

Eksponencijalna funkcija

Testiranje je provedeno tijekom jeseni 2020. Testirani su učenici trećih razreda gimnazije, a testiranju je pristupilo 155 učenika. Test se sastojao od devet pitanja, tri pitanja po razini. Smatramo da učenik ne rješava zadatke neke razine ako je na testu riješio samo jedan zadatak ili nije riješio niti jedan zadatak te razine. Učenik rješava zadatke neke razine ako je na testu riješio dva ili sva tri zadatka te razine.

Prva razina (vizualna)

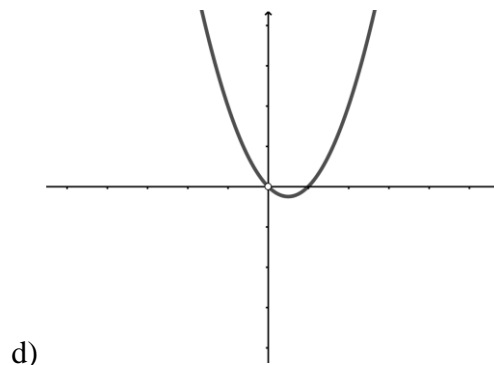
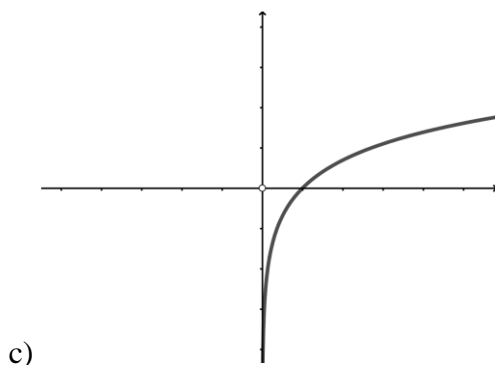
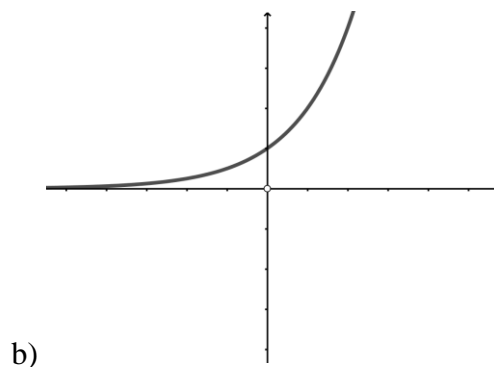
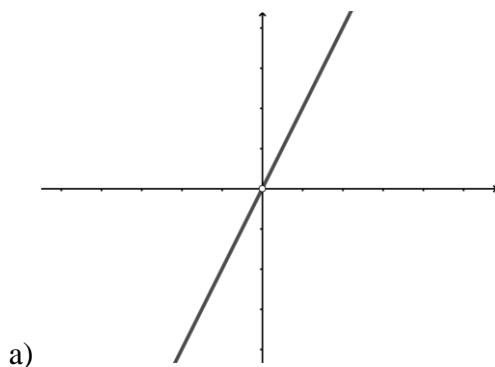
Aritmetičko – grafička razina

Početna razina razvoja pojma eksponencijalne funkcije. Učenici su svjesni postojanja pojma eksponencijalne funkcije, ali ne uočavaju specifična svojstva. Prepoznaju osnovnu eksponencijalnu funkciju zadanu grafički, pravilom pridruživanja i tablično. Učenici mogu riječima opisati rekurzivno pravilo, primjerice: „udvostručujem prethodni broj da bih dobio sljedeći“. Koriste osnovni funkcijski jezik, npr. varijabla, vrijednosti funkcije, graf i pravilo pridruživanja.

Zadatci u testiranju:

1. Za funkciju f vrijedi: kad se x poveća za jedan vrijednost funkcije poveća se za dva.
Za funkciju g vrijedi: kad se x poveća za jedan vrijednost funkcije poveća se dva puta.
Za svaku od funkcija f i g odredite na osnovu ovog svojstva jesu li linearne, kvadratne ili eksponencijalne. Odgovor obrazložite.

2. Koji od grafova prikazuje eksponencijalnu funkciju?



3. Vrijeme poluraspada neke atomske jezgre iznosi 6 minuta. Broj jezgri u početnom trenutku je N_0 . Koliko će se jezgri raspasti nakon 30 minuta? Odgovor obrazložite.

Rezultati testiranja

Postotak riješenosti po zadacima:

1 zadatak	41%
2 zadatak	87%
3 zadatak	4%

Postotak učenika koji su riješili 0, 1, 2 ili 3 zadatka

Broj riješenih zadataka	Postotak učenika
0	11.0%
1	51.0%
2	33.5%
3	4.5%

Komentar i analiza

Za prvi zadatak smatramo da je netipičan za našu nastavnu praksu te ga ne rješava 59% učenika. No, drugi je zadatak prepoznavanje oblika grafa eksponencijalne funkcije što se sigurno radi u nastavi, a ipak taj zadatak ne rješava 13% učenika. Treći je zadatak učenicima bio izrazito težak, a moguće je objašnjenje da učenici nisu znali ili razumjeli značenje pojma vrijeme poluraspada. Smatramo ipak da je taj zadatak na prvoj razini jer ga je moguće riješiti rekursivno, bez eksplicitne formule. No, bez obzira na težinu tog zadatka, 62% učenika rješava samo jedan ili niti jedan zadatak ove razine pa smatramo da ne rješava zadatke prve razine, dok za 38% učenika smatramo da rješava zadatke prve razine. Čak 11% učenika ne rješava niti jedan zadatak ove razine.

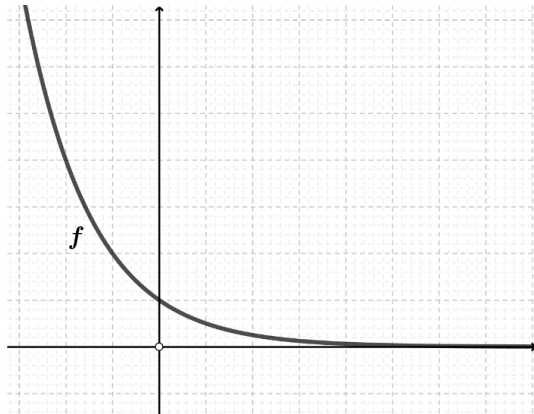
Druga razina (operacijska)

Grafičko – algebarska razina

Učenici poznaju osnovne pojmove (npr. asimptota grafa, presjek s osi y) i svojstva (npr. monotonost). Učenici su upoznati, ne samo s osnovnom eksponencijalnom funkcijom, već i s eksponencijalnim funkcijama, čiji se grafovi dobiju transformacijom grafa osnovne eksponencijalne funkcije i u mogućnosti su ih koristiti. Na ovoj razini se još ne uspostavlja veza među pojmovima i svojstvima. Obzirom da se radi o operacijskoj razini koja se očituje prelaskom na simbolički prikaz, učenici su u mogućnosti izvesti standardne proceduralne zadatke, uključujući prevođenje funkcije iz zadanog prikaza u traženi.

Zadatci u testiranju:

1. Odredite tri uređena para koji pripadaju grafu funkcije $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ i nacrtajte graf funkcije f .
2. Na slici je graf eksponencijalne funkcije f . Nacrtajte graf funkcije $g(x) = f(x) + 3$.



3. Automobil gubi na vrijednosti 10% godišnje. Početna je vrijednost automobila 30 000 kn. Zapišite pravilo pridruživanja $C(t)$ ako je $C(t)$ vrijednost automobila u kunama nakon t godina.

Rezultati testiranja

Postotak riješenosti po zadacima:

1 zadatak	82%
2 zadatak	76%
3 zadatak	37%

Postotak učenika koji su riješili 0, 1, 2 ili 3 zadatka

Broj riješenih zadataka	Postotak učenika
0	11.0%
1	11.0%
2	42.6%
3	35.4%

Komentar i analiza

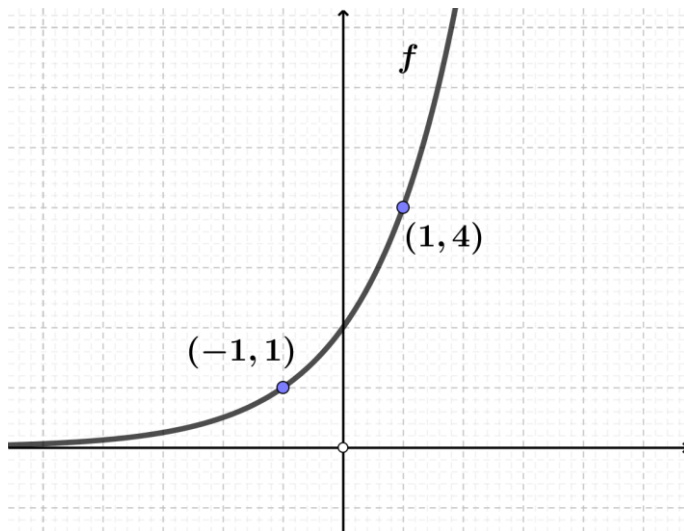
Prvi i drugi zadatak uobičajeni su u našoj nastavnoj praksi te ih učenici bolje rješavaju. Ipak možemo uočiti da drugi zadatak koji podrazumijeva transformacije grafa ne rješava 24% učenika. Treći je zadatak zadatak primjene te je daleko lošije riješen. Na ovoj razini 22% učenika rješava samo jedan ili niti jedan pa smatramo da ne rješavaju zadatke druge razine, dok za 78% učenika smatramo da rješavaju zadatke druge razine. Čak 11% učenika ne rješava niti jedan zadatak ove razine.

Treća razina (manipulacijsko-generalizacijska)
Algebarsko – geometrijska razina

Učenici uspostavljaju vezu među svojstvima eksponencijalne funkcije. Promatraju eksponencijalnu funkciju kao objekt, radi čega su u mogućnosti uočavati i primjenjivati svojstva poput utjecaja koeficijenata na izgled grafa funkcije te transformacije grafa. Učenici koriste neformalnu dedukciju prilikom odabira i obrazlaganja koraka u procesu rješavanja matematičkog problema. U mogućnosti su izložiti smislenu definiciju funkcije i povezati je s karakterističnom eksponencijalnom promjenom.

Zadatci u testiranju:

1. Na slici je prikazan graf eksponencijalne funkcije f . Popunite tablicu:



x	$f(x)$
-2	
-1	
0	2
1	
2	
3	
t	

2. Za eksponencijalnu funkciju f vrijedi $f(3) < f(1)$, $f(-2) = 16$. Što vrijedi za realne brojeve x za koje je $f(x) > 16$? Odgovor obrazložite.

3. Imate na raspolaganju sljedeće dvije opcije ulaganja:

Opcija 1: Prvog dana počinjete s kovanicom od 1 kune. Taj se iznos udvostručuje sljedeći dan, pa se dobiveni iznos opet udvostručuje sljedeći dan.

Opcija 2: Prvog dana počinjete s 1 000 kuna. Taj iznos se povećava za 1 000 kuna svaki sljedeći dan.

Usporedite opcije ulaganja. Odgovor obrazložite koristeći matematičke argumente (formule, grafove, jednačbe).

Rezultati testiranja

Postotak riješenosti po zadacima:

1 zadatak	43%
2 zadatak	47%
3 zadatak	42%

Postotak učenika koji su riješili 0, 1, 2 ili 3 zadatka

Broj riješenih zadataka	Postotak učenika
0	22.6%
1	34.2%
2	25.2%
3	18.0%

Komentar i analiza

Na ovoj su razini nema većih odstupanja u pojedinačnim postotcima riješenosti po zadacima pa možemo reći da su svi zadatci ove razine učenicima bili podjednako teški. 56.8% učenika rješava samo jedan ili niti jedan zadatak pa smatramo da ne rješavaju zadatke treće razine, dok za 43.2% učenika smatramo da rješavaju zadatke treće razine. Čak 22.6% učenika ne rješava niti jedan zadatak ove razine.

Zaključni komentar

Postotci učenika koji rješavaju pojedine razine su 38% za prvu, 78% drugu i 43.2% treću razinu. Iz toga je vidljivo da su učenicima zadatci prve razine teži od zadataka druge pa čak i treće razine. Jedno moguće objašnjenje te anomalije je u redosljedju poučavanja vezano uz eksponencijalnu funkciju. Geometrijski niz, koji predstavlja restrikciju eksponencijalne funkcije na skup prirodnih brojeva i koji bi kao diskretni model trebao prethoditi kontinuiranom slučaju poučava se kasnije, tek u četvrtom razredu. Neke od zadataka na prvoj razini možemo riješiti pomoću diskretnog modela i rekursivno. Stoga smatramo da je pri

uvođenju eksponencijalne funkcije potrebno više vremena posvetiti upravo ovim svojstvima eksponencijalne funkcije. Primjeri zadataka mogu biti:

1. Usporedite tablice A i B:

Tablica A

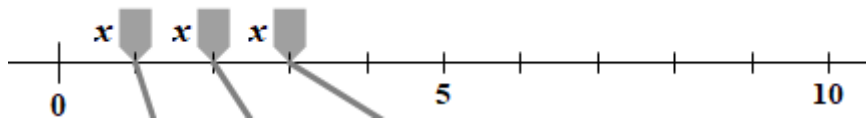
x	$f(x)$
0	0
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

Tablica B

x	$g(x)$
0	1
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243

- Koja tablica opisuje linearnu funkciju?
- Koja tablica opisuje eksponencijalnu funkciju?
- Kako biste opisali razliku između linearne i eksponencijalne funkcije služeći se tablicama?

2. Potencirajte 2 zadanim brojem i prikazite pridruživanje na brojevnim pravcima.



3. Ana je u nedjelju u 8 sati ujutro stavila u kasicu 1 kunu i svaki dan u isto vrijeme stavlja dvostruko više kuna nego prethodnoga dana. Koliko će kuna imati u kasci sljedeće nedjelje u podne?

Možemo uočiti da je treći zadatak u svakoj razini najslabije riješen. To su zadatci primjene u realnom kontekstu za svaku od razina. U svakoj je razini moguće zadati zadatke primjene koji se odnose na tu razinu:

Prva razina:

- Rekurzivno (bez pravila pridruživanja): količina se udvostručuje, smanjuje se za 30%;
- Aktivnosti očitavanja podataka iz tablica pridruženih vrijednosti i grafa;
- Aktivnosti izračunavanja vrijednosti kad je funkcija zadana pravilom pridruživanja.

Primjer zadatka

Broj korisnika neke aplikacije utrostručuje se svaki tjedan. Ako je na početku bilo 10 korisnika, koliko će korisnika biti nakon četiri tjedna?

Druga razina:

- Prevođenje rekurzivnog pravila zadanog opisno u pravilo pridruživanja $f(x) = a^x$;

- Interpretacija koeficijenta u pravilu pridruživanja $f(x) = N_0 a^x$.

Primjer zadatka:

Sara se odlučila štedjeti. Na početku ima 10 eura. Njezina baka je pristala pomoći u štednji. Ona će kroz 6 mjeseci svaki mjesec Sarinu ušteđevinu udvostručiti. Ispunite tablicu kako biste prikazali kako se Sarina ušteđevina povećava svaki mjesec.

Početak	10
Mjesec 1	
Mjesec 2	
Mjesec 3	
Mjesec 4	
Mjesec 5	
Mjesec 6	

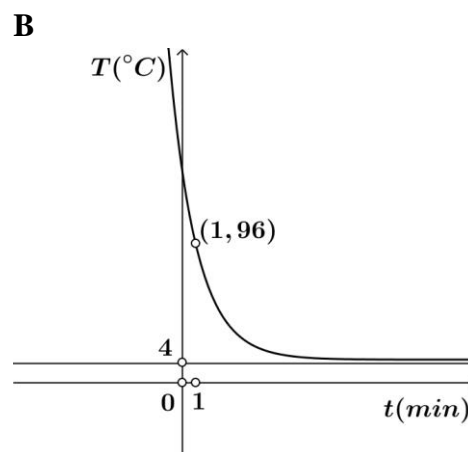
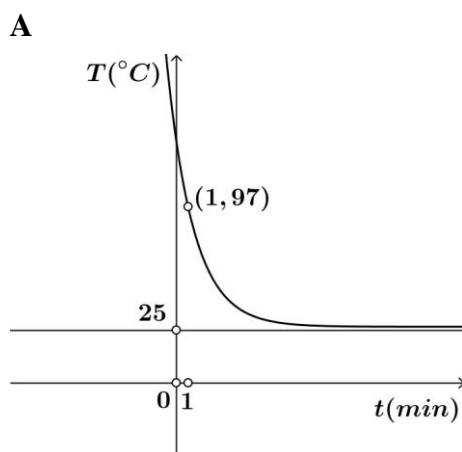
- Odredite pravilo (opisno, riječima) ili formulu (koristeći simbole) po kojem se može odrediti koliko novca Sara može uštedjeti u 12. mjesecu ako uvjeri svoju baku da nastavi toliko dugo sudjelovati u štednji.
- Odredite opće pravilo pomoću kojeg Sara može odrediti koliko novca će uštedjeti nakon x mjeseci.

Treća razina

- Interpretacija koeficijenta u pravilu pridruživanja $f(x) = N_0 a^{kx} + y_0$;
- Aktivnosti modeliranja eksponencijalnom funkcijom.

Primjer zadatka:

Dvije šalice vrućega čaja temperature 100°C želimo ohladiti na temperaturu pogodnu za konzumiranje. Jednu šalicu stavimo u hladnjak, a drugu ostavimo na sobnoj temperaturi. Grafovi A i B prikazuju ovisnost temperature čaja T o proteklom vremenu t .



- Koji graf prikazuje hlađenje čaja na sobnoj temperaturi?
- Ako je za piće pogodna temperatura od 50°C , hoće li se neka od šalica čaja ohladiti za 5 minuta?
- Može li temperatura čaja u hladnjaku pasti ispod 2°C ?
Obrazložite odgovore!