

Mentalna rotacija u novo doba matematike

Sažetak

Danas više nego prije potrebna su znanja nekih klasičnih grana matematike. Naime, tehnička otkrića 21 stoljeća, kao što su dronovi, roboti, 3D printeri, . . .(kao i sva ona koja su tek u naznakama svoje postojanosti) bez matematike/ nacrtne geometrije bile bi samo hrpe neupotrebljivih „kutija“.

Sposobnost vizualizacije prostora tj. pamćenja oblika , veličina geometrijskih figura kao i uočavanje svih međusobnih položaja i odnosa naziva se prostorni zor. Prostorni zor ima važnu ulogu u svakodnevnom životu ljudi svih dobnih skupina. Postoji 5 elemenata od kojih se sastoji prostorni zor: prostorna percepcija, vizualizacija, mentalna rotacija, psihologiski test i prostorna orientacija. Posljednjih godina, razvojem STEM područja uočena je naglašena veza sa prostornim zorom, posebice sa mentalnom rotacijom. Pokazalo se da uspjeh ili neuspjeh u STEM području je povezan sa sposobnošću mentalne rotacije. Tako da će od interesa biti rješavanje i komentiranje različitih zadataka za provjeru prostornog zora, s posebnim naglaskom na mentalnu rotaciju.

U radu će biti prikazani različiti testovi mentalne rotacije, od onih jednostavnijih do komplikiranih. Smatra se da je najkomplikiraniji zadatak ortogonalna projekcija, jer u glavi treba „pospajati“ dvodimenzijske prikaze u trodimenzijske objekte ako su zadane tri projekcije.

U cilju postizanja najviša van Hieleovoje razine (5. razine) u geometrijskom/ matematičkom poučavanju i učenju kako u osnovnoj tako i u srednjoj školi kojoj svi težimo, biti će prikazana vizualizacija istih geometrijskih figura u programu dinamične geometrije.

Ključne riječi: nacrtna geometrija, prostorni zor, mentalna rotacija, vizualizacija prostora

Danas u 21. stoljeću kada nas okružuju roboti, 3D skeneri, dronovi i još svekolika čuda tehnike očito je da klasična znanja matematike/ geometrije moraju biti čvrsti temelj. Iako većina smatra da znanje nacrtne geometrije je zastarjelo razmišljanje, prije navedena „čuda“ tehnologije kao i ona koja će tek biti otkrivena i „sklopljena“ nas demantiraju. Sva ta čuda tehnologije morao je netko zamisliti, vizualizirati za sebe pa i za druge. Morao je posložiti iste od različitih dijelova, te dijelove posložiti zajedno u glavi te ih i prikazati na jednostavan, jednoznačan način kako bi svi, kojima je to prezentirano upravo vidjeli autorovu zamisao a ne nešto drugo. Dakle, prostorna vizualizacija je vrlo važna vještina koju autori (građevinari, arhitekti, dizajneri, geodeti,...) primjenjuju kako bi jasno prenijeli svoje zamisli/ ideje drugim ljudima i na kraju te iste zamisli/ ideje pretvorili u proizvode koje su od koristi u stvarnom svijetu.

U svijetu u kojemu živimo i radimo nalaze se geometrijske figure (predmeti, građevine ... koje zapažamo, uspoređujemo i razlikujemo po obliku (uglata, obla, kombinacija), boji, dimenzijama, međusobnom položaju i veličinama. Činjenica je da većina ljudi ima problema s vizualizacijom prostora u kojem živi, a još više s prebacivanjem iz "dvodimenzijskih svijeta" u trodimenzijski ili obratno (Radović et al, 2012.).

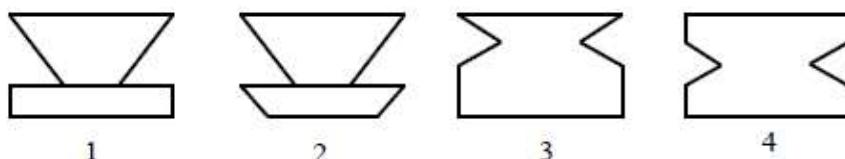
Sposobnost vizualizacije prostora tj. pamćenja oblika, veličina geometrijskih figura kao i uočavanje svih međusobnih položaja i odnosa naziva se prostorni zor. Neki se s njime rode, ostali uz „malo“ muke mogu ga naučiti. Znanost koja se temelji na prostornom zoru ali ga i podiže na višu razinu naziva se nacrtna ili deskriptivna geometrija ili opisno mjerstvo. Metodama deskriptivne/nacrtnе geometrije moguće je prikazati geometrijsku figuru crtežom u ravnini (papir, ekran računala, ekran tableta, ekran mobitela,...). Vizualizacija prostora je važna vještina za područje znanosti, tehnologije inženjerstva i matematike ili kraće STEM (Uttah, Cohen, 2017.).

Postoji 5 elemenata od kojih se sastoje prostorni zor: prostorna percepcija, vizualizacija, mentalna rotacija, psihologiski test i prostorna orijentacija. Svaki od tih elemenata može se provjeravati različitim testovima. Za nas je od interesa mentalna rotacija. Mentalna rotacija je vještina okretanje dvodimenzionalnih ili trodimenzionalnih geometrijskih figura na pamet/ u glavi.

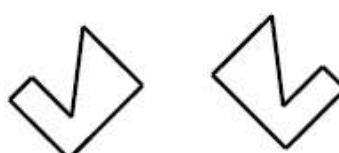
U obrazovnim sustavima diljem svijeta geometrija je sastavni dio matematičkog kurikuluma, pa tako i u Hrvatskoj od osnovne do srednje škole. No, tema mentalne rotacije nije uvijek eksplicitno uključena u nastavni plan. Zbog važnosti sposobnosti izvođenja mentalne rotacije prikazat ćemo aktivnosti koji su namijenjene razvoju ove sposobnosti za različite uzraste učenika osnove/ srednje škole. Aktivnosti su zadaci koji se mogu integrirati u okviru nastave matematike/ geometrije. Uz svaki zadatak bit će komentirane potrebne vještine za rješavanje kao i moguće pogreške u rješavanju/ razmišljanju/ zaključivanju. Isti zadaci mogu se zadati u okviru domaćih zadaća, kako bi se učenicima dalo više vremena za osmišljavanje strategija rješavanja postavljenog im problema, što će imati za posljedicu lakše rješavanje nekih novih izazova. Strategije rješavanja problema mentalne rotacije mogu biti holistička ili analitička. Holistička strategija se temelji na vizualizaciji čitave geometrijske figure, i njezine mentalne rotacije da bi se riješio postavljeni problem. Nasuprot njoj, analitička strategija temelji se rješavanja korak po koraku i kao takav zahtijeva minimum mentalne rotacije. Naš je cilj da učenici probleme rješavanju primjenom holističke strategije.

Zadačić 1.

A) Na slici 1. prikazane su različite geometrijske figure i označene brojevima 1, 2, 3 i 4. Posebno je na slici 2. prikazana jedna od figura sa slike 1. u dijelovima. Koja je to figura? U slučaju da se niti jedna od figura ne može „složiti“ od dijelova sa slike 2. odgovor može biti „niti jedna“

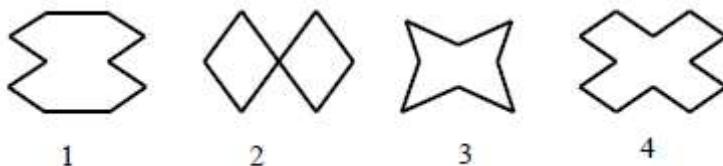


Slika 1.



Slika 2.

B) Na slici 3. prikazane su različite geometrijske figure, označene brojevima 1, 2, 3 i 4. Posebno je na slici 4. prikazana jedna od figura sa slike 1. u dijelovima. Koja je to figura? U slučaju da se niti jedna od figura ne može „složiti“ od dijelova sa slike 4. odgovor može biti „niti jedna“



Slika 3.



Slika 4.

Rješavanje problema ovog tipa ima zadatak razvijanje sposobnosti identificiranja figure s odgovarajućom figurom podijeljenom na dijelove, koji su prikazani u drugačijem položaju. To znači datreba u glavi manipulirati dijelovima (rotacijom) i spajati ih u jednu od traženih geometrijskih figura. U oba slučaja može se uočiti da je figura „rezana“ duž osi simetrije i dobiveni dijelovi su rotirani.

U slučaju A) točno rješenje je geometrijska figura 1 na slici 1. Iako se čini nemoguće, uobičajan netočan odgovor je geometrijska figura 2 na slici 1. Naprsto zamjena trapeza i pravokutnika.

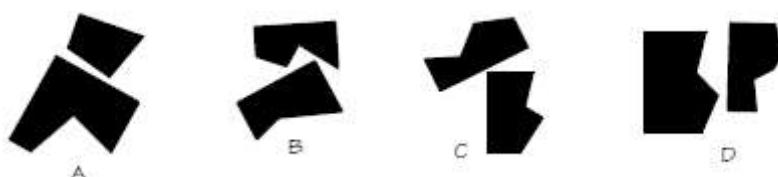
Malo složeniji su idući problemi.

Zadatak 2.

A) Zadan je kvadrat, slika 5. Na slici 6. prikazani su dijelovi A, B, C i D. Od kojih dijelova se može složiti kvadrat. U slučaju da se kvadrat ne može složiti, odgovor može biti „nemoguće složiti“.



Slika 5.

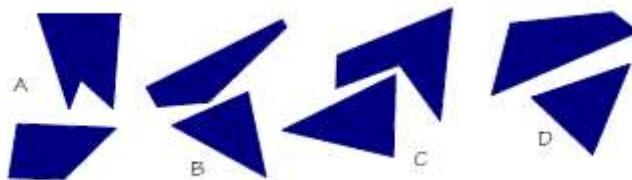


Slika 6.

B) Zadan je trokut, slika 7. Na slici 8. prikazani su dijelovi A, B, C i D. Od kojih dijelova može se složiti trokut. U slučaju da se trokut ne može složiti, odgovor može biti „*nemoguće složiti*“.



Slika 7.



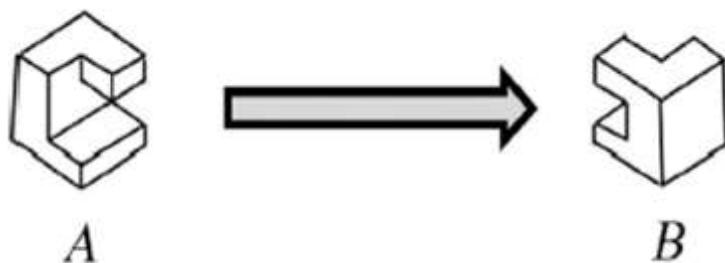
Slika 8.

Za razliku od prethodnog problema ovaj možemo reći da je inverzan, no „rezanja“ nisu u vezi sa simetrijom i time je rješavanje teže. Ono zahtijeva manipuliranje dijelovima u svakom od mogućirješenja u glavi. Znači svaki dio treba preokrenuti/ rotirati i slagati tako da nema rupa, da se „nazubljeni dijelovi“ slažu ne preklapaju. Nesvesno učenici primjenjuju naučena svojstva o kvadratu, trokutu dakle primjenjuje van Hiela (oblici i njihov izgled, klase i svojstva geometrijskih oblika, Čižmešija et al, 2010).

Kako bi se učenicima olakšalo rješavanje problema ovog tipa, zgodno je od kartona napraviti predloške koje mogu manipulirati ali i vježbati matematički/ geometrijski izričaj u rješavanju postavljenog problema mentalne rotacije.

Zadatak 3.

Na slici 9. prikazana je geometrijska figura A i njezina slika B dobivena rotacijom.

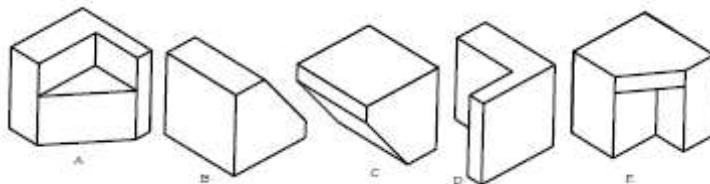


Slika 9.

Prema tom pravilu geometrijskoj figuri, slika 10. treba pridružiti odgovarajuću figuru sa slike 11.



Slika 10.



Slika 11.

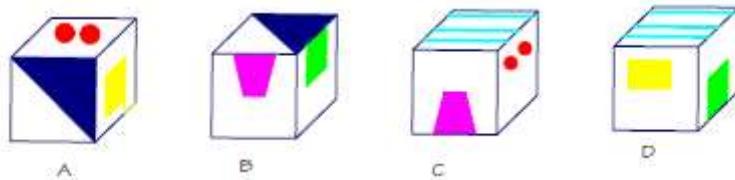
Rješavanje problema ovog tipa zahtijeva mentalno provođenje rotacije na geometrijskoj figuri identificiranje njoj sukladne geometrijske figure vidljive u nekom drugom položaju. U ovom slučaju nije moguće sagledavati geometrijsku figuru u dijelovima kao u prethodnim zadačicima već cijelu figuru.

Zadatci toga tipa mogu se naći i na proučavanju kocke...

Zadatci imaju za cilj razvijanje sposobnosti prepoznavanja odgovarajućih slika na različitim stranama geometrijske figure, u ovom slučaju kocke. U svrhu rješavanja, provodi se mentalna rotacija strana kocke.

Zadatak 4.

Kocka, slika 12. prikazana je iz četiri različita kuta gledanja. Identificirajte nasuprotne stranice kocke i popunite tablicu.



Slika 12.

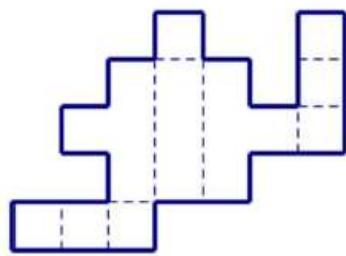
prednja strana kocke						
nasuprotna strana kocke						

Najčešće pri rješavanju ovog problema odabire se prikaz u kojem je jedna strana kocke prikazana na isti način, primjerice prednja strana kocke u B i C, pri čemu je u slučaju B okrenuta naopako... U slučaju težeg snalaženja učenika u rješavanju ovog zadatka moguće je uzeti kocku, označiti strane pa okretanjem doći do rješenja prikazanog u tablici:

prednja strana kocke						
naduprotna strana kocke						

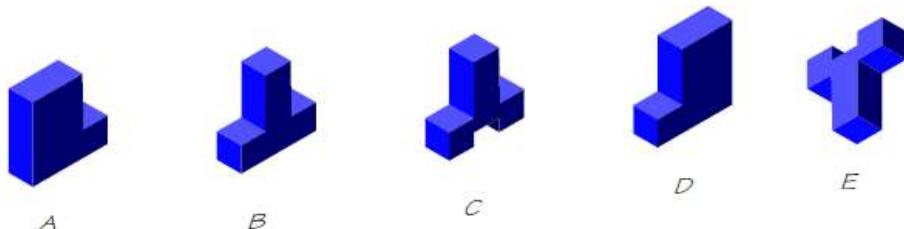
Zadatak 5.

Na slici 13. zadana je mreža geometrijske figure.



Slika 13.

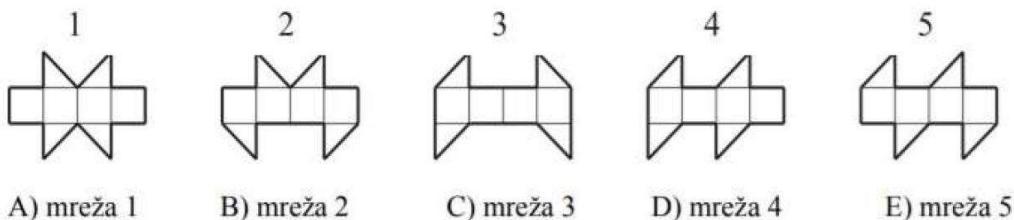
Odredite geometrijsku figuru čija je to mreža, slika 14.



Slika 14.

U ovom zadatku treba povezati mrežu i odgovarajuće tijelo. U tu svrhu dana tijela mogu se zavrtati u glavi i potom „razrezati“ duž bridova u mrežu ili posložiti u glavi mrežu u tijelo zavrtati i doći do rješenja. Iako se zadaci ovakvog tipa mogu naći u udžbenicima, ipak se radi o kompleksnijim tijelima ili nestandardnim mrežama poznatih tijela. Primjerice, na slici 15, je nestandardna mreža kocke.

13. S kojom od slijedećih mreža ne možemo sastaviti kocku?



- A) mreža 1 B) mreža 2 C) mreža 3 D) mreža 4 E) mreža 5

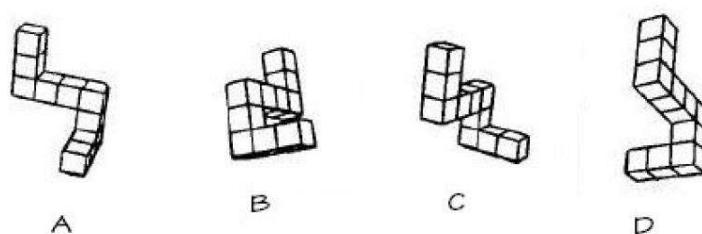
Slika 15.

Izvornik_ <https://matematika.hr/klokan/>

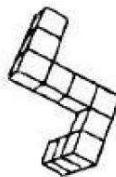
U idućem primjeru potrebno je odrediti koje su dvije geometrijske figure iste, pri čemu se pojavljuju u različitim položajima.

Zadatak 6.

Koja je figura sa slike 16. jednaka figuri na slici 17?



Slika 16.

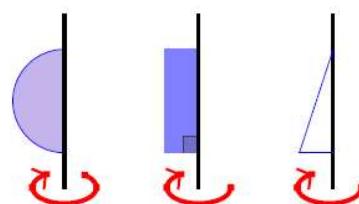


Slika 17.

Izvornik_P. H. Maier_Spatial geometry and spatial ability – How to make solid geometry solid?

Zadatak 7.

Na slici 18. su 2D geometrijske figure. Rotirajte ih oko nacrtane osi. Opišite nastale 3D geometrijske figure.



Slika 18.

U rješavanju ovog tipa zadatka učenici moraju primijeniti mentalnu rotaciju kako bi identificirali „tragove“ koje ostavljaju geometrijske figure koje se rotiraju oko osi. Ovaj zadatak zahtijeva holističku strategiju nadopunjavanja geometrijske figure dijelovima koji nisu dani, već nastaju rotacijom. Budući da se radi o tijelima, zadatak se može zadati tek poslije upoznavanja sa

stošcem, valjkom, kuglom, jer će inače učenici imati problema s opisivanjem ili imenovanjem nastalih geometrijskih figura. Pri rješavanju, od pomoći mogu biti prezentacijske datoteke napravljene u dinamičnom programu Sketchpada 5.03HR, kao i crtanje istih u istom programu. Tako se poboljšavaju sposobnosti vezane uz prostorni zor.

Važno je učenike poticati da opišu kako su rješavali pojedini zadatak, primjenom specifičnih strategija diskutirati osnovne karakteristike pojedinih zadataka na tragu usvojenih strategija. Koje su prednosti a koje nedostaci takvog pristupa? Tako bi učenici „osjetili“ koliko su se približili ili udaljili od rješenja. Učimo ih tako razmišljati, sagledavati problem, ali i vještinama učenja.

Literatura

1. M. Bakker (2008) Spatial Ability in Primary School: Effects of the Tridio® Learning Material. Master Thesis of Psychology University of Twente, Enschede.
2. A. Čižmešija; T. Soucie; N. Radović; R. Svedrec (2010) *Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole / Zbornik radova/ IV. KONGRES nastavnika matematike RH/ P. Mladinić; R. Svedrec (ur.), Zagreb, HMD, Školska knjiga, 143 – 162.*
3. V. O. Gordon, M. A. Sementsov – Ogievski (1980) *A Course in Descriptive Geometry*, MIR Publishers, Moscow.
4. P. H. Maier (1998). Spatial geometry and spatial ability: How to make solid geometry solid? In Gessellschaft für Didaktik der Mathematik, 63 – 75, Saarbrücken, Germany.
5. P. Mladinić, N. Radović (2016) *Nacrtna geometrija *** Perspektiva ** Mongeov postupak * Aksonometrija*, Proven grupa, Zagreb.
6. D. Palman (1996) *Deskriptivna geometrija*, Element, Zagreb.
7. N. Radović; R. Svedrec; T. Soucie; I. Kokić (2012). *Vizualizacija prostora*, Poučak – časopis za metodiku i nastavu matematike, 11, 49, 49 – 68.
8. D.H.Uttal, C. A. Cohen (2017) Spatial thinking and STEM education: When, why, and how?, Psychology of Learning and Motivation , December, 148 – 181.
9. ***Understanding geometry for a changing world /T. Crane, seventy-first year editor, R. Rubenstein, general yearbook editor/ NCTM, 2009