju na probleme i predlažu rješenja uočenih i istraženih problema.

Projekt istraživanja školske matematike osmišljen je 2018. godine. Projekt je osmišljen kao dvogodišnji s dva testiranja učenika u 2019. i 2020. godini. Ministarstvo znanosti i obrazovanja dopustilo je njegovu provedbu u 8. razredu osnovne škole kao i u srednjoškolskim razredima (sukladno uzrastu učenika i matematičkim sadržajima koji se tada uče).

U elaboriranju projekta i testova, provođenju i evaluiranju rezultata ispitivanja znanja sudjelovali su strani eksperti, naši sveučilišni nastavnici te nastavnici hrvatskih škola.

Testovima se ispituju razine znanja matematike prema van Hieleovom modelu u kojem je definirano pet razina znanja. Model teoretski predviđa da učenici, gotovo svi, bi kvalitetnim poučavanjem trebali biti na trećoj razini.

U pripremi elaboriranja testova i provedbe održana je znanstveno-stručna konferencija, s međunarodnim sudjelovanjem, 25. - 26. 4. 2019. na Sveučilištu u Zadru, na Odjelu za izobrazbu učitelja i odgojitelja. Dokumente, sudionike, sažetke predavanja, video i foto dokumentaciju, sponzore/donatore te ostalo može se vidjeti na web adresi <https://www.huni.hr/znanstveno-strucna-konferencija-u-zadru/>

U nastavku teksta vidjet će se na kojoj su razini naši učenici u prvom (2019. godine), ali i u drugom (2020. godine) testiranju.

Uzged, na prijedlog Ministarstva znanosti i obrazovanja ovaj je projekt Ministarstvo kulture kandidiralo za UNESCO-vu godišnju nagradu za 2019. godinu.

### Provedba

#### Rezultat testiranja u projektu HUNI-ja 2019. - 2020. godina

#### A) Prvo testiranje

Prvo testiranje je provedeno u svibnju 2019. godine u 10 srednjih škola i 5 osnovnih. U srednjoj je školi testove rješavalo 1181 učenik, a u osnovnoj 155 učenika. Škole su bile iz Osijeka, Vukovara, Vinkovaca, Zagreba, Metkovića, Splita, Zadra, Rijeke i Pule. Popis škola nalazi se u elaboratu projekta i na web stranici [www.huni.hr](http://www.huni.hr) i ovdje ih ne ćemo navoditi.

Zadatke koje su rješavali učenici nalaze se na spomenutoj web stranici. Ti su zadatci prvi pokušaj elaboriranja van Hieleovih razina i podložni su izmjenama, dopunama i drugim činjenicama sukladno primjedbama i prijedlozima nastavnika.

Na web stranici nalaze se i kriteriji za pojedinu van Hieleovu razinu koji su se primijenili na test ispitivanja poznavanja linearne, kvadratne, eksponencijalne i logaritamske funkcije.

U svakom je testu predviđeno da su, redom, po tri zadatka namijenjena od 1. do 3. van Hieleove razine. To je i istaknuto (crtom odvojeno) u tablicama.

Testovi i zadatci stavljeni su na uvid učiteljima, nastavnicima i učenicima ostalih škola koji nisu sudjelovali u ovom testiranju.

Učiteljima i nastavnicima dana je kao mogućnost da ove i slične zadatke integriraju u svoje poučavanje. Roditeljima i ostaloj javnosti stavljeni su testovi na raspolaganje u vjeri da će poslati svoja dragocjena promišljanja u svrhu poboljšanja itd.

## Tablice rezultata 2019. godine

Škole koje su sudjelovale u testiranju u tablicama su označene abecedom. Svaka je škola dobila slova svojih stupaca kako bi imala uvid u svoje rezultate i mogućnost usporedbe s ostalim (ali njima nepoznatim) školama. U svakoj je tablici škola dobila drugo slovo (kao oznaku).

U pregledavanju učeničkih rješenja testa (u OŠ i u SŠ) s linearnim funkcijama rezultirao je podacima u sljedeće dvije tablice.

### OŠ: Linearna funkcija - broj testova i riješenih zadataka

škola	A	B	C	D	E	ukupno	sveukupno
broj testova	20	21	37	32	45	155	
zadatak	180	189	133	288	405	1395	
1.	20	19	30	31	41	141	357
2.	18	15	27	15	17	92	
3.	20	18	30	22	34	124	
4.	5	2	0	4	1	12	58
5.	0	2	0	1	1	4	
6.	9	6	7	11	9	42	
7.	3	0	0	1	0	4	33
8.	1	2	0	0	1	4	
9.	6	9	3	3	4	25	
br. rješenja	82	73	97	88	108	448	

**SŠ: Linearna funkcija**

**- broj testova i riješenih zadataka**

škola	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	ukupno	sveukupno
broj testova	52	43	22	12	22	22	76	79	0	70	398	
zadatak	468	387	198	108	198	198	684	711	0	630	3582	
1.	52	43	22	11	22	22	74	69	0	62	377	1007
2.	40	35	12	5	15	9	53	34	0	43	246	
3.	52	43	21	12	22	21	76	72	0	65	384	
4.	46	30	13	6	19	3	41	17	0	46	221	616
5.	42	16	8	0	10	1	10	1	0	4	92	
6.	52	36	18	10	22	16	68	39	0	42	303	
7.	33	6	2	0	8	0	4	0	0	4	57	289
8.	8	4	1	1	3	0	5	0	0	2	24	
9.	51	30	13	1	15	3	53	3	0	39	208	
br. rješenja	376	243	110	46	136	75	384	235	0	307	1912	

**SŠ: Kvadratna funkcija**

**- broj testova i riješenih zadataka**

Redosljed škola nije isti kao u prethodnoj tablici (a ne će ni u posljednjoj), tj. iza istih slova ne stoje iste škole.

škola	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	ukupno	sveukupno
broj testova	18	21	48	55	51	21	19	29	78	75	415	
zadatak	162	189	432	495	459	189	171	261	702	675	3735	
1.	12	19	23	53	43	15	13	26	57	47	314	954
2.	10	15	12	53	47	12	10	24	62	61	306	
3.	17	16	37	53	34	18	17	27	64	51	334	
4.	8	4	19	49	18	15	9	9	46	48	225	430
5.	3	0	2	37	12	4	0	4	7	13	82	
6.	14	4	3	42	13	2	0	5	21	19	123	
7.	1	1	0	23	1	0	0	3	3	5	37	324
8.	14	11	4	36	10	0	0	8	14	17	114	
9.	1	3	0	42	32	3	2	16	43	31	173	
br. rješenja	80	73	100	388	216	69	51	122	317	292	1708	

### SŠ: Eksponecijalna funkcija

#### - broj testova i riješenih zadataka

škola	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	ukupno	sveukupno
broj testova	22	22	21	12	19	18	49	50	82	73	368	
zadatak	198	198	189	108	171	162	441	450	738	657	3312	
1.	13	17	14	4	1	16	40	3	27	15	150	590
2.	14	18	18	9	14	10	42	3	41	31	200	
3.	12	16	20	9	12	10	44	10	59	48	240	
4.	13	18	18	0	0	6	37	1	39	25	157	352
5.	5	14	19	2	0	4	45	0	16	17	122	
6.	8	6	10	0	0	2	33	0	7	7	73	
7.	14	20	20	3	7	2	44	0	30	39	179	253
8.	0	2	8	0	0	0	21	0	7	4	42	
9.	0	6	5	0	0	0	17	0	3	1	32	
br. rješenja	79	117	132	27	34	50	323	17	229	187	1195	

#### Sažetak

#### - broj testova i riješenih zadataka po razredu

razred	8. OŠ	1. SŠ	2. SŠ	3. SŠ	ukupno
broj testova	155	398	415	368	1336
broj zadataka	1395	3582	3735	3312	12024
broj riješenih zadataka	448	1912	1708	1195	5263

U obradi ovih testova može se uočiti da matematički razredi i/ili matematičke gimnazije imaju trajnije znanje i imaju puno veći broj točno riješenih zadataka nego razredi u ostalim vrstama gimnazija.

Evo, zbog ilustracije, primjera dva matematička razreda u istoj gimnaziji u odnosu prema ukupnom rezultatu u toj gimnaziji.

#### Kvadratna funkcija ... 19 učenika u razredu

razina	I.	II.	III.
broj zadataka	57	57	57
broj riješenih zadataka	16+18+11=45	14+7+12=33	3+10+14=27
postotak riješenih zadataka u razredu	$\frac{45}{57} = 78,9\%$	$\frac{33}{57} = 57,9\%$	$\frac{27}{57} = 47,4\%$
postotak riješenih zadataka u školi	70,7%	35,6%	23,6%

## Eksponecijalna funkcija ... 15 učenika u razredu

razina	I.	II.	III.
broj zadataka	45	45	45
broj riješenih zadataka	$6+11+13=30$	$13+11+5=29$	$15+4+1=20$
postotak riješenih zadataka u razredu	$\frac{30}{45} = 66,7\%$	$\frac{29}{45} = 64,4\%$	$\frac{20}{45} = 44,4\%$
postotak riješenih zadataka u školi	42,9%	22,4%	20,1%

### Mali komentar/zapažanje:

Kad bismo uzeli kao kriterij uspješnosti tj. razine barem točno rješenje dva od tri zadatka, onda se vidi da su učenici u matematičkom razredu na I. razini i blizu II. razine u poznavanju kvadratne funkcije. Ukupni rezultat učenika te škole je na I. razini, ali daleko od II. i III. razine.

Učenici u matematičkom razredu su na I. razini i skoro na II. razini u poznavanju eksponencijalne funkcije. Ukupni rezultat učenika te škole je daleko od I., II. i III. razine.

Zašto je to tako trebali bismo raspraviti. Posebice se taj "odmak" vidi u testu o eksponencijalnoj funkciji koju su učenici učili godinu dana ranije (u drugom razredu) i gdje se vidi kojim učenicima i koji su im pojmovi u trajnijem znanju.

## Neki komentari i mišljenja o rezultatima testiranja

a) Slažem se s prijedlogom da u slučaju ovako postavljenih zadataka rezultat  $\frac{2}{3}$  znači da je učenik na drugoj od tri razine koje se ispituju. Možda bi u budućnosti trebali izbjegavati zadatke koji imaju podzadatke jer to otežava bodovanje i razvrstavanje. Osim toga kod nekih smo zadataka razgovarali da ih je moguće riješiti na više načina - naprednije ili s puno raspisivanja.

U tom slučaju nije dovoljno gledati je li zadatak riješen nego kojom je metodom riješen. Osobito se ovo odnosi na zadatke druge i treće razine za koje bi se tek s obzirom na metodu rješavanja moglo reći da učenik rješava zadatak više razine. Možda bi bilo smisljeno unutar skupina pogledati zadatke niže razine koji su slabije riješeni kao i zadatke više razine koji su neočekivano dobro riješeni te pokušati otkriti je li to zato što zadatak zapravo ne pripada razini u koju smo ga svrstali ili učenici zaista tako rješavaju pojedine zadatke te razine.

Također je uočavanje razlike općih i matematičkih razreda očekivano ali je zgodno imati i numeričke pokazatelje. Tu me malo zbunjuje rezultat izražen u postotku riješenosti zadataka u pojedinoj razini, čini mi se to ne odgovara postotku učenika na pojedinoj razini - možda su se nekako rasporedili po zadacima pa u postotku imaju dosta riješeno ali ih je zapravo malo sa dva točna - ne znam jesam li u pravu s ovim razmišljanjem, ali radije bih gledala postotak učenika na pojedinoj razini.

Sanja Antoliš

b) Jasno nam je da u fokusu ostaje problem na kojega smo posumnjali i koji je, nakon svega, evidentan, no možda su nam se, onako usput, dogodile nuspojave na koje nismo računali.

Bio je to kraj godine, učenici full nepripremljeni, umorni od godišnjeg ispita koji su pisali par dana prije, satrani ispitivanjima iz ostalih predmeta, bez izgrađene kulture da se istinski potrudite i oko nečega što nije za ocjenu ...

Dalje, zadatci s podzadacima zasigurno otežavaju ispravljanje i klasificiranje kako je rekla Sanja, ali nude više informacija o onome što učenik (ne) zna pa u tom slučaju ova opcija 1 bod ili 0 bodova može sugerirati puno lošiju "kliničku sliku".

Tu je posebno zanimljivo vidjeti koji je dio zadatka dobro, a koji loše riješen pa bi možda bilo dobro pogledati takve zadatke detaljnije.

Ljiljana Jeličić i Ljubica Jerković

c) Bit će to kratka analiza, jer bi za dublju analizu svakako bilo dobro imati uvid u sve radove, tj. u cijeli proces rješavanja zadataka.

Globalno, mogli bi reći da rezultati ne iznenađuju obzirom na koncept samog testa (za sve funkcije). Naime većina ovih zadataka nije uobičajena u našoj svakodnevnoj praksi.

Svakako rezultati ukazuju da se treba kvalitetnije pristupiti poučavanju funkcije, ali i da treba mijenjati proces poučavanja i učenja (izvrstan primjer, a možda i odgovor, je projekt MERIA).

Pretpostavljam da se iz učeničkih radova, njihovog računa, procesa rješavanja, argumentacije tj. obrazloženja može mnogo toga isčitati, i ne samo o konceptu funkcije. Iz tvojih komentara i podataka iz tablice jasno je da nisu usvojili koncept funkcije na očekivanoj razini, da ne ostvaruju veze među različitim prikazima funkcije, među funkcijama neovisno o prikazima, a svakako imaju problem s razumijevanjem simboličkog zapisa.

Jednostavno njihovo znanje je više proceduralno, a ne konceptualno.

Moram priznati da me iznenađuje veoma slaba riješenost nekih zadataka (za svaku funkciju), pa i to da ih ima dosta sa 0 točnih. To svakako ukazuje i na jedan, još značajniji problem, a taj je da naši učenici nemaju kulturu rješavanja zadataka. Možda bi bilo dobro također usporediti koliko je učenika uopće rješavalo određeni zadatak, ali je on nedovršen, netočan.

Nadalje, jedan od faktora koji je također "malo" utjecao na uspješnost rješavanja je svakako (ne)motivacija (jer nema nagrade/nema ocjenjivanja). No i vrijeme provedbe testiranja (pred kraj nastavne godine, kad kreću mnoge provjere znanja) utjecao je na njihovu uspješnost. Ali ... tu na red dolazi učitelj! Jer znanje je znanje neovisno o okolnostima, radimo matematiku! S druge strane to je dobra, cjelovita, pa možemo reći i objektivna slika našeg obrazovnog sustava.

Testovi su dobri i mišljenja sam da ih ne treba mijenjati, možda u nekim nijansama.

Također iz rezultata se vidi dubina/razina usvojenosti koncepta funkcije - "hrvatske funkcije": koje vrste zadataka im predstavljaju problem i zašto, koja svojstva nisu dobro usvojili i na koja svojstva funkcije treba staviti težište, kako promišljaju, zaključuju itd. Dakle zadaci su bili dobri, detektirali su probleme. Svakako učiteljima/nastavnicima treba preporučiti da što više takvih varijanti zadataka implementiraju u nastavi. Pretpostavljam da je to neka slijedeća faza projekta. No svakako bi bilo dobro da se ti rezultati i prijedlozi malo više prošire među kolegama. Nadalje ne znam kako sada ide dalje faza projekta što se očekuje da učitelji/nastavnici promjene i jesu li se spremni mijenjati!

Svakako se vidi da problemi koji su kod linearne funkcije u 8.razredu OŠ, samo se nastavlja u nažalost produbljuju u srednjoj školi, a posljedično i na ostale funkcije.

Iako su matematički razredi polučili najbolje rezultate (što je i očekivano) svakako su poražavajući rezultati u nekim školama (npr. SŠ kv.funkcija škola B /G , 5.zadatak - 0 točnih) kao i veoma slabi rezultati koji spadaju u 2. i 3.razinu.

Branka Antunović Piton

d) *Osvrt na rezultate učenika u sklopu projekta Van - Hielove razine znanja*

**Kvadratna funkcija**

Ukupno 51 učenik kojima sam predavala u drugom razredu (a sada i u trećem) sudjelovalo je u rješavanju testa Kvadratna funkcija.

Iz podataka koji su mi dostupni u dobivenoj tablici vidim da su u priličnom postotku dostigli 1. razinu znanja što ni u kojem slučaju ne mislim da je dostatno. Naime, druga i treća razina su jako slabo riješene pa ću pokušati dati neko "suvislo" objašnjenje.

(Napomena: objašnjenja nisu pisana hijerarhijski nego samo nabrajana onim redom kako sam se čega dosjetila)

1. Bez obzira što smo učenike "zamolili" da test rješavaju s punom pažnjom, koncentracijom i željom da postignu što bolji rezultat, činjenica je da pozitivna trema nije loš čimbenik u rješavanju bilo kojeg testa. Naime, ne mogu reći da se nisu trudili, ali znajući da im (ne) uspjeh ne utječe na ocjenu koju će imati na kraju školske godine, moglo se očekivati da neće

svi (ili barem većina) niti ponoviti niti previše razmišljati o tome kako riješiti nešto što smo relativno davno učili.

2. Ovaj pojam relativno davno za učenike je također jedna od ključnih stvari jer se Van Hielov test pisao u svibnju, a kvadratna funkcija se uči u 1. polugodištu. Na žalost, cijeli sustav našeg obrazovanja temelji se na usvajanju i nakon toga brisanju (ili barem potiskivanju) većine sadržaja koje smo naučili. To je naravno donekle i nužno da bi se otvorio "prostor" za nova znanja, a ona starija se mogu relativno lako prizvati natrag, naravno ukoliko se za to ima vremena, volje i potrebe - povezano s točkom 1.
3. I sada nešto o zadacima: prva tri zadatka tj. prva Van Hielova razina se mogla i morala riješiti i bez ikakvog ponavljanja i tu nema nikakvog opravdanja. Za zadatak 4. mislim da većina mojih učenika odgovora da je jednostavnije odrediti tjemenu iz prvog oblika jer imamo gotovu formulu za tjemenu i tu neme nikakvog problema za njih. Cijeli svoj nastavnički vijek susrećem se s činjenicom da tjemenu oblik jednadžbe parabole "ispari" čim se izvede formula za tjemenu. S tim je povezano i rješavanje zadatka 5. jer bi naravno bilo lakše krenuti od tjemenu oblika pa napisati pravilo pridruživanja, a ovako su se vjerojatno izgubili u sustavima jednadžbi.

Osim ovih zadataka, jasno je da je zadatak 7. jako loše riješen (ali samo 1 učenik-ca??!!), ali opet, oni jesu vjerojatno krenuli nekako i izgubili se u računu.

Za zadatke 8. i 9. mislim da opet nema opravdanja osim onoga što sam navela pod točkom 1. i 2.

Općenito mislim da je našim učenicima pojam funkcije prilično nejasan u smislu pridruživanja, preslikavanja. Jako često nailazim na probleme kad je zadano npr.  $f(3) = 2$  da se ne zna što je  $x$  a što  $y$ , da se kod određivanja minimalne ili maksimalne vrijednosti funkcije ne zna tražimo li  $x$  ili  $y$  tjemenu i sl. Isto tako, bilo bi nužno imati u našim udžbenicima puno više zadataka u kojima se mora riješiti nešto grafički ili očitati iz grafa.

Anastazija Pažanin

e) Testiranje sam provela u mom prvom (inače eksperimentalnom razredu) i drugom razredu te kolegica u trećem. U sva tri slučaja od obrade navedenog gradiva pa do testiranja prošao je neki vremenski period, najduži u trećem razredu tako da mislim da su i zbog toga njihovi rezultati najlošiji.

Generalno, zadatci mi se jako sviđaju i mislim da je to smjer u kojim trebamo ići.

Kod učenika treba raditi na razvijanju svijesti da ne uče samo za ocjenu, mislim da nisu dali sve od sebe pri rješavanju jer su znali da neće biti ocjenjeni (ostavili prazno, htjeli predati ranije ...). Planiram ove godine u prvom i drugom razredu dati ovaj test tako da ga najavim i da je za ocjenu pa me baš zanimaju rezultati.

Kako je moja škola opća gimnazija uglavnom ne dolaze učenici koji se ističu u matematici tako da su očekivano slabije rješavali zadatke najviše razine.

U prvom razredu od 22 učenika samo je dvoje učenika riješilo 7-i, a jedan učenik 8-i zadatak. Učenici takve zadatke jednostavno nisu vidjeli, što zapravo nije problem, problem je generalno što kad naiđu na nešto što im je nepoznato brzo odustaju i na tome treba raditi. Dok, im je recimo 9-i zadatak tipski poznat pa ga je riješilo više od pola razreda.

U drugom razredu neugodno sam iznenađena što je samo 3 (od 18) učenika riješilo 5-i zadatak jer su to znali u testu koji je bio par tjedana ranije, vjerojatno su ili pokušavali očitati tjemenu jer je to najčešće u zadacima bilo moguće ili mogu pretpostaviti da su nažalost šablonski bili naštrebali za test pa zaboravili:).

7-i zadatak je riješio samo jedan učenik. Pretpostavljam da su iz danih točaka bezuspješno pokušavali pogoditi pravilo pridruživanja. Da su imali 3 točke (često mi nastavnici po inerciji dajemo samo onoliko podataka koliko je nužno potrebno) vjerujem da bi dio njih računski odredio funkciju i uspješno riješio zadatak.

Uočila sam da učenici imaju poteškoća i sa obrazlaganjem odgovora, tipa u 4 zadatku: Što sam tu trebao pisati pa vidi se da je to tjeme . . . dakle matematička komunikacija slaba.

Osim zadataka primjene koji su definitivno imperativ mislim da su jako važni zadatci otvorenog tipa (zad.5) i baš sam zadovoljna što su ga moji učenici dobro rješavali.

Za treći razred čekam još komentare kolegice (kad pošalje proslijedim). Kako nisu moji učenici mogu samo prokomentirati zadatke. Posebno mi se sviđa zadatak otvorenog tipa (6). I sad kad gledam mislim da bi moji učenici najslabije riješili zadatak 8.

Generalno, ne mogu Vam baš pomoći komentarima, zadatci su mi odlični, više mogu pomoći sebi i učenicima jer sam uvidjela na čemu želim raditi s njima. Posebno mi se sviđa što su zadatci kreativni i različiti i stvarno provjeravaju razumijevanje gradiva.

Osobno (a mislim i mnogi drugi) uviđam da sam se dosta okrenula modeliranju i primjeni u svakodnevnom životu, ali da se i tu treba čuvati šablona.

Rebeka Kalazić

f) Opće napomene:

- puno informacija se može dobiti iz toga je li učenik zadatak uopće pokušavao riješiti, pa se može razmisliti o davanju i te informacije;
- u svim zadacima koji imaju zahtjev: "obrazloži svoj odgovor", to obrazloženje također treba biti vrednovano jer učenik može dati točan odgovor iz naučene procedure, ali bez jasnog razumijevanja;
- osim vrednovanja, sva obrazloženja bi trebala biti kategorizirana. Dakle, čitaju se tekstualni odgovori i sastavljaju se kategorije obzirom na te odgovore, svi odgovori istog tipa spadaju u jednu kategoriju. Zatim se u rezultatima navode kategorije i broj odgovora po kategoriji. Tada se može dobiti neka jasna slika o tome što se dogodilo prilikom rješavanja, a kada pričamo o razinama usvojenosti, onda kvalitativna informacija govori puno više od kvantitativne;

Matea Gusić

## B) Drugo testiranje

Drugo je testiranje bilo planirano za proljeće 2020. godine. No, epidemija virusa korone i prelazak škola na on-line nastavu nisu dopustili testiranje. Istraživanje znanja odgođeno je za listopad 2020. godine.

I opet je prelazak na on-line nastavu u različitim dijelovima RH onemogućavao istodobno testiranje učenika, pa je odlučeno da se sukladno lokalnim uvjetima škole odluče kad će testirati učenike.

Testiranje je trajalo od listopada 2020. godine do siječnja 2021. godine.

Testovi su popravljeni, dorađeni i dopunjeni prema iskustvima i primjedbama iz prvog testiranja. Kriteriji za pojedinu van Hieleovu razinu ostali su nepromijenjeni.

Testirani su učenici istih škola koje su sudjelovale u prvom testiranju.

Drugo testiranje je provedeno u 10 srednjih škola i 5 osnovnih. U 8. razredu je testirano 148 učenika, u 1. razredu srednje 506, u 2. razredu 180, u 3. razredu 171 i u 4. razredu 254. Dakle, ukupno je testirano 1439 učenika.

Rezultate smo i ovaj put sortirali prema rješivosti pojedinog zadatka, ali i prema prijedlogu o grupiranju rješivosti broja zadataka sukladno van Hieleovoj razini. Broj grupiranih rezultata učenika iz objektivnih razloga malo odstupa od ukupnog broja testiranih učenika.

Ovdje ćemo navesti samo te grupirane podatke.

Rezultati su grupirani prema broju riješenih zadataka u 3 van Hieleove razine.

Lako se uoči na kojoj su razini učenici ako je kriterij razine rješenje barem dva zadatka te razine.



### Linearna funkcija OŠ... 145 učenika

I. razina zadatci: 1. - 3.	0:	13 učenika nije riješilo niti jedan od prva tri zadatka
	1:	33 učenika je riješilo samo 1 od prva tri zadatka
	2:	33 učenika je riješilo dva zadatka od tri zadana zadatka
	3:	66 učenika je riješilo sva tri zadatka od tri zadana zadatka
II. razina zadatci: 4. - 6.	0:	102 učenika nije riješilo niti jedan od 4. - 6. zadatka
	1:	22 učenika je riješilo jedan od sljedeća tri zadatka
	2:	17 učenika je riješilo dva od sljedeća tri zadatka
	3:	4 učenika je riješilo tri od sljedeća tri zadatka
III. razina zadatci: 7. - 9.	0:	132 učenika nije riješilo niti jedan od 7. - 9. zadatka
	1:	10 učenika je riješilo jedan od 7. - 9. zadatka
	2:	2 učenika je riješilo dva od 7. - 9. zadatka
	3:	1 učenik je riješilo tri od od 7. - 9. zadatka

Vidi se da je većina učenika tek na prvoj razini i da su daleko od teoretski predviđene treće razine.

### Linearna funkcija SŠ... 497 učenika

I. razina zadatci: 1. - 3.	0:	21 učenika nije riješilo niti jedan od prva tri zadatka
	1:	99 učenika je riješilo samo 1 od prva tri zadatka
	2:	106 učenika je riješilo dva zadatka od tri zadana zadatka
	3:	171 učenika je riješilo sva tri zadatka od tri zadana zadatka
II. razina zadatci: 4. - 6.	0:	281 učenika nije riješilo niti jedan od 4. - 6. zadatka
	1:	114 učenika je riješilo jedan od sljedeća tri zadatka
	2:	67 učenika je riješilo dva od sljedeća tri zadatka
	3:	35 učenika je riješilo tri od sljedeća tri zadatka
III. razina zadatci: 7. - 9.	0:	401 učenika nije riješilo niti jedan od 7. - 9. zadatka
	1:	60 učenika je riješilo jedan od 7. - 9. zadatka
	2:	28 učenika je riješilo dva od 7. - 9. zadatka
	3:	2 učenik je riješilo tri od od 7. - 9. zadatka

Vidi se da je većina učenika tek na prvoj razini, da je tek 20% učenika na drugoj, a da su daleko od teoretski predviđene treće razine.

### Kvadratna funkcija SŠ... 142 učenika

I. razina zadatci: 1. - 3.	0: 1 učenika nije riješilo niti jedan od prva tri zadatka 1: 17 učenika je riješilo samo 1 od prva tri zadatka 2: 57 učenika je riješilo dva zadatka od tri zadana zadatka 3: 67 učenika je riješilo sva tri zadatka od tri zadana zadatka
II. razina zadatci: 4. - 6.	0: 52 učenika nije riješilo niti jedan od 4. - 6. zadatka 1: 32 učenika je riješilo jedan od sljedeća tri zadatka 2: 36 učenika je riješilo dva od sljedeća tri zadatka 3: 22 učenika je riješilo tri od sljedeća tri zadatka
III. razina zadatci: 7. - 9.	0: 14 učenika nije riješilo niti jedan od 7. - 9. zadatka 1: 54 učenika je riješilo jedan od 7. - 9. zadatka 2: 50 učenika je riješilo dva od 7. - 9. zadatka 3: 24 učenik je riješilo tri od od 7. - 9. zadatka

Vidi se da je velika većina učenika tek na prvoj razini, a od njih da je 41% učenika na drugoj i da je 52% učenika na teoretski predviđenoj trećoj razini. Dakle, nezadovoljavajuće znanje.

### Eksponecijalna funkcija SŠ... 155 učenika

I. razina zadatci: 1. - 3.	0: 17 učenika nije riješilo niti jedan od prva tri zadatka 1: 79 učenika je riješilo samo 1 od prva tri zadatka 2: 52 učenika je riješilo dva zadatka od tri zadana zadatka 3: 7 učenika je riješilo sva tri zadatka od tri zadana zadatka
II. razina zadatci: 4. - 6.	0: 17 učenika nije riješilo niti jedan od 4. - 6. zadatka 1: 17 učenika je riješilo jedan od sljedeća tri zadatka 2: 66 učenika je riješilo dva od sljedeća tri zadatka 3: 55 učenika je riješilo tri od sljedeća tri zadatka
III. razina zadatci: 7. - 9.	0: 35 učenika nije riješilo niti jedan od 7. - 9. zadatka 1: 55 učenika je riješilo jedan od 7. - 9. zadatka 2: 39 učenika je riješilo dva od 7. - 9. zadatka 3: 28 učenik je riješilo tri od od 7. - 9. zadatka

## Logaritamska funkcija SŠ... 214 učenika

I. razina zadatci: 1. - 3.	0: 0 učenika nije riješilo niti jedan od prva tri zadatka 1: 5 učenika je riješilo samo 1 od prva tri zadatka 2: 36 učenika je riješilo dva zadatka od tri zadana zadatka 3: 173 učenika je riješilo sva tri zadatka od tri zadana zadatka
II. razina zadatci: 4. - 6.	0: 99 učenika nije riješilo niti jedan od 4. - 6. zadatka 1: 41 učenika je riješilo jedan od sljedeća tri zadatka 2: 40 učenika je riješilo dva od sljedeća tri zadatka 3: 34 učenika je riješilo tri od sljedeća tri zadatka
III. razina zadatci: 7. - 9.	0: 149 učenika nije riješilo niti jedan od 7. - 9. zadatka 1: 42 učenika je riješilo jedan od 7. - 9. zadatka 2: 13 učenika je riješilo dva od 7. - 9. zadatka 3: 10 učenik je riješilo tri od od 7. - 9. zadatka

Slično se može zaključiti i o znanju eksponencijalne i logaritamske funkcije.

Uzroci lošeg znanja o funkcijama su višestruki, ali je očito da nastava u RH ne "proizvodi" dobar rezultat. To je, uostalom vidljivo iz rezultata na maturi kao i na međunarodnim PISA i TIMS istraživanjima.

## Ilustrativni primjer

Kako bi širem čitateljstvu ilustrirali problem znanja, primjerice, navodimo jedan zadatak iz linearne funkcije koji je bio u prvom testu i kojega je riješilo manje od 3 % učenika 8. razreda, a u 1. razredu srednje škole (bez matematičkih usmjerenja koja imaju veći broj sati matematike) taj je zadatak riješilo svega 6% i u "matematičkim" razredima 8%.

**Zadatak.** Cijena pića je 7 kn za 100 ml, 12 kn za 125 ml i 17 kn za 150 ml. Kolika je cijena pića za 200 ml?

Ovaj je zadatak bio predviđen (zbog moguće primjene i uporabe svojstava linearne funkcije) za treću van Hieleovu razinu znanja. Za njega, kad se bolje pogleda, niti ne treba neko "posebno" računanje i znanje matematike te se može riješiti napamet. Dakle, naši učenici nisu bili niti pripremljeni za "sophisticiranu" uporabu znanja o linearnoj funkciji kao niti na moguću "domišljatost" u rješavanju zadatka.

## Zaključni osvrt

Iz ovih podataka vidljivo je da sadržaj, zadatke i nastavu matematike u hrvatskom školstvu treba osuvremeniti jer ne daje dobar rezultat.

Nastavljanje ovog stanja bez nužno potrebnih zahvata davat će ovakve ili još lošije rezultate.

Ovo istraživanje znanja matematičkih funkcija, kao i rezultati na maturi te međunarodnim istraživanjima PISA i TIMS naših učenika, očigledno ukazuje da nastavu matematike treba resetirati, teoretski i stručno osmisliti na znanstvenim temeljima i iskustvima najboljih nastavnika te dosljedno i dinamično provesti.