BIBLIOTEKA HUNI

JE LI DEMOKRACIJA FER?

- MATEMATIČKI POGLED NA GLASANJE I RASPODJELU MANDATA

MICHAEL DE VILLIERS, LESLIE NELSON,
NIKOL RADOVIĆ, PETAR MLADINIĆ

HUNI

BIBLIOTEKA HUNI

JE LI

DEMOKRACIJA

FER?

- matematički pogled na glasanja i raspodjelu mandata

Michael de Villiers, Leslie Nielsen,
Nikol Radović, Petar Mladinić

HUNI
HRVATSKA UDRUGA NASTAVNIKA ISTRAŽIVAČA

Zagreb, 2025.

Naslov:

Michael de Villiers, Leslie Nielsen, Nikol Radović, Petar Mladinić:
Je li demokracija FER? - matematički pogled na glasanja i raspodjelu mandata

Glavni urednik: Petar Mladinić

Urednici: Petar Mladinić & Nikol Radović

Prevoditelji: Hrvoje Horvat & Nikol Radović & Petar Mladinić

Recenzenti: Aneta Copić, Milena Ćulav Markičević, Mirela Lončar, Snježana Lukač,
Ivica Gusić, Tomislav Marošević, Robert Podolnjak, Zlatko Vujović

Lektorica: Ivana Babić

Korektor: Petar Bonačić

Hrvatska udruga nastavnika istraživača (HUNI), Zagreb

Nakladnik: Hrvatska udruga nastavnika istraživača, Zagreb, 2025.

CIP zapis je dostupan u računalnome katalogu
Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 001258907.

ISBN 978-953-49726-0-1 (tisak)

ISBN 978-953-49726-4-9 (PDF)

Tisak: booksfactory.hr, Zagreb

`www.huni.hr/nastava-matematike/Je li demokracija fer?`

Slog i prijelom: *PierreM*

Dizajn naslovnice i omota: Iva Risek Belančić
Savjetnica prijeloma: Sanja Boljević

JE LI DEMOKRACIJA FER?

- matematički pogled na glasanja i raspodjelu mandata

Michael de Villiers, Leslie Nielsen,
Nikol Radović, Petar Mladinić

HUNI
HRVATSKA UDRUGA NASTAVNIKA ISTRAŽIVAČA

Zagreb, 2025.

Sadržaj

Riječ

Ova je knjiga namijenjena, u prvom redu, za **neposredni odgojno-obrazovni rad** koji čine **redovita nastava, izborna nastava, fakultativna nastava, dopunska nastava i dodatni rad, izvannastavne aktivnosti** i **razredništvo** u RH.

Izvannastavne aktivnosti su aktivnosti koje se u školi izvode s učenicima u odgojno-obrazovnim skupinama radi zadovoljavanja njihovih potreba i interesa.

One su najdjelotvorniji način sprječavanja društveno neprihvatljivog ponašanja, a iznimno su poticajne za samoaktualizaciju učenika i samostalno-istraživačko učenje.

U osnovnoj školi izvannastavne aktivnosti podrazumijevaju učiteljevu slobodu kreiranja odgojno-obrazovnoga rada i smisao za stvaralaštvo. A istodobno su i uspješan poticaj za angažiranje učenika za rad izvan redovite nastave.

Izvannastavne aktivnosti obično su povezane s određenim nastavnim predmetom ili su interdisciplinarne naravi. Načini i metode realizacije izvannastavnih aktivnosti pretežito su radioničkoga, projektnoga, skupno-istraživačkoga, samoistraživačkog tipa odgojno-obrazovnoga rada, terenske nastave i/ili drugih aktivnih didaktičko-metodičkih pristupa.

Ovaj oblik aktivnosti organizira se za sve učenike - učenike prosječnih sposobnosti, darovite učenike, učenike koji zaostaju za očekivanom razinom učenja i učenike s posebnim potrebama. Naime, prakticiranje izvannastavnih aktivnosti pretpostavlja samostalnu učeničku odluku o uključivanju. Što odražava i njihovo htijenje za većim uspjehom, a pokazuje i veću motivaciju za učenjem u slobodnijim okruženjima poučavanja/učenja.

Sadržaji i područja ostvarivanja izvannastavnih aktivnosti veoma su raznolika. To su:

a) Prirodoslovno-matematičko područje, koje omogućuje iskustveno učenje i razmatranje odnosa.

b) Društveno-humanistički projekti i radionice (građanski odgoj i obrazovanje, prava djece i ljudska prava).

U prvom poglavlju knjige, u kojem se razmatraju izborne aktivnosti i metode, obrađuju se američki izbori. I ono je namijenjeno američkim učenicima za rad.

Učenicima, osnovnih i srednjih škola u RH, prezentiramo ga kako bi mogli steći uvid u povijest izbornih procedura, političkih aktera, odluka i metoda do današnjih dana u SAD: kako su se te odluke i metode usvajale, realizirale, mijenjale, kada i zašto.

Učenici će steći uvid u razlike i/ili sličnosti između američkih i europskih izbornih metoda analizirajući primjere i zadatke u 1. poglavlju.

Primjerice, Jeffersonova metoda se koristi u SAD za razdiobu mjesta pojedinih država u Zastupničkom domu Kongresa, dok se kod nas D'Hondtova metoda koristi za određivanje koliko će mandata u predstavničkom tijelu pripasti pojedinoj kandidacijskoj listi. Ili, Websterova se metoda u Europi naziva Sainte-Laguëova metoda i koristi se u više europskih država. Ili, Hamiltonova metoda se obično naziva Vintonovom metodom (v. str. 78.).

Može se dokazati da neke od tih različitih metoda u SAD i Europi imaju isti rezultat iako su različite.

Dvije

Kako znati je li izborni rezultat fer? Predstavlja li rezultat izbora uistinu izbor naroda? U poglavlju *Je li demokracija fer?* učenici koriste matematičke metode za istraživanje različitih vrsta glasačkih listića, postupaka izbornih odluka i metoda raspodjele mandata.

Karl Smith je u [19.] napisao:

Načela u teoriji društvenog izbora ne ponašaju se na isti način kao načela matematike. U matematici, ispravno izražen princip nema izuzetaka. U drugu ruku, često nalazimo iznimke od načela glasanja.

Tek je 1951. matematičar Kenneth Arrow dokazao *da svi pokušaji odabira prikladne tehnike glasanja su osuđeni na neuspjeh!*

Učenici također istražuju različite metode raspodjele mandata, tj. koliko će predstavnika svake države biti u Zastupničkom domu Sjedinjenih Država ili u hrvatskim slučajevima izbornih metoda!

Kako zemlje, koje koriste sustav proporcionalne zastupljenosti, odlučuju o broju predstavnika svake političke stranke koji će sjediti u njihovim tijelima vlasti?

Učenici također uče kako se metode glasanja i raspodjele primijenjuju u nepolitičkim i svakodnevnim situacijama. I taj aspekt primjene u nepolitičkim i svakodnevnim situacijama je vrlo važan segment ove knjige!

Kada je to prikladno, moguće je programirati grafički kalkulator i/ili računalo. Međutim, učenici će sve aktivnosti moći obavljati i sa znanstvenim kalkulatorom.

"Je li demokracija fer?" je više od puke knjige s aktivnostima za sat matematike. Kroz knjigu učenici se susreću s istraživačkim pitanjima koja se odnose na glasanje, raspodjelu mandata i povijesne ličnosti. Također je uključen nacrt za dugoročni učenički istraživački projekt o glasanju i raspodjeli u drugoj zemlji. Posebice se to odnosi na glasanja i raspodjelu u Hrvatskoj na nacionalnoj i lokalnoj razini te na izborima za europski parlament.

Poseban dio posvećen je izborima u RH i rezultatima tih izbora. I njihovoj analizi te istraživanjima kakvi bi bili rezultati ako se nešto mijenja.

Posebno poglavlje sadrži niz zadataka za vježbu.

I . . .

"Je li demokracija fer?" realizirana je kao **prijedlog za dio Građanskog odgoja i poučavanje naše djece**. I kao **primjer primjene školske matematike izvan matematike**.

Poglavlje *Je li demokracija fer?* (s 18 aktivnosti) razrađuje sadržaj iz kojeg nastavnik može odabrati jednu od tih aktivnosti za poučavanje, ali i kreirati svoj odabir i pristup sadržaju, tj. kreirati svoj "kurikul" (poštujući službenu proceduru) za izvannastavne aktivnosti, izbornu nastavu i/ili fakultativnu nastavu. Dijelovi iz ovog poglavlja kao i poglavlje *Analiza hrvatskih izbora* mogu se koristiti i na satu razrednika.

U knjizi se nalaze matematički sadržaji koji se uče u redovitoj nastavi. Dakle, primjena matematike na svakodnevne probleme izbora i donošenja odluka (biranje mjesta za maturalno putovanje, anketiranje o nizu sadržaja i obrada rezultata, prikazivanje tih rezultata itd.) je bitna.

1. poglavlje knjige kreirano je iz prijevoda tekstova koji se nalaze u "Is Democracy Fair?" ("Je li demokracija fer?") [17.] iz 1997. godine koju su napisali Michael de Villiers i Leslie Nielsen.

Prijevod su kreirali N. Radović i P. Mladinić uz pomoć recenzenata i lektorice.

U 2. poglavlju su uključena i dva teksta koje je 1994. i 1995. godine napisao Michael de Villiers s njegovom analizom izbora u Južnoj Africi. Ti će nam tekstovi pomoći u "analizi" izbora u RH i u učeničkim projektima razmatranja podataka iz tih izbora.

Primjena izbornih metoda elaboriranih u ovoj knjizi na podatke iz nacionalnih i lokalnih izbora u RH **od velike su edukacijske važnosti u kontekstu građanskog odgoja u našim školama i javnosti**. To su poglavlje napisali N. Radović i P. Mladinić.

N. Radović i P. Mladinić napisali su ostale tekstove i dio zadataka uključenih u knjigu.

Recenzenti knjige "Je li demokracija fer - matematički pogled i raspodjela mandata?" su sveučilišni profesori kojima je ova problematika bliska.

Recenzirali su je sveučilišni nastavnici iz Hrvatske: Ivica Gusić iz Zagreba, Tomislav Marošević iz Osijeka, Robert Podolnjak iz Zagreba te Zlatko Vujović iz Podgorice (Crna Gora).

Hrvatski nastavnici osnovne i srednje škole Milena Ćulav Markičević, Mirela Lončar, Snježana Lukač i Aneta Copić dali su veliki obol kako bi ova knjiga bila bolje uobličena.

Naslovnicu je kereirala jedna od naših najboljih dizajnerica Iva Risek Belančić.

Knjigu je lektorirala Ivana Babić, a kvalitetne savjete za prijelom dala je Sanja Boljević.

... o terminološkim razlikama

Kako su sadržaji u knjizi prevedeni i navedeni iz različitih izvora tako je i terminologija različita, primjerice Adamsova metoda i Adamsov plan itd.

Osim toga, postoji i problem kulturološke razlike između SAD-a i Europe.

Tako je kod američkog pogleda sustavno riječ o Adamsovoj metodi ili Adamsovom planu, a razlika je između Jeffersonove i D'Hondtove metode. U Europi je uobičajena D'Hondtova metoda. Nije teško pokazati kako su te dvije metode ekvivalentne (barem u osnovnom).

Ilustracije radi navodimo definiranje Jeffersonove, D'Hondtove i Sainte-Laguëove metode. Definicije su iz knjige Mirjane Kasapović "Izborni leksikon" [15.]

Na stranici 61. piše za D'Hondtovu metodu: *postupak preračunavanja glasova u mandate, nazvan prema belgijskom matematičaru, profesoru civilnog i poreznog prava u Gentu, V. D'Hondtu (1841. - 1901.). ... U američkoj tradiciji poznata je i pod nazivom Jeffersonova pravila, jer ju je razvio Th. Jefferson kao postupak za raspodjelu kongresnih mandata među američkim saveznim državama. Mandati se raspodjeljuju tako što se ukupni broj glasova svake stranke dijeli nizom djelitelja 1, 2, 3, 4, 5 ..., a mandat dobiva stranka s najvećim količnikom.*

Na stranici 330. piše za Sainte-Laguëovu metodu: *postupak preračunavanja glasova u mandate, koji je francuski matematičar A. Sainte-Laguë (1882. - 1950.) izložio 1910. Prema toj metodi, mandati se raspodjeljuju tako da se ukupni broj glasova što ih je dobila svaka stranka dijeli neparnim nizom djelitelja 1, 3, 5, 7 itd. Mandat dobiva stranka koja dijeljenjem broja glasova što ih je osvojila tim nizom djelitelja dobije najveći broj ... Njegov je poseban oblik modificirana Sainte-Laguëova metoda u kojoj je neparni niz djelitelja 1, 3, 5, 7 ... modificiran tako što je početni djelitelj 1 zamijenjen djeliteljem 1,4. ... Sainte-Laguëov postupak u SAD-u poznat je i pod nazivom Websterova metoda.*

* * * * *

Matematički problemi timski su događaji, koji potiču učenike raditi sa svim resursima koji su im dostupni. Tako se radi matematika u stvarnom svijetu. Rad na jednom od problema izvrsno je obrazovno iskustvo koje pokazuje kako se matematika zapravo radi izvan učionice.

Nadalje, razina ili sofisticiranost matematike koja se koristi za modeliranje problema nije toliko važna kao što je važna kvaliteta i jasnoća rješenja i uvid u to rješenje. Ako dobro rješenje proizlazi iz relativno jednostavnog modela, onda je to dobro za bolje razumijevanje ključnih pitanja koja su u njega uključena.

Bez obzira je li rezultat uspješan rad ili ne, od učenika i nastavnika uvijek se iznova čuje da je iskustvo korištenja matematike za rješavanje važnog problema s timom jedinstveno vrijedan i cijenjen događaj učenja.

* * * * *

Ova je knjiga pokušaj približavanja sadržaja, metoda, aktivnosti i donošenja odluka u nizu aspekata našim učenicima, nastavnicima i roditeljima.

U RH ne postoji na ovakav način elaboriran i sličan priručnik za rad u školstvu.

Ukazujemo na dio koji smo naslovili u 4. poglavlju Primjeri i zadatci i u odjeljku Ponavljanje - 4 metode: nekoliko primjera i zadataka koje bi svaki učenik trebao "usvojiti", tj. znao uspješno koristiti u svojim školskim i svakodnevnim aktivnostima i donošenju odluka. To su metode:

a) Metoda relativne većine,

b) Bordina metoda,

c) Metoda Hareove eliminacije (metoda alternativnog prenosivog glasa),

d) Metoda usporedbe parova.

U stranoj literaturi ovakav je sadržaj ”ugrađen” u matematičkim knjigama kao pojedino poglavlje dok u našoj matematičkoj školskoj literaturi nema ni traga.

Zainteresiranima ukazujemo na sljedeća dva naslova koje navodimo u literaturi ove knjige:

9. Garfunkel, S., Goldbold, L., Pollak, H. (1998): *Mathematics: Modeling Our World*, course 1, W. H. Freeman and Company, New York

18. Smith, K. J. (2004): *The Nature of Problem Solving in Algebra*, Thompson - Books/Cole, Belmont

* * * * *

Nastavnicima, učenicima, roditeljima, studentima i ostaloj javnosti koja će koristiti ovu knjigu unaprijed zahvaljujemo kad nam ukažu na pogrješke, ispravke i prijedloge poboljšanja teksta i ta svoja promišljanja pošalju na naše e-adrese.

Svim spomenutim kolegicama i kolegama te recenzentima koji su sudjelovali u kreiranju ove knjige zahvaljujemo od srca!

nikol.radovic@geof.unizg.hr petar.mladinic1@zg.ht.hr

Predgovor

Iz knjige "Je li demokracija fer?"

Školska se matematika često poučava gotovo potpuno odvojeno od konteksta stvarnog svijeta te od ostalih predmeta u nastavnom planu i programu. Ovo je posebno žalosno jer matematika se danas sve više primjenjuje na sve više problema koji utječu na našu svakodnevicu: od rješavanja problema prometnih gužvi do borbe protiv onečišćenja, od očuvanja prirodnih resursa poput vode i tla do učinkovitog upravljanja poslovanjem, od pronalaska lijeka za AIDS i na razvoj poboljšanih satelitskih komunikacija.

Knjiga je motivirana prvim potpuno demokratskim izborima u Južnoj Africi u travnju 1994. godine

Ideal predstavničke demokracije - *jedna osoba, jedan glas* - jednostavna je ideja, no njezina realizacija u praksi nije.

Kako se osigurava fer i pravedan sustav? Koji se kriteriji mogu koristiti za procjenu i usporedbu različitih sustava?

Namjera ove knjige bila je raspravljati na prilično jasan način o nekim matematičkim prednostima i manama svake od metoda.

Hamiltonova metoda je odabrana kao metoda raspodjele mandata na povijesnim izborima u Južnoj Africi u travnju 1994.

Međutim, možda je vrijedno spomena da iako je proporcionalna zastupljenost bila prihvaćena u konačnom ustavu Južne Afrike, usvojenom u svibnju 1996., bez posebne metode propisana je raspodjela mandata.

Važno je naglasiti sljedeće obrazovne ciljeve, iz ove knjige:

- Pokazati učenicima primjenjivost matematike u analizi problema u naizgled nematematičkom kontekstu društvene i političke znanosti.
- Osporiti stereotip da je matematika vrijedna samo u određenim primjenama znanosti poput fizike, kemije i informatike.
- Doprinijeti edukaciji glasača općenito i ukazujući učenicima na različite mogućnosti izbora zajedno s raspravom o prednostima i slabostima tih mogućnosti.

Knjiga pruža izvrsnu priliku za multidisciplinarni pristup učitelju iz različitih predmetnih područja.

Michael de Villiers

Kutak za nastavnike

Tom Stoppard, engleski dramaturg je napisao:

It's not the voting that's democracy; it's the counting.

`(Nije glasanje ono što je demokracija; to je brojanje.)`

Jedan od zanimljivih izazova u poučavanja svakom je nastavniku povezivanje dva različita područja kako bi oba predmeta bila zanimljiva i dostupna.

Povezivanje matematike s društvenim znanostima je često samo izračunavanje statističkih parametara i grafičkih prikaza rezultata.

U ovoj knjizi matematika je zanimljiva i nije pretjerano teška. Politološki aspekt u razrađenim aktivnostima u knjizi je dosta uočljiv.

Ova se knjiga može koristiti na različite načine. Možete jednom tjedno razmatrati matematiku glasanja - na satu društvenih predmeta ili na satu matematike, poučavati učenike timskom radu, razmatrati aktivnosti na glasanju itd.

Prvih osam aktivnosti pokriva metode glasanja i postupak odlučivanja o izborima. Posvećene su pitanju kako grupa može pošteno izabrati jednog ili više kandidata iz skupa od tri ili više imena/članova.

Nakon toga učenici istražuju temu raspodjele. Aktivnost 9. daje opći uvod u problem raspodjele. U Aktivnostima od 10. do 17. učenici istražuju metode raspodjele koje su razmatrane u problemu raspodjele zastupničkih mandata u Zastupničkom domu američkog Kongresa. U Aktivnosti 18. učenicima je prezentirana proporcionalna zastupljenost. Predstavnici se dijele po strankama, a ne po zemljopisnom položaju.

Svaka je aktivnost podijeljena na nekoliko odjeljaka. Odjeljak pod nazivom **Razmotrite** učenici obrađuju podijeljeni u grupe. U tom dijelu aktivnosti učenici će se upoznati s novim idejama. Primjenjene metode trebaju procijeniti i raspraviti. Ponekad će se zapravo primijeniti izborni postupak odlučivanja ili metoda raspodjele. Učenike treba poticati na vođenje bilješki o svojem postupku i rezultatu. Te će se bilješke koristiti u kasnijim aktivnostima. Nakon što učenici napišu bilješke treba ih razmotriti.

Na kraju aktivnosti preporučuje se rasprava s čitavim razredom o rezultatima pojedinih grupa. U pojedinim slučajevima neka svaka grupa predstavlja biračko tijelo.

U odjeljcima pod nazivom **Istražite dalje**, učenici nastavljaju istraživati izborni postupak ili metodu raspodjele. Pitanja u ovim odjeljcima su prikladna za domaću zadaću, iako se mogu zadati i kao grupni rad u učionici. U ovim dijelovima učenici će često otkriti nedostatke i probleme u metodama koje istražuju.

Mnoge aktivnosti sadrže odjeljci s oznakom **Istraživanje**. Od učenika se traži istražiti povijesnu pozadinu kao i trenutnu političku situaciju. Velik dio informacije za istraživanje može se pronaći u enciklopedijama i almanasima ili u drugim knjižničnim izvorima. Pristup Internetu omogućava pronalazak korisnih informacija. To je korisno za razgovore s učenicima o ključnim riječima koje mogu koristiti u svom pretraživanju. Vašim učenici trebate razjasniti koliko želite da temeljito istražuju temu.

Odjeljci s oznakom **Istraživanje pomoću kalkulatora** nisu obvezatni. Učenike potaknite na korištenje kalkulatora kad god misle da će im to biti od pomoći. Uz pomoć programabilnih kalkulatora, računalnih programa i/ili proračunskih tablica, učenici će moći detaljnije istražiti neke od metoda raspodjele i moći će se usredotočiti na rezultate metoda, a ne na uključene izračune.

Istraživački projekt je zamišljen kao dugoročni projekt koji će pratiti aktivnosti u knjizi. Projekt se može dodijeliti bilo kada nakon što učenici razmotre Aktivnost 9. Prije nego što učenici počnu svoje istraživanje treba raspraviti ideju razmjerne zastupljenosti koja je u Aktivnosti 18. Možete odlučiti kako pri istraživanju rasporediti učenike u istraživačke skupine. Jedna je mogućnost zamoliti učenike da izvlače iz šešira broj istraživačke skupine. Neka svaka skupina bude odgovorna za izvještavanje o rezultatu svojeg istraživanja.

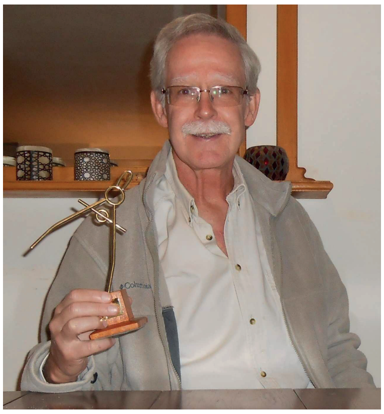
Istraživački projekt

U aktivnostima *Je li demokracija fer?* istraživat će se glasanje i metode raspodjele mandata. U procesu će se naići na reference zemalja koje koriste neke od predstavljenih metoda. U aktivnostima se predlažu dugoročni istraživački projekti. Učenici će prezentirati rezultate istraživačkih projekata svojim razredima.

Sljedeća pitanja mogu pomoći u istraživanju:

- Kako su građani u zemlji koja je odabrana zastupljeni u njihovoj vladi?
- Ima li država izabranog predsjednika ili premijera (ili oboje)?
- Koliko se kandidata obično natječe za neku poziciju na izborima?
- Koja se vrsta glasačkog listića koristi na izborima?
- Koji se postupak izborne odluke koristi?
- Ima li odabrana zemlja predstavničko tijelo (poput Kongresa SAD-a)?
- Kako se biraju predstavnici?
- Jesu li ljudi zastupljeni zemljopisno ili stranački?
- Koliko država ima stranaka?
- Kako se raspoređuju predstavnici u skupštinu? Koja metoda raspodjele se koristi?
- Ako se mogu dobiti rezultati nedavnih izbora, onda se trebaju uključiti u učenička izvješća.
  Sljedeća pitanja će pomoći u analizi podataka koji se prikupljaju:
- Zašto su ljudi u nekoj zemlji odabrali glasanje i metodu raspodjele mandata?
- Koje su prednosti odabrane metode?
- Koji se problemi, ako ih ima, uočavaju kao rezultat metode koje neka zemlja koristi?
- Što se može o odabranoj zemlji pronaći u enciklopediji, almanahu ili na internetu.

1. M. de Villiers, L. Nielsen: Je li demokracija fer?

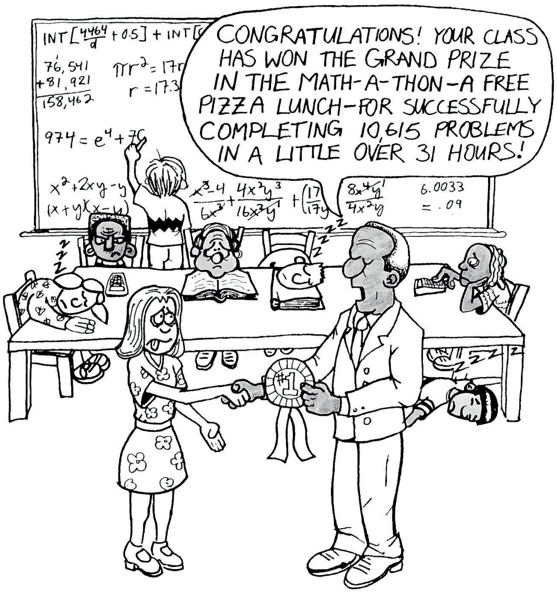


Michael de Villiers Leslie Nielsen

Ovo je poglavlje prijevod knjige *Is Democracy Fair?* [17.] koju su napisali Michael de Villiers i Leslie Nielsen.

1.1. Aktivnost 1.: Većinski izborni postupak odlučivanja

Vaš sat matematike upravo je osvojio glavnu nagradu u matkatonu prikupljanju sredstava - besplatan ručak tj. pizzu!
Pizzerija nudi posebnu ponudu ako naručite samo jednu vrstu pizze.
Izbori su: pizza sa šunkom, pizza s feferonima i gljivama i vegeterijanska pizza.
U vašem razredu izaberite pizzu. Svaki učenik može glasati za jednu vrstu pizze.



Razmotrite ovo ...

1. Učenici podijeljeni u grupe provode analizu rezultata izbora. Ispunite danu tablicu odgovarajućim brojem glasova koje je dobila svaka od pizza i izračunajte postotak ukupnih glasova koje svaka pizza dobiva ili postotkom izrazite koliko glasova koja pizza dobiva.

vrsta pizze	broj glasova	postotak glasova
šunka		
feferoni i gljive		
vegeterijanska		

- Koja je pizza pobijedila?
- Je li vaša pizza pobijedila?
- Jeste li zadovoljni rezultatima izbora? Objasnite!
- Smatrate li da su izbori bili fer? Objasnite!

Metoda kojom ste odabrali pizzu zove se **postupak izbora relativnom većinom**. To je način na koji mnoge zemlje provode izbore, a velika je vjerojatnost da je to način na koji glasate za predstavnika učenika u vijeće i donositi druge važne odluke u vašoj školi. Kod provođenja izbora na ovaj način primjenjuje **glasački listić** na kojem glasate samo za svoj prvi izbor. Osigurava li ova metoda izbora *izbor naroda*?

2. I razred koji je pobijedio na natjecanju iz zemljopisa osvojio je pizzu i rezultati njihovih glasova prikazani su tablicom. Izračunajte postotkom glasove koje je dobila svaka pizza. Ispunite tablicu.

vrsta pizze	broj glasova	postotak glasova
šunka	12	
feferoni i gljive	8	
vegeterijanska	13	

- Mislite li da je razred bio zadovoljan rezultatima ovih izbora? Objasnite!
- Što mislite kakav bi bio rezultat da je izbor pizza bio između vegeterijanske pizze i pizze sa šunkom ?

`U izborima relativnom većinom između dva ili više kandidata ne može pobijediti najmanje popularan kandidat nego uvijek pobjeđuje najpopularniji kandidat (onaj koji ima najveću relativnu većinu).`

`To se događa kada se apsolutna većina glasova podijeli između dvaju ili više sličnih izbora.`

`Može se to dogoditi pri odabiru pizza, na izborima za učeničko vijeće i na političkim izborima.`

Istražujte dalje

3. Na izborima sudjeluje 1000 birača. Ako se primjenjuje metoda relativne većine, koji je najmanji postotak ukupnog broja glasova kojim kandidat može biti izabran ako se bira između triju kandidata? Četiri kandidata? Pet kandidata? Deset kandidata? n kandidata?

4. Što mislite koliko je pravedna metoda relativne većine u slučajevima s više od dva kandidata? Postaje li metoda relativne većine više ili manje fer kako se broj kandidata povećava?

5. Metoda relativne većine rabi se u mnogim zemljama. Mislite li da je to fer metoda? Je li vaš razred fer izabrao pizzu? Je li ova metoda fer način biranja izabranog dužnosnika?

6. Opišite situaciju u kojoj ste bili zamoljeni napraviti izbor ili glasati pomoću metode relativne većine. Mislite li da su rezultati bili pravedni? Objasnite!

Istraživanje pomoću kalkulatora

7. Integer funkcija INT(x), vrlo je korisna u određivanju ili točnijem definiranju formula za modeliranje situacija u kojima želite da odgovor bude cijeli broj. Definirana je tako da INT(x) bilo kojeg realnog broj x je najveći cijeli broj manji ili jednak x; primjerice, INT(3,7) = 3. Vaš kalkulator može imati ugrađenu funkciju INT. Pronađite funkciju INT na vašem kalkulatoru i pomoću nje izračunajte slijedeće vrijednosti:

   a) INT(4,2), b) INT(1,99),
   c) INT(0,24), d) INT(12,01),
   e) INT($-$4,21), f) INT(0,15).

8. Grafički prikažite svaku od funkcija u nastavku. Provjerite je li vaš kalkulator postavljen na način rada s decimalnim zarezom ili s decimalnom točkom. Opišite svaku funkciju na temelju grafa. Koristite graf funkcije koji će vam pomoći u izračunu pojedinih vrijednosti.

   a) $y = \mathrm{INT}(x)$, b) $y = -\mathrm{INT}(x)$, c) $y = -\mathrm{INT}(-x)$.

9. Razmotrite izbore s m birača i n kandidata. Napišite formulu koristeći funkciju INT koja će vam omogućiti pronaći najmanji postotak ukupnog broja glasova s kojim bi kandidat mogao biti izabran metodom relativne većine.

Istraživanje

10. U Sjedinjenim Državama tradicionalno postoje dva kandidata za predsjednika. Na nekim se predsjedničkim izborima, međutim, pojavio i treći kandidat. Istražite i odredite na koliko je predsjedničkih izbora bio treći kandidat. Mislite li da su tada kandidati značajno utjecali na ishod izbora? Koliko su utjecali, ako mislite da su utjecali?

* * * * *

Kutak za učitelja

Ovo je uvodna aktivnost koja istražuje najuobičajniju metodu glasanja u Sjedinjenim Državama. Od birača se obično traži da izaberu jednog kandidata s liste od dva ili više. Pobjeđuje onaj tko dobije više glasova. Ovaj proces odabira pobjednika naziva se **postupkom odlučivanja relativnom većinom**.

Učenici u ovoj aktivnosti otkrivaju da metoda relativne većine ima slabost. Na izborima s više od dva kandidata, kandidat može pobijediti bez dobivanja apsolutne većine glasova. Na izborima se između triju kandidata, ako dva kandidata imaju slične poglede i programe, glasovi birača mogu podijeliti i "razbiti" tako da na kraju pobijedi kandidat koji ima više glasova od pojedinačno njihovih "razbijenih" glasova. Ova situacija prikazana je na primjeru hipotetskog razreda koji je pobijedio na natjecanju iz zemljopisa. Budući da su dvije različite vrste pizza podijelile apsolutnu većinu glasova, na kraju je pobijedila pizza vegeterijanska. Da su se učenici koji su preferirali pizzu (koja nije vegeterijanska) dogovorili oko jedne vrste pizze prije glasanja, rezultat bi bio drugačiji.

U prvom pitanju od učenika se traži da analiziraju rezultate izbora pizza. Nakon analize rezultata, potaknite raspravu u razredu. U 2. pitanju se traži od učenika da razgovaraju o svojim dojmovima o izborima opisanim u aktivnosti. Nakon što su skupine imale vremena za raspravu o pitanjima, zamolite ih da izvijeste cijeli razred. Učenici bi mogli biti iznenađeni nedostatcima koji su svojstveni metodi relativne većine. Potaknite ih da razgovaraju o ovoj slabosti, kao i o mogućim rješenjima problema izbora s više kandidata.

Odgovori

Razmotrite ovo ...

1. Odgovori mogu varirati.

2. Odgovori mogu varirati. Možda bi oni učenici koji više vole pizzu sa šunkom glasovali s učenicima koji preferiraju pizzu s feferonima i gljivama, pa vegeterijanska pizza tada ne bi pobijedila.

vrsta pizze	postotak glasova
šunka	36,36
feferoni i gljive	24,24
vegeterijanska	39,39

Istražujte dalje

3.

broj kandidata	postotak glasova potreban za moguću pobjedu
3	$> 33{,}3\overline{3}$
4	> 25
5	> 20
10	> 10
n	$> \frac{100}{n}$

4. Metoda relativne većine može postati nepoštena čim postoji više kandidata.

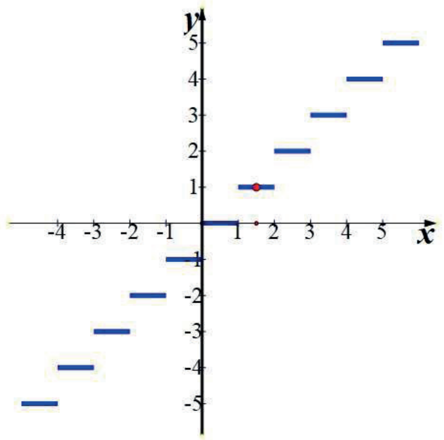
5. Odgovori mogu varirati.

6. Odgovori mogu varirati.

Istraživanje pomoću kalkulatora

7. a) 4, b) 1, c) 0, d) 12, e) -5, f) 0

8. a) Funkcija je najveći cijeli broj manji ili jednak x.



$x = 1{,}50 \quad y = 1{,}00$

Točka s koordinatama $x = 1,50$ i $y = \text{INT}(1,50) = 1,00$, tj. s koordinatama $(1,5;1)$ je točka grafa.

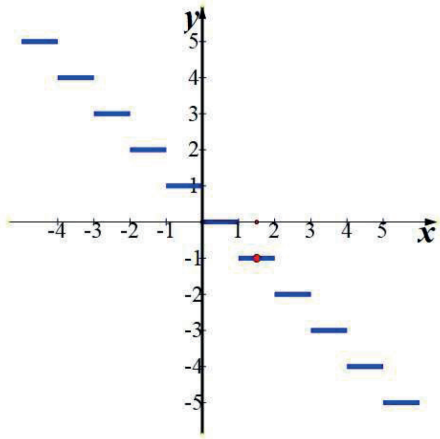
b) Funkcija je suprotna najvećem cijelom broju manjem ili jednakom x.

Primjerice točka s koordinatama $x = 1,50$ i $y =$ -INT$(1,50) = -1,00$, tj. s koordinatama $(1,5;-1)$ je točka grafa.

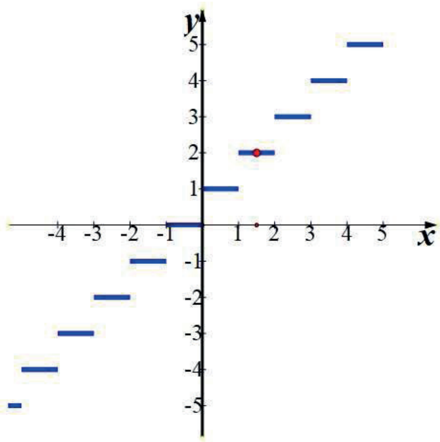
c) Funkcija vraća najmanji cijeli broj veći ili jednak x.

Primjerice točka s koordinatama $x = 1,50$ i $y =$ -INT$(-1,50) = 2,00$, tj. s koordinatama $(1,5;2)$ je točka grafa.

9. $\dfrac{100\left[\text{INT}(\frac{m}{n}) + 1\right]}{m}$



$x = 1{,}50 \, y = -1{,}00$



$x = 1{,}50 \, y = 2{,}00$

Istraživačka pitanja

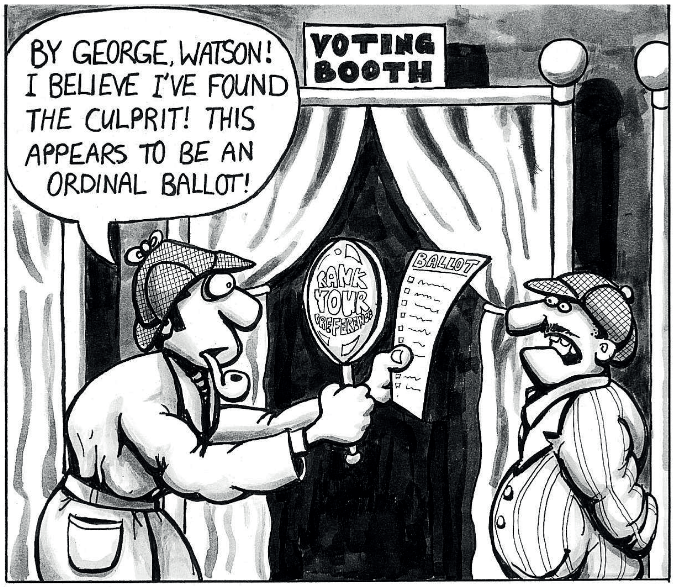
10. Odgovori mogu varirati.

Rezultati predsjedničkih izbora u godinama u kojima je bilo više od dva kandidata:

godina	kandidat	stranka	narodno glasanje	elektorsko glasanje
1796.	John Adams	Federalist		71
	Thomas Jefferson	Dem-Rep		68
	Thomas Pickney	Federalist		59
	Aaron Burr	Dem-Rep		30
	Scattering			48
1800.	Thomas Jefferson	Dem-Rep		73
	Aaron Burr	Dem-Rep		73
	John Adams	Federalist		65
	Charles C. Pinckney	Federalist		64
John Jay	Federalist			1
1876.	Rutherford B. Hayes	Republican	4 033 768	185
	Samuel J. Tilden	Democratic	4 285 992	184
	Peter Cooper	Greenback	81 737	0
1880.	James A. Garfield	Republican	4 449 053	214
	Winfield S. Hancock	Democratic	4 442 035	155
	James B. Weaver	Greenback	308 578	0
1884.	Grover Cleveland	Democratic	4 911 017	219
	James G. Blaine	Republican	4 848 334	182
	Benjamin F. Butler	Greenback	175 379	0
	John P. St. John	Prohibition	150 369	0
1888.	Benjamin Harrison	Republican	5 440 216	233
	Grover Cleveland	Democratic	5 538 233	168
	Clinton B. Fisk	Prohibition	249 506	0
	Alson J. Streeter	Union Labor	146 935	0
1892.	Grover Cleveland	Democratic	5 556 918	277
	Benjamin Harrison	Republican	5 176 108	145
	James B. Weaver	People's	1 041 028	22
	John Bidwell	Prohibition	264 133	0
1912.	Woodrow Wilson	Democratic	6 286 214	435
	Theodore Roosevelt	Progressive	4 126 020	88
	William H. Taft	Republican	3 483 922	8
	Eugene V. Debs	Socialist	897 011	0
1968.	Richard M. Nixon	Republican	31 785 480	301
	Hubert Humphrey	Democratic	31 075 166	191
	George C. Wallace	Amer. Indepen.	9 906 473	46
1992.	William J. Clinton	Democratic	44 909 889	370
	George H. Bush	Republican	39 104 545	168
	H. Ross Perot	Independent	19 742 267	0

1.2. Aktivnost 2.: Ordinalni listići

U Aktivnosti 1. otkrili ste da relativni većinski način glasanja nije uvijek fer. U ovoj i idućim aktivnostima, istražit ćete druge metode izborne odluke. Trebate razmotriti dva aspekta izbora: glasački listić i što učiniti s podatcima nakon što su svi glasački listići pregledani.
Za birača je glasački listić najočitiji pokazatelj postupka izbora.



Glasački listić najočitiji je pokazatelj postupka izborne odluke.

Ordinalni glasački listići

Jedna vrsta glasačkog listića koji se može koristiti naziva se **ordinalnim glasačkim listićem**. U kreiranju ordinalnog glasanja, od birača se traži da rangiraju svoje preferencije. Birači mogu ili navesti svoje preferencije redom od najviše do najmanje omiljene ili dodijeliti broj svakom kandidatu prema redoslijedu prednosti. Pri tome, pojedine kandidate glasač (birač) može jednako rangirati. Gotova lista koja rangira preferencije svakog glasača naziva se **raspored preferencija**.

Rangirajte svoj izbor pizze popunjavanjem glasačkog listića (prikazan tablicom) tako da označite brojem 1 svoj prvi izbor, brojem 2 drugi i brojem 3 posljednji izbor.

izbor	rang
šunka	
feferoni i gljive	
vegeterijanska	

Primjerice, u slučaju da učenik najviše voli pizzu s feferonima i gljivama, zatim pizzu sa šunkom te na kraju pizzu vegeterijansku, ispunio bi svoj glasački listić kako je u tablici prikazano.

Rangirajte svoj izbor pizze. Označite brojem 1 svoj prvi izbor, brojem 2 drugi izbor, a brojem 3 posljedni izbor.

izbor	rang
šunka	2
feferoni i gljive	1
vegeterijanska	3

Preferirani raspored izgledao bi ovako:

izbor	rang
feferoni i gljive	1
šunka	2
vegeterijanska	3

Razmotrite ovo ...

1. Katrine najviše voli vegeterijansku pizzu, a ravnodušna je prema druge dvije pizze. Kako bi izgledao njezin glasački listić?

2. Schuyler najviše voli pizzu vegeterijansku. Misli da bi pizza s feferonima i gljivama bila prihvatljiva. Ne voli pizzu sa šunkom. Kako bi označio svoj glasački listić?

3. Da su Katrine i Schuyler koristili glasački listić u kojem su glasali samo za svoje favorite, njihovi glasovi bili bi isti. Koji bi podatci bili izgubljeni? Koliko su ti podatci važni?

4. Na satu matematike upotrijebite ordinalne listiće i provedite glasanje između triju vrsta pizza. Po završenom glasanju (svi su glasali) zbrojite glasove i rezimirajte rezultate pomoću rasporeda preferencija.

   - Kako ćete odlučiti koja je pizza pobjednička? Raspravite sa svojom grupom o tome kako mislite da treba odrediti pobjednika, a zatim svoju odluku podijelite s razredom.
   - Jesu li sve grupe došle do istog zaključka? Ako nisu, možete li zamisliti situacije u kojima se različiti članovi razreda ne bi mogli složiti oko toga tko bi trebao biti pobjednik?

   `Ako želite dobiti još više podataka od svojih birača, možete tražiti od birača da rangiraju svoj izbor na unaprijed određenoj ljestvici. Ova vrsta glasačkog listića mogla bi vam točnije reći da učenik tek nešto više voli pizzu s feferonima i gljivama nego li pizzu sa šunkom, ali da više voli pizzu sa šunkom nego vegeterijansku pizzu.`

   Ocijenite svaki izbor pizze na ljestvici od 1 do 10, gdje je 10 najveći rezultat.

izbor	rang
šunka	
feferoni i gljive	
vegeterijanska	

5. Ispunite listić za pizzu svojim preferencijama i raspravite o sljedećim pitanjima s ostalim učenicima u vašoj grupi.

   - Koje podatke daje vaš ispunjeni listić, a koje ne daje?
   - Koju vrstu glasačkog listića preferirate?
   - Koju biste vrstu glasačkog listića željeli koristiti kada glasate za nešto što vam je važno?

Istražujte dalje

6. Ako glasači u vašem razredu uvijek mogu poredati pizze od najomiljenijih do najmanje omiljenih, onda možemo reći da u izboru pizza nikad nisu ravnodušni. Ako birači nisu ravnodušni, koliko je preferencijalnih rasporeda moguće pomoću ordinalnih glasačkih listića ako postoje: četiri, pet i n različitih vrsta pizza?

7. U drugom razredu neki su učenici ravnodušni u izboru pizze. Navedite različite rasporede preferencija koji su mogući korištenjem ordinalnih glasačkih listića pri izboru između triju različitih vrsta pizze. Koliko je različitih rasporeda preferencija moguće?

8. Za četiri vrste pizza postoji 24 različitih rasporeda preferencija.Objasnite što se događa kada je broj izbora sve veći, a učenici su ravnodušni jer im je svejedno koju će pizzu pojesti.

9. Ordinalni glasački listići uvelike se koriste u Australiji i u manjoj mjeri u Republici Irskoj i na Malti. Ordinalni glasački listići često se koriste i u potrošačkim ili drugim anketama.

   - Navedite nekoliko primjera slučajeva kada su vas zamolili da ispunite glasački listić.
   - Smatrate li da možete točno zastupati svoje stavove?
   - Komentirajte neke moguće prednosti i nedostatke korištenja listića.

10. Na satu geologije bira se odredište školskog izleta: u Grand Canyon, Bryce Canyon ili Death Valley. Glasanje se provodi pomoću ordinalnih glasačkih listića. Rezultati su prikazani u tablici.

broj učenika s rasporedom preferencija	**7**	**4**	**8**	**5**	**6**
	Grand Canyon	Bryce Canyon	Death Valley	Death Valley	Grand Canyon
	Bryce Canyon	Grand Canyon	Bryce Canyon	Grand Canyon	Death Valley
	Death Valley	Death Valley	Grand Canyon	Bryce Canyon	Bryce Canyon

Nekoliko učenika tvrdi da bi, na temelju glasanja, razred trebao ići u Death Valley. Ostatak razreda se ne slaže. Nakon burne rasprave neki će od učenika reći da je, na temelju metode relativne većine, Death Valley pobjednik. Slažete li se s njima? Kako koristite rasporede preferencija za određivanje pobjednika na temelju metode relativne većine? Kako biste predložili da razred donese pravednu odluku na temelju rasporeda preferencija?

Istraživanje pomoću kalkulatora

11. Primjenom kalkulatora izračunajte $n!, n^2$ i 2^n za vrijednosti n u sljedećoj tablici.

n	$n!$	n^2	2^n
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

12. Pogledajte svoje rezultate u pitanju 11. Eksperimentirajte sa svojim kalkulatorom za odrediti veće vrijednosti za n.

13. Na temelju vaših odgovora na pitanja 11. i 12. opišite neke od poteškoća s ordinalnim glasačkim listićima.

Istraživanje

14. Osmislite ordinalne listić za anketu na temu po izboru. Prikupite odgovore od 20 ili više ljudi. Analizirajte rezultate svoje ankete. Glasačke listiće koje prikupite sačuvajte za korištenje u kasnijoj aktivnosti.

* * * * *

Kutak za učitelja

U ovoj aktivnosti učenici će se upoznati s glasačkim listićem na kojemu glasači označavaju svoj izbor. Tada glasački listići omogućuju/daju biračima više informacija o svojim preferencijama.

U formiranju novih postupaka glasanja u Južnoj Africi, argumenti protiv upotrebe ordinalnih glasačkih listića temeljili su se na visokoj razini nepismenosti i neznanju. Nepismenost i neznanje je sve veći problem u Sjedinjenim Državama, pa bi se isti argument mogao eventualno primijeniti i ovdje. Moglo bi biti zanimljivo raspraviti u razredu odluku o tome vjeruju li učenici da su birači sposobni uspješno koristiti ordinalne listiće.

U odjeljku *Razmotrite ovo* od učenika se traži da razmotre kako birač treba ocjenjivati glasački listić ako je ravnodušan prema kandidatima. Općenito, ako je birač ravnodušan prema kandidatima, dodjelit će im isti rang. Primjerak glasačkog listića za pizze na kraju je ove aktivnosti.

Obavezno spremite dobivene rezultate glasanja o pizzama za korištenje u budućim aktivnostima.

Pitanja 6., 7. i 8. uvode neka osnovna kombinatorička načela. Pitanje 6. može se koristiti za uvođenje koncepta faktorijela. Kada vaši učenici razmatraju ove probleme, potaknite ih da koriste tehnike rješavanja problema kao što su promatranje jednostavnijih slučajeva, crtanje skice ili tablice te traženje uzorka.

Zaključite ovu aktivnost raspravom o tome na koji način bi učenici željeli obraditi podatke iz njihovog glasanja u izboru pizze. Ova rasprava vodi izravno u sljedeću aktivnost koja započinje niz aktivnosti na postupcima izbornog odlučivanja. Ako glasanje učenika donese jasnog pobjednika, možda biste željeli pružiti neke simulirane rezultate koji vode do zanimljivije rasprave, kao što su podatci iz pitanja 9. u *Istraži dalje*.

Istraživačko pitanje traži od učenika da osmisle vlastitu anketu i prikupe "glasačke listiće" od najmanje 20 ljudi. Ovi se rezultati također mogu koristiti u istraživačkim odjeljcima u *Aktivnosti od 3. do 8.* Možete navesti učenike da u svojim grupama osmisle pitanja koja će dati dobre rezultate. Učenici će uživati u analizi rezultata pomoću vlastitih prikupljenih podataka.

Odgovori

Razmotrite ovo ...

1. Katrine bi 1 stavila na vegeterijansku, a 2 na druge dvije vrste pizze.

2. Schuyler bi stavio 1 uz pizzu vegeterijansku, 2 uz feferone i gljive , a 3 uz pizzu sa šunkom.

3. Izgubljeni podatak je da bi Katrine bila jednako zadovoljna s druge dvije pizze, a Schuyler bi najmanje bio zadovoljan s pizzom sa šunkom.

4. Odgovori će varirati. Ovo pitanje pruža učenicima izvrsnu priliku za raspravu i uspoređivanje njihovih zaključaka.

5. Glasački listić omogućuje biraču izraziti koliko su jake njegove preferencije. Odgovori će se razlikovati.

Istražujte dalje

6. Za 4 vrste pizza postoje 24 moguća preferirana rasporeda. Za 5 vrsta pizza ima 120 mogućih rasporeda preferencija, a za n vrsta pizza postoji $n!$ drugačijih mogućih rasporeda preferencija. Potaknite učenike da naprave tablicu za rješavanje ovog problema.

broj vrsta pizza	1	2	3	4	5	...	n
broj rasporeda preferencija	1	2	6	24	120	...	$n!$

7. Neka Š, F i V označavaju tri vrste pizze. Ako postoje tri vrste pizza, postoji 13 različitih mogućih rasporeda preferencija, gdje pojedine preferencije mogu biti jednake.

   `Napomena:` (Š je šunka, F feferoni i gljive te V vegeterijanska pizza.)

ŠFV	Š F V	Š V F	Š FV	F Š V	F V Š	F ŠV	V F Š	V Š F	V FŠ	VF š	ŠV F	ŠF V

8. Kako se broj kandidata povećava, broj različitih rasporeda preferencija dramatično se povećava.

9. Odgovori će varirati.

10. Death Valley iz tablice ima 8+5=13 glasova kod kojih je na prvom rangu, a Grand Canyon ima 7+6=13 glasova na prvom mjestu, pa su oni izjednačeni, odnosno dijele prvo mjesto.

Istraživanje pomoću kalkulatora

11.

n	$n!$	n^2	2^n
1	1	1	1
2	2	4	4
3	6	9	8
4	24	16	16
5	120	25	32
6	720	36	64
7	5040	49	128
8	40320	64	256
9	362880	81	512
10	3628800	100	1024

12. Za prirodni broj $n \geq 4$ vrijednost broja $n!$ je najveća među prikazanim veličinama.

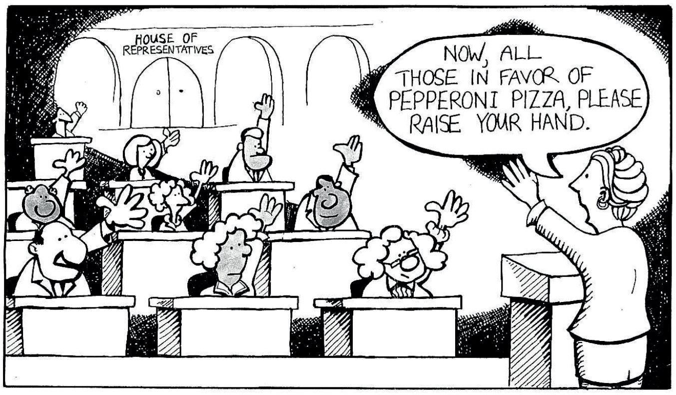
13. Neki ljudi tvrde da ordinalni glasački listići biračima mogu biti previše komplicirani. Međutim, također se može tvrditi da mnogi ljudi mogu pratiti složeno bodovanje sustava u igrama i mogu rangirati svoje omiljene igrače prema statistici. Čini se da ti isti ljudi mogu koristiti komplicirani sustav za izražavanje svojih preferencija. Ljudi mogu također imati poteškoća u analizi ili razumijevanju rezultata zbog broja rasporeda preferencija koji se mogu dobiti ovisno o broju izbora i o tome iskazuju li glasači ravnodušnost ili ne.

Istraživanje

14. Odgovori će varirati.

1.3. Aktivnost 3.: Uži izbori

Kada država ili bilo koja organizacija odluče održati izbore, osim što trebaju izabrati glasački listić moraju odlučiti kako će koristiti dobivene podatke s glasačkih listića pri izboru pobjednika. Ova izborna odluka birača naziva se **izborna odluka**.



Sekvencijska metoda parova koristi se u izglasanju zakona u Zastupničkom domu SAD-a.

Kad grupa koristi glasački listić za održavanje izbora, tada se primjenjuje relativni većinski izborni postupak pri odlučivanju pobjednika. Ako nema jasnog pobjednika, tada se može ponoviti glasanje u kojem se birači vraćaju na izbore ili se izbori ponavljaju.

Ako grupa koristi ordinalne listiće i kandidat dobije apsolutnu većinu glasova, nije potrebno da se birači vraćaju na birališta. Informacije iz njihovih glasačkih listića o njihovim preferencijama mogu se koristiti za određivanje pobjednika koji koristi postupak odlučivanja o izboru u drugom krugu.

U Aktivnosti 2. pregledali ste ordinalne glasačke listiće i glasali koristeći ih. U ovoj aktivnosti istražit ćete nekoliko postupaka odlučivanja o izborima koje su učenici koristili na satu fizike u pokušaju donošenja odluke o pizzi.

Na satu fizike u srednjoj školi razred je zaslužio pizza party jer je dizajnirao i izgradio novo klackalište za lokalno igralište. Od četiri ponuđene vrste pizze, morali su izabrati jednu. U želji da svi u razredu misle da je izbor bio fer, odabrali su ordinalne listiće. Nakon glasanja na ploču su napisani rezultati preferencija, prvo navodeći omiljenu pizzu. Rezultati su prikazani idućom tablicom.

broj učenika s ovim rasporedom preferencija	8	5	6	7
	feferoni	šunka	vegeterijanska	kobasica
	šunka	vegeterijanska	šunka	šunka
	vegeterijanska	kobasica	kobasica	vegeterijanska
	kobasica	feferoni	feferoni	feferoni

Standardni uži izbor

Ova metoda se još naziva: **metoda dva izborna kruga**.

Iako je pizza s feferonima dobila više glasova za prvo mjesto od bilo koje druge pizze, nije dobila većinu. Kako bi se odredio pobjednik, razred odabire novi krug izbora. Koristili su ordinalne listiće i ne trebaju ponovno glasati. Sve informacije koje trebaju mogu se izdvojiti iz rasporeda preferencija. Održavši novi krug izbora, razred eliminira sve kandidate osim prva dva, odnosno dvije pizze koje su dobile najviše prvoplasiranih glasova (s feferonima i s kobasicama). Dakle, drugi krug izbora bit će između pizze s feferonima i pizze s kobasicama.

Da biste odredili nove rasporede preferencija, uklonite vegeterijansku pizzu i pizzu sa šunkom. Pomaknite pizzu s feferonima i pizzu s kobasicama kako biste popunili prazna mjesta. Dobiva se:

broj učenika s ovim rasporedom preferencija	8	5	6	7
	feferoni	kobasica	kobasica	kobasica
	kobasica	feferoni	feferoni	feferoni

U ovom krugu feferoni dobivaju 8 prvoplasiranih glasova, a pizza s kobasicama 18.

Razmotrite ovo ...

1. U svojoj grupi primjenite proceduru drugog kruga za odabir pobjednika izbora u vašem razredu, održanom u Aktivnosti 2.
2. Kakav je postupak drugog kruga u usporedbi s metodom relativne većine? Koristite sljedeća pitanja koja će vam pomoći pri raspravi ili u provođenju rasprave.
   - Mislite li da je ova metoda pravednija od metode relativne većine? Objasnite!
   - Mislite li da bi više učenika bilo zadovoljno rezultatima? Objasnite!
   - Bi li manje učenika bilo stvarno nezadovoljno? Objasnite!

Hareova eliminacija

Postoji nekoliko varijanti postupka drugog kruga izbora - razlikujemo ih prema pristupu ili kutu gledanja. Jedna od varijacija je **Hareova eliminacija**, koja se ponekad naziva **sekvencijski uži izbor** ili **metoda alternativnoga prenosivog glasa**. Za korištenje ove metode pogledajte glasačke listiće i opetovano eliminirajte najmanje omiljeni izbor dok se ne pojavi jedan pobjednik koji ima apsolutnu većinu glasova. Ova metoda razlikuje se od procedure drugog kruga izbora po tome što stvarate nove postavke rasporeda svaki put kada se najmanje omiljeni odabir eliminira. Na satu fizike odlučeno je eksperimentirati sa sekvencijskim užim izborom. Gledajući raspored preferencija na ploči, moglo se vidjeti da je pizza sa šunkom imala najmanje glasova za prvo mjesto pa su je maknuli i dobili sljedeći raspored preferencija.

broj učenika s ovim rasporedom preferencija	8	5	6	7
	feferoni	vegeterijanska	vegeterijanska	kobasica
	vegeterijanska	kobasica	kobasica	vegeterijanska
	kobasica	feferoni	feferoni	feferoni

Sada pizza s feferonima ima 8 prvoplasiranih glasova, vegeterijanska pizza 11, a pizza s kobasicama 7. Budući da nijedna od te tri pizze nema apsolutnu većinu glasova (tj. 14 glasova), eliminira se pizza s kobasicama koja ima najmanji broj glasova (tj. 7 glasova) kako bi se dobio novi sljedeći raspored preferencija.

broj učenika s ovim rasporedom preferencija	8	5	6	7
	feferoni	vegeterijanska	vegeterijanska	vegeterijanska
	vegeterijanska	feferoni	feferoni	feferoni

Poslije provedenog kruga eliminacija, pobjednik je vegeterijanska pizza s 18 prvoplasiranih glasova (tj. s 5+6+7 = 18) prema 8 prvoplasiranih glasova za pizzu s feferonima.

Razmotrite ovo ...

3. Upotrijebite postupak Hareove eliminacije za određivanje ili pri određivanju pobjedničke pizze iz glasanja vašeg razreda održanog u Aktivnosti 2. Jeste li dobili isti rezultat kao u prvom užem izboru?

4. U svojoj grupi usporedite metodu relativne većine i postupak Hareove eliminacije. Odlučite koji biste postupak preporučili svojem razredu za primjenu na sljedećim izborima.

Sekvencijalni postupak po parovima

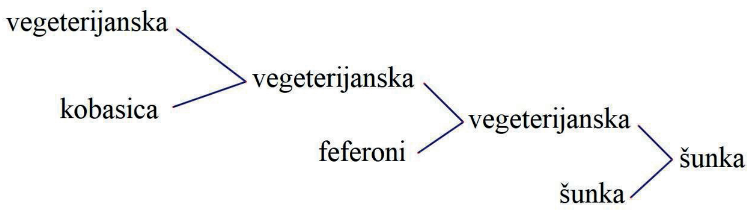
Druga varijanta postupka užeg izbora je **sekvencijalni postupak po parovima** (koji se još naziva **metodom uzastopnog glasanja po slučajnim parovima**).

Metoda se koristi u Zastupničkom domu SAD-a za glasovanje o različitim opcijama. U Domu se metoda naziva **parlamentarnom procedurom**. Prvo se razmatra jedan par opcija odluke i provodi se glasanje. Nakon toga se pobjednik uparuje s novom opcijom i ponovno se glasa. Ovaj postupak uparivanja i glasanja se nastavlja do odabira konačnog pobjednika.

U ovim krugovima glasanja zastupnici koriste različite mogućnosti za simulaciju izbora između nasumično odabranih parova kandidata. Nasumično se biraju dva kandidata i rasporedi preferencija koriste se za određivanje preferiranog kandidata. Pobjednik se zatim uparuje s drugim nasumično odabranim kandidatom. Postupak s uparivanjem dvoje kandidata i glasanje o njima nastavlja se dok se ne dobije pobjednik.

Kako bi se održalo uzastopno uparivanje, na satu fizike iz šešira se izvlače imena dviju vrsta pizze. To je **metoda uzastopnog glasanja po slučajnim parovima**. Prve dvije izvučene su vegeterijanska pizza i pizza s kobasicama. Razred prihvaća izvorni raspored preferencija i uzima u obzir samo odlučivanje učenika pri izboru između vege pizze i pizze s kobasicom. Vidi se da je 19 od 26 učenika radije biralo vegeterijansku pizzu nego pizzu s kobasicama. Zatim učenici iz šešira izvlače pizzu s feferonima. Dakle pizza s feferonima je par s vegeterijanskom pizzom. Iz rasporeda preferencija učenici vide da je 18 od 26 učenika preferiralo vegeterijansku pizzu a ne pizzu s feferonima. Zatim učenici uspoređuju pizzu sa šunkom i vegeterijansku pizzu. Vidi se da je 20 od 26 učenika za pizzu sa šunkom a ne za vegeterijansku pizzu, tako da je u uzastopnom nadmetanju po parovima pobjednik pizza sa šunkom.

Rezultat provedenog postupka moguće je prikazati slijedećim dijagramom.



Razmotrite ovo ...

5. Istražili ste tri različite procedure odlučivanja u drugom krugu izbora pri čemu su rezultati svaki puta bili drugačiji. Raspravite o tome u svojoj grupi primjenjujući sljedeća pitanja kao smjernice:

   - Koji od tri izborna postupka drugog kruga izbora preferirate? Zašto?
   - Kako odlučujete je li jedna metoda pravednija od druge?

- Koji biste postupak radije koristili za glasanje o pizzi u svom razredu?

6. Napišite nekoliko rečenica preporuke postupka koji bi vaš razred trebao koristiti pri izboru pizze. Obavezno opravdajte svoju preporuku.

Istražujte dalje

7. Ako postoji n kandidata u metodi uzastopnog glasanja po parovima, koliko bi ih se puta moralo upariti da bi se došlo do pobjednika?

8. Jacob je toliko oduševljen ponovnim izbornim postupkom pa predlaže da njegova obitelj glasa koji će film gledati s tjednog popisa serije *Four Star Video Classics*. Jacobovi se roditelji slažu pa svi skupa biraju izmedu četiri filma: *Ratovi zvijezda, Ples s vukovima, Zvuk glazbe* i *Ljepotica i zvijer*. Njihov raspored preferencija prikazan je tablicom.

Jacob	Majka	Otac
Ratovi zvijezda	Zvuk glazbe	Ples s vukovima
Ples s vukovima	Ratovi zvijezda	Ljepotica i zvijer
Ljepotica i zvijer	Ples s vukovima	Zvuk glazbe
Zvuk glazbe	Ljepotica i zvijer	Ratovi zvijezda

- Može li se primjenom ili korištenjem metode relativne većine dobiti pobjednik?
- Može li se dobiti pobjednik primjenom ili korištenjem standardne procedure užeg izbora? Objasnite!
- Može li se dobiti pobjednik primjenom ili korištenjem Hareove eliminacije? Objasnite!

9. Jacob i njegovi roditelji pokušavaju koristiti sekvencijski postupak uzastopnog glasanja po (slučajnim) parovima. Prvo izvlače *Ratove zvijezda* iz šešira, pa *Ples s vukovima*, pa *Zvuk glazbe* i konačno *Ljepoticu i zvijer*. Koji film pobjeđuje?

10. Jacobova se majka pita je li bitan redoslijed kojim su filmovi odabrani. Ponavljaju postupak. Ovaj put prvo iz šešira izvlače *Ljepoticu i zvijer*, zatim *Zvuk glazbe*, te *Ples s vukovima* i na kraju *Ratove zvijezda*. Koji film pobjeđuje? Je li bitan redoslijed?

11. Redoslijed sparivanja i glasanja između kandidata naziva se **dnevni red** ili **agenda**.
    - Možete li pronaći rezultat dnevnog reda koji rezultira pobjedom filma *Zvuk glazbe*?
    - Možete li pronaći rezultat dnevnog reda koji vodi do pobjede filma *Plesa s vukovima*?

Istraživanje

12. Osmislite ordinalni listić za anketu na temu po izboru. Prikupiti odgovore od 20 ili više ljudi. Razmotrite rezultate svoje ankete koristeći postupak užeg izbora.

    Svakako spremite glasačke listiće koje prikupite jer ćete ih možda htjeti upotrijebiti u kasnijoj aktivnosti.

    (Ako ste prikupili rezultate ankete u ranijoj aktivnosti, možete koristiti te glasačke listiće za ovo istraživačko pitanje.)

* * * * *

Kutak za učitelja

Učenicima će vjerojatno trebati više od jednog sata za završiti ovu aktivnost. Za provođenje ove aktivnosti potrebni su rezultati glasanja iz Aktivnosti 2.

Ova aktivnost opisuje tri izborna postupka užeg izbora. Kako bi naučili svaki postupak učenici trebaju analizirati iste rezultate glasanja obavljenih ordinalnim glasačkim listićima. Za izbor opisan u aktivnosti, svaki postupak daje drugačiji rezultat. Učenici aktivno rade u svojim grupama na primjeni izbornih postupaka iz podataka s vlastitih izbora za pizzu.

Na kraju aktivnosti neka grupe predstave svoje preporuke kojim se postupkom koristiti. Zamolite učenike da opišu što misle koje su prednosti, a koji nedostatci različitih metoda i koju metodu smatraju najpravednijom.

Odgovori
Razmotrite ovo ...

1. - 6. Odgovori će varirati.

Istražujte dalje

7. $n - 1$

8.
   - Ne. Postoji trostruko izjednačenje korištenjem metode relativne većine.
   - Ne. Korištenjem standardne procedure užeg izbora ne postoje dva jedinstvena najviša prva mjesta prikupljanja glasova.
   - Ne. Nakon što eliminirate *Ljepoticu i zvijer* nema jedinstvenog najnižeg broja glasova.

9. *Ljepotica i zvijer* pobjeđuje.

10. *Ratovi zvijezda* pobjeđuju. Da, redoslijed je bitan u sekvencijskom užem izboru u paru.

11. Postoji nekoliko mogućih agendi ili dnevnih redova. Za svaki slučaj daje se jedan dnevni red.

    Da bi *Zvuk glazbe* pobijedio, prvo odaberite *Ples s vukovima*, zatim *Ratove zvijezda*, potom *Ljepoticu i zvijer* te *Zvuk glazbe*.

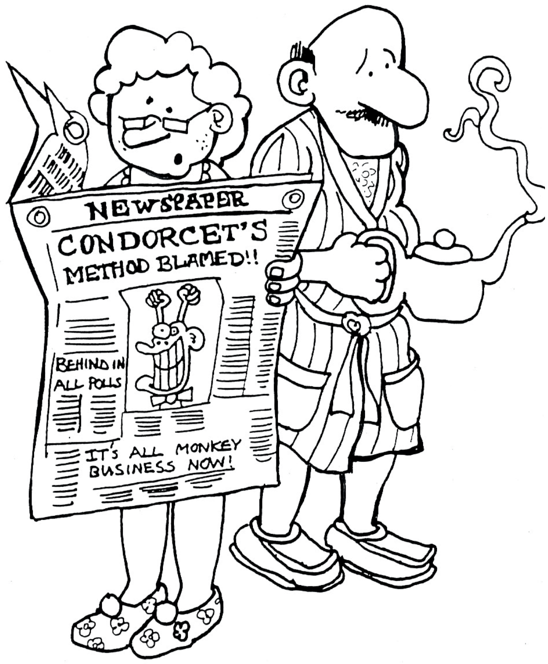
    Da bi pobjedio *Ples s vukovima*, prvo odaberite *Zvuk glazbe*, zatim *Ratove zvijezda*, potom *Ples s vukovima* te *Ljepoticu i zvijer*.

Istraživanje

12. Odgovori će varirati.

1.4. Aktivnost 4.: Condorcetov izborni postupak odlučivanja

U Aktivnosti 3. otkrili ste nedostatke nekih metoda glasanja. Kad su Jacob i njegova obitelj koristili postupak sekvencijskog užeg izbora u paru, utvrdili su da je dnevni red, a ne glasači, odredio konačnu odluku! To se zove **učinak agende/dnevnog reda**. Matematičari, politolozi i političari stoga su bili jako zainteresirani za pronalaženje postupaka glasanja koji ne će imati tzv. učinak agende.
Marquis de Condorcet, matematičar, filozof i politički analitičar, u osamnaestom stoljeću predložio je sljedeći izborni postupak odlučivanja:



Možeš li vjerovati? Čimpanza je Charlie pobijedio na izborima.

`Svaki par kandidata trebao bi biti razmatran u zasebnom izboru. Ako jedan kandidat izlazi kao pobjednik nad svim ostalim u odvojenim dvosmjernim[1] natjecanjima, onda je to kandidat koji je preferirani izbor birača.`

Na satu fizike odlučeno je ponovno ispitati njihove glasove o izboru pizza koristeći Condorcetov postupak. Rezultati njihovog izvornog glasanja prikazani su tablicom:

broj učenika s ovim rasporedom preferencija	8	5	6	7
	feferoni	šunka	vegeterijanska	kobasica
	šunka	vegeterijanska	šunka	šunka
	vegeterijanska	kobasica	kobasica	vegeterijanska
	kobasica	feferoni	feferoni	feferoni

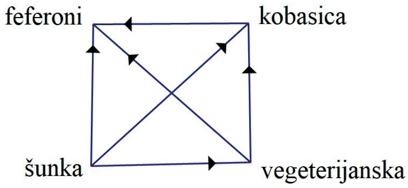
Kako bi koristili Condorcetov postupak, učenici moraju uzeti u obzir šest dvosmjernih natjecanja - feferoni protiv šunke, feferoni protiv vegeterijanske, feferoni protiv kobasice, šunka protiv vegeterijanske, šunka protiv kobasice i vegeterijanska protiv kobasice. Za svaki od navedenih natjecanja, učenici ispituju rasporede preferencija kako bi vidjeli koja je pizza pobjednička. Njihovi rezultati sažeti su u tablici.

[1]Kod svakog para se gleda koliko je puta jedna opcija pobijedila drugu u odnosu na broj puta koliko je druga pobijedila prvu.

feferoni protiv šunke	feferoni šunka	8 glasova 5 + 6 + 7 = 18 **glasova**
feferoni protiv vegeterijanske	feferoni vegeterijanska	8 glasova 5 + 6 + 7 = **18 glasova**
feferoni protiv kobasice	feferoni kobasica	8 glasova 5 + 6 + 7 = **18 glasova**
šunka protiv vegeterijanske	šunka vegeterijanska	8 + 5 + 7 = **20 glasova** 6 glasova
šunka protiv kobasice	šunka kobasica	8 + 5 + 6 = **19 glasova** 7 glasova
vegeterijanska protiv kobasice	vegeterijanska kobasica	8 + 5 + 6 = **19 glasova** 7 glasova

Budući da je pizza sa šunkom pobijedila svaku od ostale tri pizze u dvosmjernoj utrci, razred je proglašava pobjednicom.

Možete upotrijebiti sljedeći graf za ilustraciju. Ova vrsta grafa se također naziva **digraf**, skraćenica za "usmjereni graf". U našem slučaju još kažemo da smo nacrtali graf turnira za ilustraciju šest dvosmjernih natjecanja u ovom izboru pizze.



Strjelica ide od pobjednika prema poraženom. Ovaj graf možete koristiti za rangiranje četiriju kandidata računajući broj pobjeda koje svaka vrsta pizze ima.

U grafu možete vidjeti da pizza sa šunkom ima tri pobjede, a vegeterijanska pizza ima dvije; pizza s kobasicama ima jednu pobjedu, a pizza s feferonima niti jednu. Prikupljene informacije iz grafa prikažimo tablicom:

vrsta pizze	**broj pobjeda**
šunka	3
povrće	2
kobasica	1
feferoni	0

Razmotrite ovo ...

1. Mislite li da je Condorcetov postupak fer? Raspravite o tome u svojoj grupi koristeći sljedeća pitanja kao smjernice.

    - Kako biste ljubiteljima feferona objasnili da im je pizza, koja je na prvom mjestu prema metodi relativne većine, izgubila Condordetovom metodom?
    - Opišite neke od pozitivnih strana Condorcetovog postupka.
    - Opišite sve nedostatke Condorcetovog postupka.

2. Sa svojim razredom odaberite problem s četiriju izbora. Možete odabrati političke izbore, izbor mjesta za izlet ili izbor školske maskote, ili pak možete glasati o odabiru teme o kojoj ćete sljedeći put glasati! To odlučite korištenjem ordinalnih glasačkih listića.

    - Analizirajte rezultate koristeći Condorcetov izborni postupak. Koji je izbor pobijedio?

- Koristite graf za prikaz rezultata izbora.
- Što mislite, koliki je postotak vaših kolega iz razreda zadovoljan rezultatima izbora? Koliki je postotak nezadovoljnih?
- Koji bi izbor pobijedio da ste se koristili metodom relativne većine?
- Što vam se čini koji je od postupaka izbornih odluka koje ste do sada naučili najpošteniji?

Istražujte dalje

3. Razred je na satu geologije odlučio koristiti Condorcetov izborni postupak za određivanje rezultata glasanja o izletu. Njihovo glasanje prikazano je tablicom.

broj učenika s rasporedom preferencija	**7**	**4**	**8**	**5**	**6**
	Grand Canyon	Bryce Canyon	Death Valley	Death Valley	Grand Canyon
	Bryce Canyon	Grand Canyon	Bryce Canyon	Grand Canyon	Death Valley
	Death Valley	Death Valley	Grand Canyon	Bryce Canyon	Bryce Canyon

- Koristeći Condorcetov postupak, koja će opcija biti pobjednička?
- Koristite graf za prikaz rezultata glasanja. Napravite tablicu koja će pokazati koliko pobjeda svaki izbor ima.
- Neki od učenika žele isprobati postupak Hareove eliminacije. Koji bi bio pobjednik koristeći ovaj izborni postupak?
- Koju biste proceduru za izbor preporučili razredu na satu geologije? Zašto?

4. Na satu tjelesnog odgoja badmintonska skupina odlučila je održati turnir. Na ovome turniru svaki igrač igra protiv svakog drugog igrača jednom.
   - Ako u razredu ima 18 učenika, koliko bi dvoboja morali odigrati?
   - Koliko bi dvoboja morali odigrati da je bilo 100 učenika? n učenika?

5. Jacob je pokušao koristiti postupak užeg izbora u Aktivnosti 3. kako bi sa svojom obitelji odabrao film s *Four Star Video's Classics* tjedne liste. Budući da su drugi krugovi završili neriješeno a sekvencijski izbori u paru dali su različite rezultate ovisno o dnevnom redu, Jacob sada predlaže da njegova obitelj napiše svoj raspored preferencija kako bi odlučila koji će film gledati. Ovaj će put koristiti Condorcetov izborni postupak odlučivanja kako bi odredili rezultat. Jacobovi se roditelji slažu. Njihovi rasporedi preferencija prikazani su u tablici. Kakav je rezultat njihova glasanja Condorcetovom procedurom?

Jacob	**majka**	**otac**
Ratovi zvijezda	Zvuk glazbe	Ples s vukovima
Ples s vukovima	Ratovi zvijezda	Ljepotica i zvijer
Ljepotica i zvijer	Ples s vukovima	Zvuk glazbe
Zvuk glazbe	Ljepotica i zvijer	Ratovi zvijezda

6. Objasnite zašto Condorcetova metoda ne mijenja rezultat rasporeda.

7. U 3. pitanju otkrili ste da preferirani rasporedi za terensku nastavu geologije osiguravaju dobitnika prema Condorcetu. Objasnite zašto bilo koji redoslijed koji je odabran za metodu sekvencijskog uparivanja uvijek rezultira istim pobjednikom ako postoji pobjednik prema Condorcetu.

8. Odjel za društvene znanosti u Central City Highu održava natjecanje "Vaš glas se računa". Razredi su zamoljeni da predaju prijavu koja se odnosi na temu pa je tako razred na satu matematike gđe Pat Riot dostavio sljedeći poster koji sadrži probleme vezane uz glasanje. Pogledajte koliko problema možete riješiti.

m&n mozgalica s pizzama

A. Condorcetov postupak zahtijeva da postoje dvosmjerna natjecanja između svakog para kandidata. Koliko dvosmjernih natjecanja ima u izboru između pet, šest i n pizza?

B. Koji je najveći broj pobjeda koje pizza može imati u izboru dvosmjernog natjecanja s n pizze? Istražite.

C. Koji je najmanji broj pobjeda koje pizza može imati u dvosmjernom izbornom natjecanju primjenom Condorcetove procedure odlučivanja u izboru s n kandidata? Istražite.

D. Koliki je najveći broj pobjednika u dvosmjernom natjecanju s n pizza? Istražite.

Istraživanje

9. Napiši kratku biografiju markiza de Condorceta.

10. Osmislite ordinalni listić za anketu na temu po izboru. Prikupite odgovore od 20 ili više ljudi. Sažmite rezultate svoje ankete koristeći Condorcetov postupak za izbornu odluku. Obavezno spremite glasačke listiće koje ste prikupili jer ih možda želite iskoristiti u kasnijoj aktivnosti. (Ako ste prikupili rezultate ankete u ranijoj aktivnosti, možete koristiti glasačke listiće za ovo istraživačko pitanje.)

* * * * *

Kutak za učitelja

Učenici bi mogli istražiti alternativni izborni postupak u svakom užem izbornom postupku u Aktivnosti 3. koji je dao drugačiji rezultat.

Ova aktivnost uključuje kratko izlaganje **grafovima**. Graf je konačan, neprazan skup točaka, zvanih vrhovima, zajedno s nekim usmjerenim bridovima koji spajaju parove tih točaka. Ovi usmjereni bridovi podliježu jednom ograničenju: početni i krajnji vrhovi ne mogu biti isti. Digrafovi se koriste u diskretnoj matematici. Oni se mogu koristiti za predstavljanje mreža jednosmjernih ulica, hijerarhijskih odnosa, rodoslovnog stabla i logičkih veza među objektima.

Condorcetova metoda dovodi do zanimljivih problema, kao i Bordina procedura, koja je predstavljena u Aktivnosti 5. Ovi problemi su prikazani u pitanju 8. Dokazi za mozgalice su uključeni u odgovore. Neki od vaših učenika bi mogli ponuditi dokaze iako aktivnost to od njih ne traži. Možda biste trebali zamoliti učenike da samostalno smisle druge mozgalice.

Pitanje 4. u *Istraži dalje* uključuje generiranje formule za zbroj brojeva od 1 do n. Ako vaši učenici ranije nisu bili upoznati s ovim, to može biti zabavna tema. Priča, koja je samo mit, tvrdi da se Gauss kao dječak nije dobro ponašao na satu matematike. Za kaznu mu je učitelj rekao da izračuna zbroj brojeva od 1 do 100. Gauss je brzo odgovorio da je zbroj 5050. Učitelj je tada tražio zbroj od 1 do 1000, a Gauss je odgovorio da je zbroj 500 500. Navodno učitelj nije bio zadovoljan Gaussovom preranom zrelošću! Gauss je upotrijebio "trik" jer je vidio da je zbroj brojeva od 1 do n jednak $\frac{n(n+1)}{2}$. Primjere Gaussove metode možete pronaći u mnogima standardnim udžbenicima algebre.

Odgovori

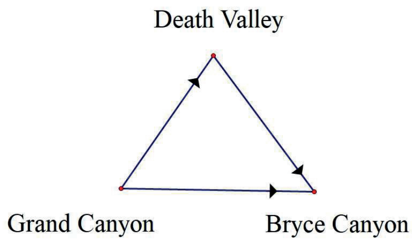
Razmotrite ovo ...

1. Odgovori će varirati.
2. Odgovori će varirati.

Istražujte dalje

3.
   - Grand Canyon bit će pobjednik ako se koristi Condorcetova metoda.
   - Graf bi trebao izgledati kao ovaj slici desno. Tablica predstavlja informacije iz grafa.

Grand Canyon	2
Death Valley	1
Bryce Canyon	0



   - Grand Canyon bio bi pobjednik korištenjem postupka Hareove eliminacije (tj. sekvencijskog drugog kruga).
   - Odgovori će se razlikovati.

4. S 18 učenika bit će 153 dvoboja. Sa 100 učenika bit će 4 950 dvoboja. S n učenika bit će $\frac{n(n-1)}{2}$ dvoboja.
5. Nema pobjednika. Nijedan od filmova ne pobjeđuje sve ostale u šest dvosmjernih natjecanja.
6. Učinak dnevnog reda postoji samo ako nema Condorcetova pobjednika.
7. Ako je kandidat Condorcetov pobjednik, onda može pobijediti svakog drugog kandidata u zasebnom dvosmjernom natjecanju. Za održavanje sekvencijskog užeg izbora, bez obzira na odabrani dnevni red, Condorcetov pobjednik u jednom će trenutku biti uparen s drugim kandidatom u dvosmjernom izboru natjecanja. Svaki put kad se to dogodi, Condorcetov pobjednik će pobijediti u dvosmjernom natjecanju, čime je pobijedio u sekvencijskom užem izboru po parovima.
8. A. S pet pizza ima $4+3+2+1=10$ natjecanja parova. Sa šest pizza ima 15 natjecanja parova. S n pizza ima $\frac{n(n-1)}{2}$ pobjednika.
   Dokaz: `Svaki kandidat sudjeluje u` $n-1$ `dvosmjernom natjecanju. Umnožak` $n(n-1)$ `računa da se svaki natječe dva puta, tako da je ukupan broj dvosmjernih natjecanja dan s` $\frac{n(n-1)}{2}$.

B. Maksimalan broj pobjeda koje pizza može imati u izboru metode dvosmjernog natjecanja n pizza je $n-1$.

Dokaz: Kandidat će dobiti maksimalan broj pobjeda kada pobijedi u svakom dvosmjernom natjecanju u kojem sudjeluje. Budući da je svaki kandidat u $n-1$ natjecanju, $n-1$ je maksimalan broj pobjeda. Imajte na umu da samo jedan kandidat može imati ovaj najveći broj pobjeda.
Drugi kandidati morali su izgubiti od njega, stoga njihov broj pobjeda ne može biti $n-1$.

C. Najmanji broj pobjeda u izboru dvosmjernog natjecanja je 0.

Dokaz: Kandidat će imati minimalni rezultat ako izgubi sva svoja dvosmjerna natjecanja. Imajte na umu da samo jedan kandidat može imati ovaj minimum zato što su ga svi ostali kandidati morali pobijediti, stoga ni njihovi rezultati također ne mogu biti nula.

D. Minimalni broj pobjeda korištenjem Condorcetove izborne procedure je $\frac{(n-1)}{2}$.

Dokaz: Pretpostavimo da pobjednik pobjeđuje u w dvosmjernih nadmetanja. Budući da postoji ukupno $\frac{n(n-1)}{2}$ natjecanja, ostali kandidati mogu osvojiti ukupno $\frac{n(n-1)}{2} - w$ natjecanja. Svaki od ostalih kandidata ne može osvojiti više od w natjecanja, tako da njihov ukupan zbroj mora biti manji od $(n-1)w$. To dovodi do nejednakosti $(n-1)w \geq \frac{n(n-1)}{2} - w$, koja se može pojednostavniti na $w \geq \frac{(n-1)}{2}$.

- Ako je n neparan, može biti n pobjednika. Ako je n paran, može ih biti najviše $n-1$ pobjednik.

Dokaz: Ako postoji Condorcetov pobjednik, onda je on ostvario najveći broj pobjeda u dvosmjernim natjecanjima, koji je veći od broja pobjeda bilo kojeg drugog od ostalih kandidata.

U mozgalici 8.A. otkrili ste da postoji $\frac{n(n-1)}{2}$ natjecanja u kojima se može pobijediti. Prosječni rezultat po kandidatu može se dobiti dijeljenjem ukupnog broja mogućih pobjeda brojem kandidata i iznosi $a = \frac{(n-1)}{2}$.

• Ako je n neparan, onda je a cijeli broj, stoga je moguće da svih n kandidata ima isti rezultat. Ako je n paran, tada a ne može biti cijeli broj pa svih n kandidata ne može imati isti rezultat. Međutim, ako je rezultat jednog kandidata nula, tada je moguće da su ostali $(n-1)$ kandidati izjednačeni, s istim rezultatom od $\frac{n}{2}$. Imajte na umu da je u ovom slučaju $\frac{n}{2}$ cijeli broj jer je n paran.[2]

Istraživanje

9. Condorcetovo puno ime bilo je **Marie-Jean-Antoine-Nicolas Caritat de Condorcet** (1743. - 1794.). U drugoj polovici 18. stoljeća nastalo je nekoliko novih grana matematike koje su dovele do kompliciranih problema za koje nisu bila pronađena opća rješenja. Istaknuti matematičari kao što su Euler i Lagrange vjerovali su da je matematika iscrpila gotovo svoje ideje te nisu vidjeli nove velike umove na obzoru. Condorcet je bio optimističniji. Vjerovao

[2] T. Marošević - primjer: za paran broj $n = 4$ kandidata A, B, C, D i $m = 4$ glasača, glasovi $ABCD, BCDA, CDAB, DABC$ daju neriješen rezultat, pa nema Condorcetovog pobjednika, odnosno svi su kandidati izjednačeni.

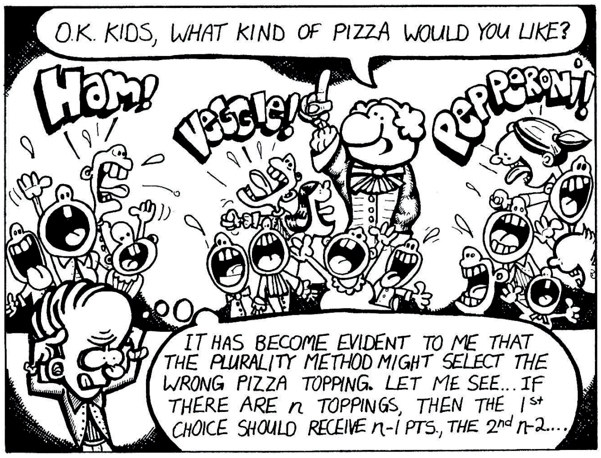
je da primjena i teorija funkcioniraju zajedno, jedna nadahnjujući drugu, i predvidio je da je matematika tek na početku ostvarivanja svojih obećanja.

Condorcet je također bio u odboru Francuske akademije znanosti, koja je utemeljila metrički sustav.

10. Odgovori će varirati.

1.5. Aktivnost 5.: Bordin izborni postupak odlučivanja

Jean-Charles Borda, francuski matematičar, rođen je u Daxu 4. svibnja 1733. Borda je bio glavni inženjer u francuskoj mornarici. Bavio se problemima koji su se odnosili na izračunavanje vjerojatnosti, diferencijalnih jednadžbi itd. Sudjelovao je u američkoj revoluciji kao i u mnogim znanstvenim putovanjima. Osim toga, radio je i na mehanici fluida i razvoju instrumenata. Bio je jedan od prvih koji je razvio matematičku teoriju o izborima.



Budući da je bio deseto od šesnaestero djece, Borda je imao mnogo prakse u usavršavanju svog postupka glasanja.

Bio je zabrinut zbog toga što bi metodom relativne većine izbora mogao pobijediti pogrješan kandidat. Predložio je alternativu Condorcetovoj proceduri izborne odluke koju je on nazvao "metodom označavanja". Borda je predložio da se svakom kandidatu daju "ocjene" ili "bodovi" na temelju toga koliko je dobro prošao u svakom od rasporeda preferencija. Na izborima između n kandidata, pobjednik svakog natjecanja dobiva $n-1$ bod za prvo mjesto. Drugoplasirani kandidat dobiva $n-2$ boda, trećeplasirani dobiva $n-3$ boda i tako dalje do posljednjeplasiranog kandidata koji dobiva 0 bodova.

Na satu fizike odlučeno je isprobati Bordin postupak na izboru pizze. Izbor je bio između četiri kandidata, tako da za svaku preferenciju prvoplasirana pizza dobiva 3 boda, drugoplasirana 2 boda, trećeplasirana 1 bod, a posljednje plasirana pizza 0 bodova.

broj učenika s ovim rasporedom preferencija	8	5	6	7
3	feferoni	šunka	vegeterijanska	kobasica
2	šunka	vegeterijanska	šunka	šunka
1	vegeterijanska	kobasica	kobasica	vegeterijanska
0	kobasica	feferoni	feferoni	feferoni

Dakle, feferoni su bili prvi preferencijski izbor za osam učenika i svaki je dobio po 3 boda. Bili su četvrti izbor za pet učenika sa svojim preferencijskim rasporedom, četvrti izbor za šest učenika s drugačijim rasporedom preferencija, te također četvrti izbor za još sedam učenika s još jednim preferencijskim rasporedom. Prema tome, pizza s feferonima ima ukupno 24 boda.

Broj glasova za pizzu s feferonima: $8 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 24$

Ostale tri pizze dobivaju bodove istim postupkom:

Broj glasova za pizzu sa šunkom: $8 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 2 = 57$

Broj glasova za vegeterijansku pizzu: $8 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = 43$

Broj glasova za pizzu s kobasicama: $8 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 3 = 32$

Budući da pizza sa šunkom ima najviše bodova, na satu fizike još jednom je proglašena pobjednikom. Izbori se mogu poredati od visokog prema niskom, koristeći "Bordine brojeve": šunka, vege, kobasica i feferoni. U ovom slučaju, poredak je isti kao i rangiranje postignuto Condorcetovom procedurom.

Razmotrite ovo . . .

Profesor matematike vašemu je razredu ponudio priliku da odabere jedan dan u tjednu u kojemu ne će zadavati zadaću, ako se svi mogu dogovoriti koji bi to bio dan. Predloženi su ponedjeljak, utorak, srijeda ili četvrtak. Glasujte u razredu za slobodan dan primjenjujući orinalne glasačke listiće i koristeći Bordin postupak izbornog odlučivanja za određivanje rezultata.

1. U grupama raspravite rezultate glasanja. Koristite sljedeća pitanja kao smjernice.
   - Jeste li bili zadovoljni rezultatima glasanja? Objasnite!
   - Objasnite zašto mislite da je Bordin postupak fer ili nije.
   - Na koji se način Bordin postupak čini boljim ili lošijim od Condorcetova postupka?
   - Kako se rezultati primjenom Condorcetove metode mogu usporediti s rezultatima primjenom relativne većine?
   - Koju biste proceduru preporučili sljedeći put kada vaš razred bude glasao? Zašto?

Istražujte dalje

2. U Aktivnostima 3. i 4., Jacob i njegova obitelj pokušali su koristiti proceduru užeg izbora i Condorcetov izborni postupak odlučivanja kako bi pošteno odredili koji će film gledati. Kakav je rezultat obiteljskog glasanja Bordinom procedurom? Daje li postupak poredak i pobjednika?

Jacob	majka	otac
Ratovi zvijezda	Zvuk glazbe	Ples s vukovima
Ples s vukovima	Ratovi zvijezda	Ljepotica i zvijer
Ljepotica i zvijer	Ples s vukovima	Zvuk glazbe
Zvuk glazbe	Ljepotica i zvijer	Ratovi zvijezda

3. Na satu matematike gospođe Pat Riot odlučeno je da su mozgalice m i n pizze toliko zabavne da su ih smislili još nekoliko!

Još m&n mozgalica s pizzama

A. Koliki najveći broj bodova može imati Bordin pobjednik u izboru s n pizza i m glasača? Istražite.

B. Koliki je zbroj svih Bordinih bodova za n pizza i m glasača? Istražite.

C. Koliki je minimalni broj bodova koji Bordin pobjednik može imati s n pizza i m glasača? Istražite.

D. Koliki minimalni broj bodova može imati pizza Bordinog kandidata s n pizza i m birača? Može li više od jednog kandidata imati ovaj minimalni rezultat? Istražite.

E. Koliki je najveći broj Bordinih pobjednika na izborima s n kandidata i m glasača? Istražite.

4. Pretpostavimo ste da umjesto korištenja $n-1$ bodova za prvo mjesto na izborima s n kandidata, $n-2$ za drugo mjesto i tako dalje upotrijebili p bodova za prvo mjesto, q bodova za drugo mjesto, r za treće mjesto i tako dalje, gdje je $p > q > r > \ldots$. Hoće li se relativna rang lista kandidata mijenjati ili će uvijek ostati ista? Istražite.

Istraživanje pomoću kalkulatora

5. Ako vaš kalkulator može raditi s matričnim operacijama, onda možete jednostavno izračunati ukupne glasove za Bordin postupak izborne odluke. Spremite Bordine bodove rasporeda u matricu A i učestalost svakog rasporeda u matricu B. Upisali biste raspored preferiranja pizze i učestalosti u matricama poput onih prikazanih u nastavku. Svaki vodoravni red u matrici A predstavlja bodovnu vrijednost za jednu vrstu pizze. Vidi tablicu na stranici 26.

$$\begin{array}{c} \text{feferoni} \\ \text{šunka} \\ \text{vegeterijanska} \\ \text{kobasica} \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 57 \\ 43 \\ 32 \end{bmatrix}$$

Budite sigurni da razumijete zašto su brojevi raspoređeni onako kako jesu u matricama, a zatim provjerite daje li umnožak tih matrica točan rezultat. Koristite ovu metodu za istraživanje mogućih rezultata u pitanju 4.

Istraživanje

6. Osmislite ordinalni listić za anketu na temu po izboru. Prikupite odgovore od 20 ili više ljudi. Sažmite rezultate svoje ankete koristeći Bordin postupak za izbornu odluku. Obavezno spremite glasačke listiće koje ste prikupili jer ćete ih možda htjeti iskoristiti u kasnijoj aktivnosti. (Ako ste prikupili rezultate ankete u ranijoj aktivnosti, možete koristiti glasačke listiće za ovo istraživačko pitanje.)

* * * * *

Kutak za učitelja

U Francuskoj je krajem 18. stoljeća postojala težnja za primjenom strogih metoda i matematičke misli u društvenim znanostima. Neki od uspješnijih pokušaja na području političkih znanosti učinili su tri francuska akademika: Borda, Condorcet i Laplace. Njihovi su se doprinosi izgubili sljedeća dva stoljeća, ali nakon što su ponovno otkriveni 1950-ih, sada imaju važnu ulogu u literaturi o javnim izborima.

Jean-Charles Borda, osim doprinosa matematici glasanja, bio je briljantan fizičar. Njegov najvažniji rad bio je onaj o mehanici fluida, a dao je i važan doprinos u primjeni instrumenata za navigaciju, geodeziju i određivanju utega i mjera.

Bordin postupak izbornog odlučivanja varijacija je Condorcetovog postupka koji uključuje dodjelu bodova za svakog kandidata na temelju toga koliko je dobro prošao u svakom dvosmjernom natjecanju. Bordin postupak dovodi do nekih zanimljivih problema, koji su predstavljeni u pitanju 3. Dokazi mozgalica su uključeni u rješenja. Možda će neki od vaših učenika moći provesti dokaz, iako aktivnost to od njih ne traži, a možda će i biti potaknuti da sami smišljaju druge mozgalice.

Odgovori

Razmotrite ovo ...

1. Odgovori mogu varirati. Rezultati primjenom Condorcetove metode mogu biti različiti od rezultata korištenjem relativne većine.

Istražujte dalje

2. Koristeći Bordin postupak, film *Ples s vukovima* pobjeđuje sa 6 bodova. Film *Ratovi zvijezda* dobiva 5 bodova, *Zvuk glazbe* 4 boda, a *Ljepotica i zvijer* 3 boda.

3. A. Maksimalan broj bodova je $(n-1)m$.

   Dokaz: Kandidat bi imao maksimalni Bordin rezultat ako je najbolje rangiran u svakom od rasporeda preferencija. U ovom slučaju postoji m birača od kojih svaki kandidatu daje $n-1$ bodova.

   Imajte na umu da samo jedan kandidat može imati ovaj rezultat, jer su ostali kandidati morali biti niže rangirani, stoga njihov rezultat ne može biti $(n-1)m$.

   B. Zbroj je $\dfrac{mn(n-1)}{2}$.

   Dokaz: Zbroj svih Bordinih rezultata dan je prema

$$m(n-1)+m(n-2)\cdots+m(2)+m(1)+m(0),$$

   a odavde je

$$m((n-1)+(n-2)+\cdots+2+1+0)=\frac{mn(n-1)}{2}.$$

   C. Minimalni broj bodova je veći od $\dfrac{m(n-1)}{2}$.

   Dokaz: Pretpostavimo da postoji jedan pobjednik čiji je rezultat w. U mozgalici B otkrili ste da je zbroj svih bodova svih kandidata jednak $\dfrac{mn(n-1)}{2}$. Dakle, zbroj bodova kandidata koji nisu pobjedili je

$$\frac{mn(n-1)}{2}-w.$$

   Budući da pobjednik ima w bodova, rezultat svakog drugog $(n-1)$ kandidata manji je od w. Prema tome,

$$(n-1)w>\frac{mn(n-1)}{2}-w,$$

   a odavde je

$$w>\frac{m(n-1)}{2}.$$

   D. Minimalni rezultat je 0.

   Dokaz: Kandidat bi imao najmanji rezultat ako ga svih m birača rangira najniže. Budući da za najniži rang vrijedi nula Bordinih bodova, minimalni rezultat je $0\cdot m=0$. Imajte na umu da samo jedna osoba može imati ovaj rezultat, jer su ostali kandidati morali biti bolje rangirani, stoga njihov rezultat ne može biti nula.

   E. Ako je m paran ili n neparan, može biti n pobjednika. Ako je m neparan, a n paran, može biti najviše $n-1$ pobjednik.

   Dokaz: U gornjoj mozgalici B otkrili ste da je zbroj svih Bordinih rezultata $\dfrac{mn(n-1)}{2}$. Prosječna ocjena po kandidatu stoga je $A=\dfrac{m(n-1)}{2}$. Ako je m paran ili n neparan, onda je A cijeli broj, stoga je moguće da svih n kandidata imaju isti rezultat A.

4. Ljestvice nisu nužno uvijek iste. Razmotrite rasporede preferencija iz gore navedenog glasanja za pizzu na satu fizike. Ako prvoplasirana pozicija dobiva 100 bodova, drugo mjesto 3 boda, treće mjesto 2 boda i četvrto mjesto 1 bod, tada je rezultatski poredak sljedeći:

broj učenika s ovim rasporedom preferencija	8	5	6	7
100	feferoni	šunka	vegeterijanska	kobasica
3	šunka	vegeterijanska	šunka	šunka
2	vegeterijanska	kobasica	kobasica	vegeterijanska
1	kobasica	feferoni	feferoni	feferoni

Izbor je bio između četiri kandidata, tako da za svaku preferenciju prvoplasirana pizza dobiva 100 bodova, drugoplasirana 3 boda, trećeplasirana 2 boda, a posljednje plasirana pizza 1 bod.

Račun nam pokazuje sljedeće:

feferoni: $8 \cdot 100 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 818$
šunka: $8 \cdot 3 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 3 = 563$
vegeterijanska: $8 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 2 = 645$
kobasica: $8 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 100 = 730$

Matrični račun daje sljedeću infrormaciju:

$$\begin{array}{r} \text{feferoni} \\ \text{šunka} \\ \text{vege} \\ \text{kobasica} \end{array} \begin{bmatrix} 100 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 100 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 100 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 100 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 818 \\ 563 \\ 645 \\ 730 \end{bmatrix}$$

Primjenom ovog bodovnog sustav, dobija se potpuno drugačiji pobjednik. Poredak je drukčiji od izvornog Bordinog. Ovo je zapravo poredak relativne većine, što se uvijek može postići dodjeljivanjem dovoljno bodova prvoplasiranoj poziciji.

Istraživanje pomoću kalkulatora

5. Dobivena bi matrica trebala biti $\begin{bmatrix} 24 \\ 57 \\ 43 \\ 32 \end{bmatrix}$ (vidi stranicu 28.).

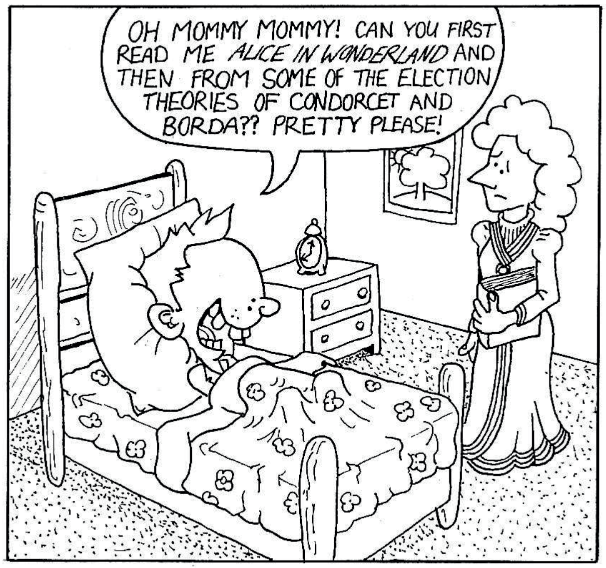
Ostali odgovori će varirati.

Istraživanje

6. Odgovori će varirati.

1.6. Aktivnost 6.: Blackov izborni postupak odlučivanja

Aktivnostima 4. i 5. uveden je postupak određivanja pobjednika izbora prema markizu de Condorcetu i Jeanu-Charlesu Bordi. Ove dvije metode često daju slične rezultate. Ali kako odrediti pobjednika ako su rezultati drugačiji? Condorcet i Borda vodili su mnoge rasprave, često i žestoke, o tome koja od njihovih metoda daje najbolji rezultat. Matematičar C. L. Dodgson, koji je bio autor bajke *Alice u zemlji čudesa* napisane pod pseudonimom Lewis Carroll, također je bio zainteresiran za teoriju izbora, posebno za paradokse.



Omiljene priče za laku noć malog Duncana Blacka.

Proučavao je i pisao o Condorcetovoj i Bordinoj metodi. Duncan Black, engleski politolog rođen 1908. u Motherwellu u Škotskoj, ponovno je otkrio djela Condorceta, Borde i Dodgsona. Njegov rad temelj je većine kasnijih istraživanja postupaka izbornih odluka. Black je 1958. godine napisao ključnu knjigu *Teoriju odbora i izbora*, kao i Dodgsonov životopis.

Razmotrite ovo . . .

1. Odbor trgovina mješovitom robom pokušava se odlučiti između triju različitih dobavljača organskih proizvoda. Dobavljači se razlikuju po cijeni i kvaliteti njihovih proizvoda i po tome u kojoj su mjeri njihovi proizvodi organski. Odbor je odlučio da je iz financijskih razloga važno držati se jednog dobavljača.

Tri dobavljača su Alpha Organics, Best Veggies i Fine Fodder. Peteročlani odbor je odlučio tajno glasati ordinalnim glasačkim listićima. Rezultati njihova glasanja su prikazani tablicom.

3	2
Alpha Organics	Best Veggies
Best Veggies	Fine Fodder
Fine Fodder	Alpha Organics

- Upotrijebite raspored preferencija kako biste pronašli pobjednika koristeći Condorcetov postupak.

- Upotrijebite rasporede preferencija za određivanje pobjednika koristeći Bordin postupak.

- Usporedite rezultate Condorcetovog i Bordinog postupka. Razgovarajte sa svojom grupom kako odboru pomoći donijeti odluku.

`Black je predložio usklađivanje metoda Condorceta i Borde na sljedeći način:`

Ako postoji Condorcetov pobjednik, odaberite njega. Ako nema Condorcetovog pobjednika, odaberite Bordinog pobjednika.

U slučaju trgovina mješovitom robom za dobavljača bi bila izabrana Alpha Organics.

Drugo rješenje, koje je 1907. godine predložio Australac E. J. Nanson, jest korištenje metode pod nazivom "Bordina eliminacija". Prvo izračunajte Bordine bodove. Zatim uklonite kandidata s najmanjim Bordinim brojem i ponovno izračunajte Bordine bodove. Nastavite s ovim postupkom dok se ne odredi pobjednik. U prethodnom primjeru, nakon prvog kola Alpha Organics ima 6 bodova, Best Veggies ima 7 bodova, a Fine Fodder ima 2 boda. Eliminirajte Fine Fodder jer je dobio najmanje Bordinih bodova. Rasporedi preferencije sad izgledaju ovako:

3	2
Alpha Organics	Best Veggies
Best Veggies	Alpha Organics

Ponovno izračunajte Bordine bodove. Alpha Organics sada ima 3 boda, a Best Veggies 2 boda. Dakle, Alpha Organics pobjeđuje. U ovom primjeru, Bordina eliminacija daje iste rezultate kao Condorcetova metoda.

2. Seniorski orkestar u Central City Highu planira događaj za proslavu pobjede na Državnom natjecanju. Predložene su tri mogućnosti: izlet u lokalni zabavni park, cjelonoćni ples i izlet na koncert u grad. Utvrdili su da će svaki od tri izbora koštati otprilike isto, pa su odlučili glasati. Njihovi glasovi prikazani su u rasporedima preferencija u tablici.

8	11	12	20	16
zabavni park	koncert	koncert	zabavni park	ples
ples	zabavni park	ples	koncert	zabavni park
koncert	ples	zabavni park	ples	koncert

- Koristite Bordinu eliminaciju za odrediti pobjednički izbor.
- Uporabite Blackov prijedlog za određivanje pobjednika.

3. Usporedite rezultate dobivene korištenjem svake od četiri metode (Condorcetove, Bordine, Blackove i Bordine eliminacije) s rasporedima preferencija u primjeru i onima u pitanju 1. Pokušajte generalizirati kada će ove metode dati isti rezultat. U slučaju kada metode ne daju isti rezultat, koja se metoda čini najpoštenijom?

Istražujte dalje

4. Ultimate Frisbee je sve veći sport u Central City High. The Ultimate Club je sponzor vikend događaju, a svaki sudionik će dobiti majicu. Klub je odlučio da sudionici glasaju o boji majice. Članovi kluba prikupili su glasačke listiće i tabelirali ih. Rezultati su prikazani u rasporedima preferencija u tablici.

12	7	20	18	23	25
bijela	bijela	žuta	ljubičasta	plava	zelena
ljubičasta	plava	ljubičasta	žuta	ljubičasta	plava
žuta	ljubičasta	zelena	plava	žuta	bijela
zelena	žuta	bijela	bijela	zelena	ljubičasta
plava	zelena	plava	zelena	bijela	žuta

- Odredite pobjednika izbora metodom relativne većine. Da biste to učinili, razmotrite samo prvoplasirane glasove.
- Koliki je postotak glasova prvoplasiranih dobio pobjednik?
- Koristite Blackovu metodu za određivanje pobjedničke boje majice. Postoji li Condorcetov pobjednik?
- Koristite Bordinu eliminaciju za određivanje pobjedničke boje majice.

5. The Ultimate Club odlučio je osigurati nekoliko sati zabave tijekom vikenda. Klub je suzio mogućnosti na četiri mogućnosti: frizbi pseći trikovi, filmski isječci izvrsnih igrica, koncert na otvorenom i demonstracija posebne tehnike frizbija. Članovi kluba glasali su ordinalnim glasačkim listićima. Dolje prikazani raspored preferencija daje rezultate njihova glasanja.

8	3	14	13	6
pseći trikovi	pseći trikovi	filmski isječci	koncert na otvorenom	posebne tehnike
filmski isječci	posebne tehnike	koncert na otvorenom	pseći trikovi	filmski isječci
koncert na otvorenom	koncert na otvorenom	pseći trikovi	posebne tehnike	pseći trikovi
posebne tehnike	filmski isječci	posebne tehnike	filmski isječci	koncert na otvorenom

- Koristite Blackovu metodu za određivanje pobjednika. Postoji li Condorcetov pobjednik?
- Koristite Bordinu eliminaciju za određivanje pobjednika. Ako imate kalkulator koji se može programirati, možete koristiti matrice za izračune u svakoj fazi.
- Usporedite rezultate korištenjem Blackove metode i Bordine eliminacije. Kakav biste izbor preporučili Ultimate Clubu?

6. Postoji poučak koji kaže da ako postoji Condorcetov pobjednik, onda će ga Bordina eliminacija uvijek izabrati. Objasnite zašto je to tako.

Istraživanje

7. Osmislite ordinalni listić za anketu na temu izbora. Prikupiti odgovore od 20 ili više ljudi. (Ako ste proveli anketu u prethodnoj aktivnosti, možete uporabiti te rezultate za ovu aktivnost.) Analizirajte rezultate svoje ankete koristeći Blackove i Nansonove prijedloge. Omogućuju li oba postupka iste rezultate? Ako ne, koji rezultat točnije odražava rezultate vaše ankete?

* * * * *

Kutak za učitelja

Duncan Black studirao je na Sveučilištu u Glasgowu i proveo većinu svoje nastavničke karijere na Sveučilišnom koledžu Sjevernog Walesa u Bangoru. 40-tih godina 20. stoljeća dao je doprinos ideji kojom se smatralo da politička znanost treba biti na istoj teorijskoj osnovi kao i ekonomija.

Potaknite svoje učenike da koriste matrice za izračunavanje Bordinih rezultata u Bordinoj metodi i u Bordinoj eliminaciji. Učenicima bi moglo biti od pomoći prvo napisati matrice, zatim brojeve unijeti u kalkulator.

Odgovori

Razmotrite ovo . . .

1.
   - Koristeći Condorcetov postupak, Alpha Organics pobjeđuje u svakom dvosmjernom natjecanju. Dakle, pobjednik je.
   - Koristeći Bordinu metodu, svaki dobavljač dobiva sljedeći Bordin rezultat:

     Alpha Organics: $3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6$,

     Best Weggies: $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$,

     Fina Fodder: $3 \cdot 0 + 2(\cdot 1 = 2$.

     Koristeći Bordinu metodu Best Veggies je pobjednik.
   - Odgovori će se razlikovati.

2.
   - Koristeći Bordinu eliminaciju, zabavni park pobjeđuje.
   - Koristeći Blackovu metodu, zabavni park je Condorcetov pobjednik.

3. Za pitanje 1., pobjednici su:

   Alpha Organics (Condorcet)

   Best Veggies (Borda)

   Alpha Organics (Black)

   Alpha Organics (Bordina eliminacija)

   Za pitanje 2., zabavni park pobjeđuje bilo kojom metodom. Ostali odgovori će varirati.

Istražujte dalje

4.
   - Zelena boja pobjeđuje metodom relativne većine.
   - Pobjednik je dobio 23,8% glasova za prvo mjesto.
   - Ljubičasta boja pobjeđuje Blackovom metodom. Ne postoji Condorcetov pobjednik.
   - Plava boja pobjeđuje korištenjem Bordine eliminacije.

5.
   - Koristeći Blackovu metodu, opcija pseći trikovi će pobijediti. Ne postoji Condorcetov pobjednik, a opcija s psećim trikovima pobjeđuje korištenjem Bordine metode.
   - Koristeći Bordinu eliminaciju, opcija filmskih isječaka pobjeđuje. Korištenje matrica proces izgleda ovako:

   pseći trikovi . . . 3 boda, filmski isječci . . . 2 boda, koncert na otvorenom . . . 1 bod i posebne tehnike . . . 0 bodova.

8	3	14	13	6
pseći trikovi	pseći trikovi	filmski isječci	koncert na otvorenom	posebne tehnike
filmski isječci	posebne tehnike	koncert na otvorenom	pseći trikovi	filmski isječci
koncert na otvorenom	koncert na otvorenom	pseći trikovi	posebne tehnike	pseći trikovi
posebne tehnike	filmski isječci	posebne tehnike	filmski isječci	koncert na otvorenom

$$\text{Prva runda: } \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 14 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 79 \\ 70 \\ 78 \\ 37 \end{bmatrix}$$

U ovom krugu opcija posebne tehnike ima najmanje bodova i ispada.

Druga runda:

Druga runda je s bodovima pseći trikovi . . . 2 boda, filmski isječci . . . 1 bod i koncert na otvorenom . . . 0 bodova.

8	3	14	13	6
pseći trikovi	pseći trikovi	filmski isječci	koncert na otvorenom	filmski isječci
filmski isječci	koncert na otvorenom	koncert na otvorenom	pseći trikovi	pseći trikovi
koncert na otvorenom	filmski isječci	pseći trikovi	filmski isječci	koncert na otvorenom

Matrični račun daje:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 14 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 \\ 48 \\ 43 \end{bmatrix}$$

U ovom krugu opcija psećih trikova ima najmanje bodova i ispada.

Treća runda:

U trećoj rundi i nakon eliminacije psećih trikova te promjenom bodovanja filmski isječci . . . 1 bod i koncert na otvorenom . . . 0 bodova imamo:

8	3	14	13	6
filmski isječci	koncert na otvorenom	filmski isječci	koncert na otvorenom	filmski isječci
koncert na otvorenom	filmski isječci	koncert na otvorenom	filmski isječci	koncert na otvorenom

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 14 \\ 13 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 16 \end{bmatrix}$$

U ovom krugu opcija koncert na otvorenom ima najmanje bodova i ispada, ostavljajući opciju filmskih isječaka kao pobjednika.

- Odgovori će se razlikovati.

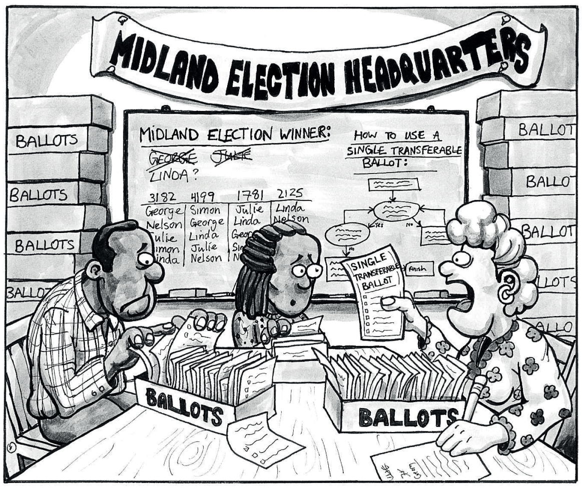
6. Pretpostavimo da je kandidat X Condorcetov pobjednik. Tada X pobjeđuje svakog drugog kandidata u dva smjera natjecanja. To znači da je za svakog kandidata X više puta rangiran iznad tog kandidata nego je X rangiran ispod tog kandidata. To znači da se X pojavljuje u prosjeku više od polovice svih rasporeda preferencija, tako da X ima Bordin broj veći od prosjeka. To zauzvrat znači da X nikada ne će imati najniži Bordin broj i stoga nikada ne će biti eliminiran korištenjem Bordine eliminacije.

Istraživanje

7. Odgovori će varirati.

1.7. Aktivnost 7.: Pojedinačni prenosivi glas

Izborni postupak odlučivanja koji se ponekad koristi kada se bira više od jednog kandidata naziva se **pojedinačni prenosivi glas** (PPG). To se naziva i **preferencijskim glasanjem**. Ovu metodu prvi su predložili 1850-ih godina Thomas Hare, engleski odvjetnik i Carl Andrae, danski matematičar. Ova metoda pojedinačnoga prenosivog glasa se u slučaju odabira samo jednog pobjednika svodi na metodu alternativnoga prenosivog glasa (tj. na metodu Hareove eliminacije) opisane u Aktivnosti 3.
Metoda pojedinačnoga prenosivog glasa se koristi u izboru javnih službenika u Australiji, Malti i Republici Irskoj.

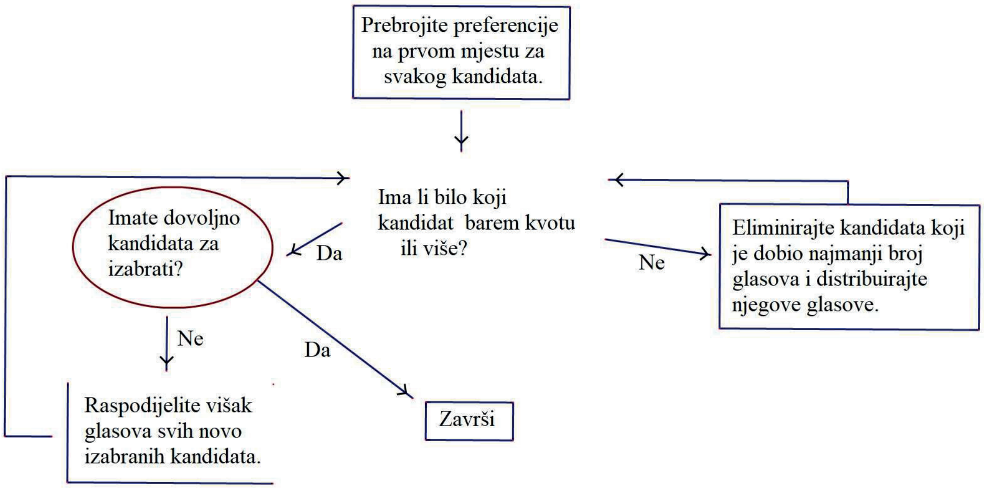


U redu, eliminirali smo Georgea i Julie, prebacili smo glasove na Lindu i Susan, a sav višak glasova podijelili smo preostalim kandidatima. Tko je pobjednik ovaj put?

Koristi se i u izborima za lokalne školske odbore u New Yorku. Preferencijsko glasanje često se koristi pri izborima za školske i sveučilišne odbore, gradska vijeća i klupske odbore, kao i za izbor dužnosnika u strukovnim i drugim organizacijama. Tom metodom biraju se kandidati za nagradu Oscar Akademije filmske industrije.

Jedan od razloga za odabir metode kao što je jedan prenosivi glas je osiguranje proporcionalne zastupljenosti izborne jedinice. Na primjer, školski odbor bi trebao biti izabran tako da se sastoji od raznih etničkih i vjerskih skupina. Ako se koristi metoda relativne većine, sasvim je moguće da će dobitna lista predstavljati samo grupu s najvećim brojem birača. Prednost metode jednog prenosivog glasa za birača je u tome da ako vaš glas ne pomaže izabrati vašeg kandidata prvog izbora, on će se računati kao jedan od vaših nižih izbora.

Za korištenje metode pojedinačnog prenosivog glasa svaki glasač mora ispuniti ordinalni glasački listić, navodeći kandidate po preferencijskom redu. Glasovi prvog izbora prikazuju se u tabeli. Izabranima se proglašavaju kandidati koji ostvare propisanu kvotu glasova. Ako kandidat dobije više glasova prvog izbora od kvote, višak glasova se prenositi razmjerno ostalim kandidatima. (Detalji o tome kako su zapravo glasovi prenosivi razlikuju se iz jednog sustava u drugi.) Ako niti jedan kandidat u određenoj fazi nema kvotu i postoji više mjesta koja se mogu dodijeliti, onaj koji dobije najmanji broj glasova se eliminira i glasački listići za ovog kandidata prenose se, kao i u uzastopnom užem izboru, na druge kandidate. Proces se nastavlja dok se sva mjesta ne popune. Ovaj proces moguće je prikazati dijagramom, radi većeg razumijevanja samog procesa izbora.



Kvota se obično definira na sljedeći način: Ako ima s slobodnih mjesta koja treba popuniti s n kandidata, gdje je $n > s$, a broj birača je m, tada je kvota dana s $Q = \left[\dfrac{m}{s+1}\right] + 1$.

(Uglata zagrada [ ] označava funkciju najveći cijeli broj.)

Metoda pojedinačnog prenosivog glasa mogla bi se koristiti za izbor dva predstavnika u županijsko udruženje stanovnika. U Midlandsu su 23 glasača: 13 konzervativaca i 10 liberala. Konzervativni kandidati su Winston i Nadia. Winston je konzervativniji od Nadie. Kandidati liberala su Theo i Rudy. Rudy je radikalniji od Thea. U glasanju za predstavnike u županijskoj udruzi stanovnika, korištenjem ordinalnih glasačkih listića, dobili su se preferencijski rasporedi.

konzervativac		**liberal**	
7	6	6	4
Winston	Nadia	Theo	Rudy
Nadia	Winston	Rudy	Theo
Theo	Theo	Nadia	Nadia
Rudy	Rudy	Winston	Winston

Za korištenje metode jednog prenosivog glasa prvo izračunajte kvotu. U ovom slučaju, $Q = \left[\dfrac{23}{2+1}\right] + 1 = 8$, niti jedan od kandidata nije dobio kvotu prvoplasiranih glasova, pa je Rudy koji je dobio najmanje glasove eliminiran. Glasovi četiriju Rudyjevih glasača prenose se Theu, njihovom drugom izboru, dajući ovaj novi raspored preferencija.

konzervativac		**liberal**
7	6	10
Winston	Nadia	Theo
Nadia	Winston	Nadia
Theo	Theo	Winston

Theo sada ima dva glasa više od kvote i on je izabran. Theova dva glasa viška su prebačena Nadiji. To je rezultiralo sljedećim rasporedima preferencija.

konzervativac	
7	8
Winston	Nadia
Nadia	Winston

Nadia je sada dosegla kvotu i izabrana je na preostalo mjesto.

Razmotrite ovo . . .

1. Usporedite rezultat korištenjem metode pojedinačnog prenosivog glasa s rezultatom korištenjem Hareove metode sekvencijalnog užeg izbora[3] za udrugu stanovnika Midlandsa. Koji rezultat najbolje predstavlja želje birača?

2. Kad bi se veličina udruge stanovnika povećala tako da Midlands može izabrati tri zastupnika, koji bi kandidati bili izabrani korištenjem metode pojedinačnog prenosivog glasa?

3. Ako bi se veličina smanjila tako da bi Midlandsu bio dopušten samo jedan predstavnik, tko bi bio izabran korištenjem pojedinačnog prenosivog glasa?

Istražujte dalje

4. Neposredno prije održavanja posljednjih izbora u Midlandsu, troje učenika navršilo je 18 godina i postalo punoljetno s pravom glasa. Održan je izbor, s istim kandidatima, koji je rezultirao sljedećim rasporedom preferencija. Koja bi dva kandidata bila izabrana korištenjem **metode pojedinačnoga prenosivog glasa**?

9	6	2	4	5
Winston	Theo	Rudy	Rudy	Nadia
Nadia	Rudy	Theo	Theo	Theo
Theo	Nadia	Nadia	Nadia	Rudy
Rudy	Winston	Winston	Winston	Winston

5. Kakav bi bio rezultat izbora da su se dva glasača koji su preferirali Rudyja, a ne Thea, predomislili i preferirali Thea a ne Rudyja? Koristite nove rasporede preferencija za odrediti dva pobjednička kandidata.

9	6	2	4	5
Winston	Theo	Theo	Rudy	Nadia
Nadia	Rudy	Rudy	Nadia	Theo
Theo	Nadia	Nadia	Theo	Rudy
Rudy	Winston	Winston	Winston	Winston

6. Usporedite rezultate izbora u 4. i 5. pitanju. Što primjećujete? Mislite li da je fer?

7. Grad Smytheville, s 1608 birača, održao je izbore za dvije pozicije u gradskom vijeću, što je rezultiralo rasporedima preferencija prikazanim u donjoj tablici. Koji bi kandidati bili izabrani metodom pojedinačnoga prenosivog glasa? (Morat ćete odlučiti kako dodijeliti dodatne glasove nakon prvog kruga.) Svakako objasnite svoju metodu. Mislite li da su rezultati fer? Objasnite!

417	74	121	365	285	346
Anders	Anders	Kristina	Kristina	Marie	Marie
Kristina	Marie	Anders	Marie	Anders	Kristina
Marie	Kristina	Marie	Anders	Kristina	Anders

[3]T. Marošević: Ako je to metoda Hareove eliminacije tj. metoda alternativnog prenosivog glasa, onda kod te metode postoji samo jedan izabrani kandidat.

Istraživanje

8. Informirajte se gdje postoji ili se koristila metoda pojedinačnoga prenosivog glasa. Možete li saznati zašto je odabrana ova metoda ili zašto se više ne koristi. Možda će vam pomoći istražiti pojam "preferencijsko glasanje".

9. Za "prijenos" glasova u primjeni metode pojedinačnoga prenosivog glasa koriste se različite metode. Saznajte više o barem jednoj od ovih metoda i navedite primjer kojim ćete pokazati kako metoda funkcionira.

* * * * *

Kutak za učitelja

Čini se da metoda pojedinačnoga prenosivog glasa daje biračima mogućnost da u potpunosti izraze svoje preferencije, osiguravajući maksimalno i pravično uzimanje u obzir preferencije svakog glasača. Ova je metoda, međutim, podložna četirima različitim paradoksima. U *Paradoksima preferencijskog glasovanja*, sažimaju ih Peter Fishburn i Steven Brams:

- *Paradoks nepojavljivanja*: dodavanje identičnih glasačkih listića s kandidatom X na posljednjem mjestu može promijeniti pobjednika s drugog kandidata na X.

- *Paradoks onemogućene apsolutne većine*: kandidat koji može poraziti svakog drugog kandidata u izravnoj usporedbi apsolutnom većinom glasova može izgubiti izbore.

- *Paradoks više krugova*: kandidat može pobijediti u svakom krugu posebno, ali izgubiti opeće izbore u kombiniranim krugovima.

- *Paradoks "više-je-manje"*: ako je pobjednik više rangiran kod nekih glasača, a kod svih ostalih ostao na istom rangu, drugi kandidat bi mogao pobijediti.

  Jedan od tih paradoksa razotkriven je u pitanju 6. Ako su neki vaši učenici zainteresirani za daljnje čitanje, mogli bi uživati u članku Fishburna i Bramsa u časopisu *Mathematics Magazine*. Pisan je tako da je prihvatljiv većini srednjoškolaca.

Odgovori

Razmotrite ovo ...

1. Koristeći Hareovu sekvencijalnu metodu užeg izbora, Winston i Theo pobjeđuju.[4] Odgovori mogu varirati u pogledu koji rezultat bolje predstavlja želje glasača, ali Nadia je ocijenjena iznad Winstona na tri od četiri različita rasporeda preferencija.

2. S tri mandata, kvota je $Q = \left[\dfrac{23}{3+1}\right] + 1 = 6$. Tako se Winston, Nadia i Theo nalaze u kvoti i izabrani su.

3. Sa samo jednim mandatom kvota je 12. Sva četiri kandidata nisu uspjela, pa je Rudy eliminiran, koji daje raspored preferencija u tri stupca u primjeru. Sva tri ostala kandidata i dalje nisu ispunili kvotu, pa Nadia ispada, a njenih 6 glasova prenesena su Winstonu, koji je tada izabran.

[4] T. Marošević: ako je Hareova sekvencijalna metoda užeg izbora isto što i metoda alternativnoga prenosivog glasa, kod te metode bira se samo jedan pobjednik. Ovaj odgovor ukazuje kao da je ta metoda (Hareova sekvencijalna metoda užeg izbora) neko poopćenje na više kandidata metode alternativnoga prenosivog glasa, budući da se u ovom odgovoru daju dva izabrana pobjednika.

Istražujte dalje

4. Kvota s 26 birača bit će $Q = \left[\frac{26}{2+1}\right] + 1 = 9$. Budući da je Winston stigao do kvote, on je izabran. Winston nema glasova viška, pa se Nadia, koja je dobila najmanje glasova, eliminira, a njezinih 5 glasova prenosi se Theu, dajući sljedeće rasporede preferencija.

11	2	4
Theo	Rudy	Rudy
Rudy	Theo	Theo

Theo je izabran s 11 glasova.

5. U ovom slučaju, Winston je odmah ponovno izabran, bez viška glasova za prijenos. Rudy je dobio najmanji broj glasova. Rudyjeva četiri glasa prenose se Nadiji koja sada ispunjava kvotu s 9 glasova.

6. Rezultati izbora u 4. i 5. pitanju su paradoksalni. Jedina razlika u rasporedu preferencija je da su na drugim izborima dva birača promijenila Thea iz drugog u prvi izbor. Ne čini se fer da može izgubiti izbore onaj kandidat koji je dobio mnogo glasova za prvo mjesto i zapravo bi pobijedio da su neki glasači glasali za njega kao za svoj drugi, a ne prvi izbor. Fishburn i Brams (1983) ovo nazivaju *više-je-manje* paradoksom.

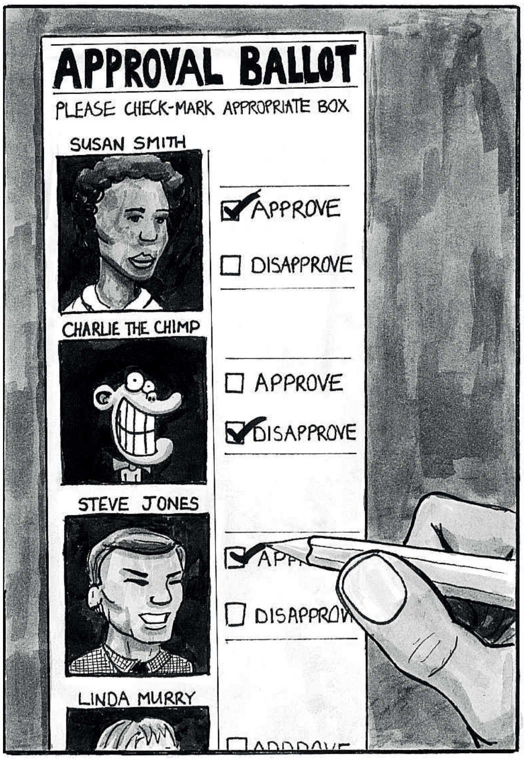
7. Kvota je 537. U prvom krugu Marie je izabrana sa 631 glasom. Ona ima višak od 94 glasa, koji se proporcionalno dijele na Andersa i Kristinu. Jedan način da se to učini je dati Kristini $\frac{346}{631} \cdot 94 = 52$ više glasova. Anders bi dobio $\frac{285}{631} \cdot 94 = 42$ glasa. Kristina sada ima $486 + 52 = 538$ glasova, što je jedan glas više od kvote, pa je izabrana.

Istraživanje

8. Odgovori će varirati.

9. Odgovori će varirati. Razlike su obično u metodama raspodjele glasova proporcionalne.

1.8. Aktivnost 8.: Arrowljev poučak i glasanje odobrenjem



U prethodnim ste aktivnostima ispitali razne izborne procedure odlučivanja. Svaki postupak zamišljen je za odabir jednog ili više kandidata s liste od tri ili više. Utvrdili ste da svaki postupak koji ima neka demokratska obilježja može dati različite rezultate razmatranjem istih birača s istim rasporedom preferencija.
Kenneth Arrow (1921. - 2017.), američki ekonomist i matematičar, inače dobitnik Nobelove nagrade za ekonomiju 1972., uhvatio se u koštac s problemom odlučivanja o najpravednijoj metodi za određivanje pobjednika izbora. Došao je do zaključka da svaki demokratski sustav glasanja koji rangira sve kandidate može dati nedemokratske rezultate.

To se smatralo poražavajućim otkrićem.

Arrowa je zanimalo matematičko analiziranje izbornih procedura koje rangiraju kandidate. Napravio je popis važnih značajki koje određuju pravednost izbornog postupka. Među fer kriterijima koje je Arrow definirao bili su sljedeći :

- Ne bi trebalo biti diktatora. Birač je Arrowljev diktator kada je rangiranje preferencija drugih irelevantno za ishod. Drugim riječima, za bilo koja dva kandidata A i B, ne postoji pojedinačni birač takav da kad god preferira A u odnosu na B, A je uvijek bolji od B.
- Ako svaki glasač preferira jednog kandidata u odnosu na drugoga, onda bi i ukupni društveni izbor trebao preferirati tog kandidata.
- Korištena procedura izborne odluke ne bi trebala poticati birače na laž njihovih pravih preferencija.

Posljednji Arrowljev kriterij može se činiti iznenađujućim. To je vrsta neočekivanog rezultata koji se pojavljuje kada matematičari počnu eksperimentirati s problemom.

Na satu tjelesnog odgoja odlučeno je glasanjem koju će aktivnost imati u sljedećem kvartalu. Njihov izbor je aerobika, badminton, nogomet ili softball. Glasali su ordinalnim glasačkim listićima. Tablicom je prikazan raspored njihovih preferencija.

broj učenika s ovim rasporedom preferencija	12	5	10	11
	aerobika	badminton	nogomet	softball
	badminton	nogomet	badminton	badminton
	nogomet	softball	softball	nogomet
	softball	aerobika	aerobika	aerobika

Razmotrite ovo . . .

1. Uporabite Bordin postupak odlučivanja o izboru kako biste odredili koja je aktivnost odabrana na satu tjelesnog rangiranjem aktivnosti na temelju broja bodova koje su dobili.

2. Deset učenika koji su željeli nogomet kao svoj prvi izbor odlučili su isprobati drugačije strategije glasanja. Umjesto glasanja o svojim stvarnim preferencijama, glasali su za aktivnosti ovim redoslijedom: nogomet, softball, aerobika i badminton. Kako je ova strategija utjecala na rezultate?

3. Kao odgovor na zapažanje da njegova metoda nije otporna na strategiju, Borda je komentirao *Moj je plan namijenjen samo poštenim ljudima.* Opišite vlastitim riječima nedostatak koji ste otkrili u Bordinoj metodi.

   Sve u svemu, Arrow je naveo pet fer kriterija za izbornu metodu. Na temelju ovih kriterija, Arrow je formulirao i dokazao sljedeći poučak u svojoj knjizi *Društvene vrijednosti i individualni izbor*:

   Ne postoji izborni postupak kojim se društvo rangira na temelju tri ili više kandidata na individualnim preferencijama i koji poštuje pet fer uvjeta.

   Unatoč sumornom predviđanju Arrowljeva poučka, teoretičari društvenog izbora i dalje pokušavaju izmisliti bolje metode glasanja koje će prevladati ili minimizirati nedostatke poznatih metoda glasanja. Jedna takva metoda glasanja naziva se **glasanje odobrenjem**. Posebno je prikladna za izbore s nekoliko kandidata. Kada glasate pomoću odobrenja glasanja, svakom kandidatu kojeg odobrite dajete glas. Tamo nema ograničenja za koliko kandidata možete glasati. Ako ne odobravate kandidata, ne glasate za njega. Pobjednik je kandidat koji dobije najveći broj glasova. Ovaj sustav također dobro funkcionira na izborima na kojima može pobijediti više od jednog kandidata, primjerice na novim izborima za članove Baseball Hall of Fame ili za članove odbora Američkog matematičkog društva.

4. Na satu tjelesnog odgoja odlučeno je koristiti glasanje za odabir aktivnosti u sklopu tjelesnog odgoja u sljedećem kvartalu. Svi učenici odobravaju svoja dva najbolja izbora. Zbrojite odobrenja glasova koje je svaka aktivnost dobila i zabilježite ih u donju tablicu. Koja aktivnost pobjeđuje korištenjem glasanja odobrenjem?

aktivnost	broj glasova odobrenjem
aerobika	
badminton	
nogomet	
softball	

5. Upotrijebite glasanje odobrenjem u prethodnih šest aktivnosti (izbor pizze, dan bez zadaće ili neki drugi problem) i analizirajte rezultate.

   - Jeste li zadovoljni rezultatom?
   - Čini li vam se ova metoda više ili manje fer od drugih metoda koje ste istraživali?
   - Mislite li da je glasanje odobravanjem podložno istim problemima koji utječu na rezultate pomoću Bordine metode? Razgovarajte o svim drugim problemima za koje mislite da bi mogli utjecati na fer rezultate pri korištenju glasanja odobrenjem.

Istražujte dalje

6. U Aktivnosti 6., Central City's Ultimate Club glasao je o bojama majica, što je rezultiralo slijedećim rasporedima preferencija. Klub je odlučio provesti ponovno glasanje odobrenjem. Kad su glasački listići vraćeni svi su odobrili svoj prvi izbor. Osim toga, 7 sudionika koji su odabrali bijelu boju kao svoj prvi izbor također su odobrili plavu boju, a 25 sudionika koji su odabrali zelenu odobrilo je sve boje osim žute. Koja boja će pobijediti korištenjem glasanja odobrenjem?

12	7	20	18	23	25
bijela	bijela	žuta	ljubičasta	plava	zelena
ljubičasta	plava	ljubičasta	žuta	ljubičasta	plava
žuta	ljubičasta	zelena	plava	žuta	bijela
zelena	žuta	bijela	bijela	zelena	ljubičasta
plava	zelena	plava	zelena	bijela	žuta

7. Grafički (stupčastim dijagramom, kružnim dijagramom, ...) prikažite konačne rezultate izbornih odluka koje ste proučavali u prethodnim aktivnostima.

8. Napravite scenarij koji uključuje korištenje postupka izborne odluke. Koji biste postupak preporučili? Zašto?

9. Razmijenite scenarije s nekim od svojih kolega iz razreda. Svatko od vas trebao bi analizirati scenarij drugoga i preporučiti proceduru izborne odluke. Usporedite svoje rezultate kada su gotovi. Slažete li se s prijedlogom razmjene scenarija?

10. Na temelju onoga što ste naučili u ovim aktivnostima, koje biste promjene preporučili u metodama glasanja koje se koriste na primarnim i općim izborima u Sjedinjenim Državama?

Istraživanje

11. Istražite i saznajte više o glasanju odobrenjem. Koje su neke od prednosti i mane ove metode?

* * * * *

Kutak za učitelja

Ova aktivnost uvodi učenike u Arrowljev poučak, koji kaže da bilo koji zamislivi demokratski sustav glasanja može dati nedemokratske rezultate. Paul Samuelson, koji je kasnije dobio Nobelovu nagradu za ekonomske znanosti, opisao je Arrowljev poučak:

Potraga velikih umova kroz povijest za savršenom demokracijom je potraga za himerom, za logičkom samokontradikcijom. Sada znanstvenici posvuda u svijetu - u matematici, politici, filozofiji i ekonomiji - pokušavaju spasiti što se može spasiti od Arrowljevog razornog otkrića u matematičkoj politici, a čemu služi i poučak o nemogućnosti dokazivanja konzistentnosti Kurta Gödela iz 1931. godine u matematičkoj logici.

U odjeljku *Razmotrite ovo* učenici istražuju da kriterij izborne odluke i postupak ne bi trebao poticati birače da lažu o svojim stvarnim preferencijama.

U drugom dijelu aktivnosti učenici se upoznaju s glasanjem odobrenjem. Učenici glasaju korištenjem glasanja odobrenjem u jednom od pitanja o kojima su glasali u prethodnoj aktivnosti.

Odgovori

Razmotrite ovo ...

1. Badminton: 119-38=81 (Bordina metoda)
   Nogomet: 101-38=63
   Softball: 86-38=48
   Aerobika: 74-38=36
2. Nogomet: 101-38=63
   Badminton: 99-38=61
   Softball: 96-38=58
   Aerobika: 84-38=46
3. Učenici koji preferiraju nogomet mogu manipulirati glasanjem lažući o svojoj istinitoj preferenciji.
4. Badminton pobjeđuje kada se koristi glasanje odobrenjem. Ovo je isti rezultat kao prvi rezultat pomoću Bordine metode.
5. Odgovori će varirati. Glasanje odobrenjem pati od iste mane kao Bordina metoda jer je podložna strateškoj manipulaciji. Nije ništa više osjetljiva na neiskreno glasanje nego druge poznate metode.

Istražujte dalje

6. Plava pobjeđuje.
7. Odgovori će varirati.
8. Odgovori će varirati.
9. Odgovori će varirati.
10. Odgovori će varirati.

Istraživanje

11. Odgovori će varirati.

Prema Bramsu i Fishburnu, ovo su neke od prednosti i nedostaci metode glasanja odobrenjem:

Prednosti

- Glasačima daje fleksibilnije mogućnosti. Mogu glasati za jednog favorita ili oni mogu glasati za više od jednog izbora.
- To bi moglo povećati odaziv birača jer bi se birači osjećali kao da su sposobniji izraziti svoje preferencije.
- To bi pomoglo u izboru kandidata s najvećom općom podrškom.
- Podržala bi manjinske kandidate. Birači često ne glasaju za svoj prvi izbor jer ne misle da taj kandidat ima šanse za pobjedu.
- Relativno je neosjetljiv na broj kandidata koji se natječu.

Mane ili nedostatci

- Moglo bi potaknuti povećanje broja kandidata.
- To bi moglo potkopati i možda uništiti američki dvostranački sustav.

Referentne bilješke

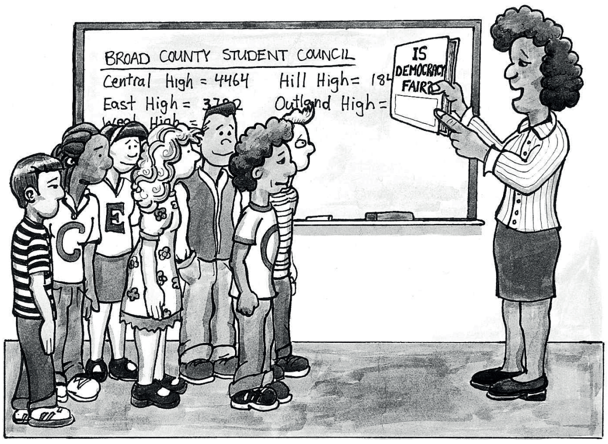
1. Hoffman, *Archimedes' Revenge* (1988) - vidi [12].

2. *The New Palgrave: A Dictionary of Economics*, p. 263. - vidi [9].

3. Brams and Fishburn, *Approval Voting* (1983) - vidi [6].

1.9. Aktivnost 9.: Raspodjela mandata

Problemi povezani s raspodjelom mandata su predmet mnogih političkih rasprava u Sjedinjenim Državama kao i u drugim zemljama.
U Sjedinjenim Američkim Državama postoje dva predstavnička tijela, Senat i Zastupnički dom. Senat se sastoji od po dva senatora iz svaka država, što znači da je svaka država zastupljena jednako.



U ovoj ćete knjizi moći naučiti više o raspodjeli novog vijeća učenika.

Zastupnički dom osmišljen je tako da predstavlja svaku državu razmjerno njezinom broju stanovništva.

Od ratifikacije Ustava, političari su se borili s problemom određivanja fer metode za raspoređivanje mandata predstavnika iz svake države.

Učenici okruga Broad suočili su se s istim problemom kada su zamoljeni za pomoć kako osmisliti predstavničko tijelo koje će činiti učenici iz svake srednje škole u okrugu.

Učenici Central City High School smatraju da ovo vijeće učenika treba predstavljati učenike prema broju učeničke populacije kako bi svaki učenik u okrugu bio jednako zastupljen.

Učenici Outland Higha ne slažu se s tim. Smatraju da u vijeću učenika okruga treba biti isti broj predstavnika svake škole kako bi sve škole bile jednako zastupljene. Populacija svake škole navedena je u donjoj tablici.

aktivnost	učenička populacija
Central City High	4464
East High	3782
West High	3284
Hill High	1842
Outland High	1288
Sticks High	422

Razmotrite ovo ...

1. U kojoj od škola iz okruga mislite da će učenici preferirati sustav zastupljenosti na temelju određenog broja predstavnika po školi? U kojim školama će učenici vjerojatno preferirati sustav zastupljenosti temeljen na učeničkoj populaciji?

2. Što biste preporučili kao sustav predstavljanja za učenike Broad okruga u vijeću? Postoji li način odabira kako bi svi bili zadovoljni?

   Učenici su na kraju odlučili da u njihovom vijeću učenika okruga broj predstavnika iz svake škole treba biti proporcionalan broju učenika u školi. Sljedeći problem koji oni trebaju riješiti je kako odrediti broj predstavnika iz svake škole koji bi trebao biti u vijeću.

   Uprava školskog okruga odredila je da u školi treba biti 30 ili manje učenika u vijeću učenika.

`Neka svaka grupa u vašem razredu predstavlja komisiju za raspodjelu za drugu školu u Broad okrugu. Kao član odbora za raspodjelu, vi trebate odlučiti kako ćete raspodijeliti članstvo u učeničkom vijeću okruga Broad i pripremiti izvješće koje opravdava vašu metodu raspodjele.`

3. Opišite svoju metodu raspodjele u vijeće učenika okruga Broad.

4. Objasnite zašto mislite da je vaša metoda raspodjele fer. Hoće li sve škole biti zadovoljne? Objasnite!

5. Predstavite svoje rezultate razredu i usporedite ih s rezultatima drugih grupa. Predlažu li sve grupe istu metodu raspodjele?

Istražujte dalje

6. Okrug Wide, koji je susjedan okrugu Broad, ima samo jednu srednju školu. Mnogi se učenici Wide High druže s učenicima iz okruga Broad i zainteresirani su za ista pitanja koja se tiču i njihovih prijatelja. Žele da i njihova škola bude zastupljena u novoformiranom učeničkom zboru. U Wide Highu ima 2478 učenika. Uprava nije spremna dodati niti jednog njihovog predstavnika u vijeće učenika, međutim slaže se da bi Wide Highu trebalo dopustiti da se pridruže učenicima Broad vijeća. Izračunajte postotke učeničke populacije ako je W”ide High uključen i napravite preporuke za broj predstavnika svake škole. Opišite metodu kojom ste odredili raspodjelu.

7. Na raspodjelu koje škole najviše utječe dodatak predstavnika škole Wide High?

8. Neki učenici smatraju da uprava ne bi trebala ograničavati veličinu vijeća učenika. Eksperimentirajte s različitim veličinama vijeća učenika kako biste pronašli veličinu koju biste preporučiti. Predložite upravi način osnivanja vijeća učenika čije je članstvo proporcionalno broju učeničke populacije u školama te veličinu vijeća koju preporučujte. Je li ovo razumniji način pristupa problemu? Objasnite!

Istraživanje pomoću kalkulatora

9. Ako vaš kalkulator ima funkciju unosa popisa (liste), možete unijeti populacije u popis i ostvariti izračune za sve unose na popisu istovremeno. Pokušajte ovo i objasnite kako biste mogli koristiti ovu značajku kao pomoć pri raspodjeli članova vijeća učenika.

Istraživanje

10. Pročitajte članak 1., odjeljak 2. Ustava SAD-a i odgovorite - kako su ustavotvorci napisali da stanovništvo Sjedinjenih Država treba biti zastupljeno? Kako se zastupljenost odnosi na oporezivanje? Što mislite kako je ovo utjecalo na raspravu o fer raspodjeli?

11. Kada i kako je odlučeno da SAD ima Senat i Zastupnički dom? Koji je bio razlog takve odluke?

12. Saznajte što je elektorski kolegij i kako funkcionira. Jesu li svi glasači u SAD-u ravnopravno zastupljeni u biračkom kolegiju? Zašto je kreiran?

13. Kolika je veličina Zastupničkog doma i Senata? Jesu li ove veličine fiksne ili im je dopušteno rasti u skladu s promjenama broja stanovništva?

* * * * *

Kutak za učitelja

Ova aktivnost je prva koja se bavi raspodjelom mandata. Učenici se upoznaju s osnovnim načelima raspodjele i raspodjelom potkrepljenom povijesnom pozadinom. Za razmatranje dijela ove aktivnosti odredite grupe koje će predstavljati svaku školu. Možete imati zanimljivu raspravu o metodama raspodjele ako se učenici užive u svoje uloge. Ako učenici koriste metodu postotka, morat će se suočiti s predstavljanjem decimalnog dijela. Također mogu otkriti da su neke škole nedovoljno zastupljene. Tvorci Ustava SAD-a zahtijevaju da svaka država ima barem jednog predstavnika. Mnogi učenici mogu osmisliti metodu vrlo sličnu Hamiltonovoj metodi, koja je predstavljena u Aktivnosti 10.

Odgovori

Razmotrite ovo ...

1. Manje škole bi vjerojatno više voljele učeničku vlast po uzoru na Senat, a veće škole vjerojatno bi više voljele model poput Zastupničkog doma.

2. Odgovori će varirati.

3.-5. Odgovori će varirati.

Istražujte dalje

6. Raspodjele koje generiraju učenici mogu varirati. Zamolite ih da opišu svoje metode i potvrde da njihovi rezultati odgovaraju metodi.

7. Odgovori mogu varirati, ovisno o metodi raspodjele koju učenici koriste. Općenito, veće škole će doživjeti veći postotak u promjenama raspodjele uključivanjem nove škole.

8. Odgovori će varirati.

Istraživanje pomoću kalkulatora

9. Kako aktivnosti budu napredovale, učenike će se poticati da koriste kalkulatore kao pomoć u računanju. Jedan od načina za obavljanje ove aktivnosti je korištenjem funkcije popisa u nekim TI kalkulatorima.

   Učenici mogu unijeti populaciju svake škole u L1 i zatim koristiti varijablu statističke funkcije za pronalaženje zbroja populacija.

   Vaše učenike će možda zanimati vrijednosti koje kalkulator prikazuje. Potaknite ih da istraže što različite vrijednosti znače. Možda će čak htjeti pokušati koristiti neke od njihovih vrijednosti u razvoju metode raspodjele mandata.

Istraživanje

10. Članak 1. stavak 2. Ustava kaže:

    Zastupnici i izravni porezi bit će raspodijeljeni između nekoliko država koje mogu biti uključene u ovu Uniju i prema njihovim brojevima stanovništva, isključujući Indijance koji se ne oporezuju i s tri petine svih ostalih osoba. Stvarni popis će se obaviti u roku od tri godine nakon prvog sastanka Kongresa Sjedinjenih Država, i unutar svakog sljedećeg mandata od deset godina, na način kako će se odrediti zakonom. Broj zastupnika ne smije premašiti jedan na svakih trideset tisuća, ali svaka će država imati najmanje jednog predstavnika.

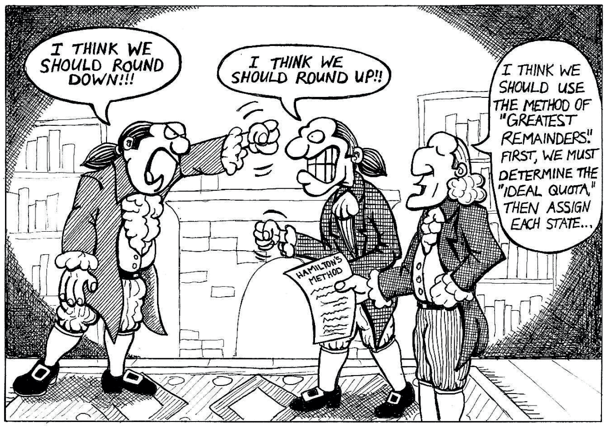
11. Ustavna konvencija iz 1787. godine formulirala je ono što je poznato kao "veliki kompromis." Ovim kompromisom uspostavljena je predstavnička grana vlasti sastavljen od dva doma.

12. Elektorski kolegij nastao je iz nepovjerenja prema običnim građanima. To je skup elektora iz svake države koje su izvorno birala državna zakonodavna tijela, no ubrzo je to promijenjeno tako da se sada biraju narodnim glasanjem. Broj elektora iz svake države jednak je broju senatora plus broj predstavnika te države.

13. Dom se sastoji od 435 zastupnika, a Senat ima 100 članova. Veličina je varirala kao odgovor na rast stanovništva. Senat je također narastao, ali svaka država uvijek ima samo dva senatora.

1.10. Aktivnost 10.: Metoda raspodjele Alexandera Hamiltona

Iako su autori Ustava SAD-a zahtijevali da države budu zastupljene razmjerno svome stanovništvu, nisu propisali metodu za ispunjavanje ovoga uvjeta. Zbog toga su se često odvijale žestoke rasprave o tome koju metodu treba koristiti za raspodjelu članova u Predstavničkom domu Kongresa.



Tijekom osnivanja ove nacije vodile su se mnoge žestoke rasprave o metodi raspodjele koju treba koristiti.

Političko neslaganje između sjevernih i južnih država nacije očitovalo se upravo u pitanju koju glasačku metodu izabrati, ponajprije zbog njihova ekonomskoga interesa.

Ukupni rast stanovništva i promjene u broju stanovnika zbog migracija stanovništva iz jednog dijela zemlje u drugi također mogu utjecati na raspodjelu mandata. Svaka država želi zaštititi vlastite interese i osigurati da bude fer zastupljena, ali teško je pronaći način raspodjele koji je fer i za velike i za male države. Mnogi su se politicari tako služili matematičkom kreativnosti u svojoj borbi da osiguraju pravednu zastupljenost vlastitih država u vlasti.

Prva metoda raspodjele koja je proizašla iz te borbe bila je *Hamiltonova metoda* koja se ponekad naziva i metodom **najvećih ostataka**. Alexander Hamilton, prvi američki ministar financija, predložio je ovu metodu 1792. godine. Nakon duge rasprave, predsjednik George Washington stavio je veto na prijedlog zakona koji bi ovu metodu proglasio zakonom.

Hamiltonova metoda ponovno je uvedena 1850. kao *Vintonova metoda* i prihvaćena je. Korištena je za raspodjelu mandata u Zastupničkom doma SAD-a od 1850. do 1901., a danas se ova metoda koristi u Kostariki, Švicarskom nacionalnom vijeću i za neke federalne dijelove Švedske. Metoda je također prihvaćena u Južnoafričkom privremenom Ustavu za opće izbore u travnju 1994.

Hamiltonova metoda funkcionira na ovaj način.

- Prvo odaberite veličinu doma i omjer zastupljenosti. (U Sjedinjenim Američkim Državama, te odluke donose postojeći Dom i Senat.) Omjer zastupljenosti određuje koliko ljudi treba predstavljati svaki član Doma. Ustav SAD-a navodi da je minimum 30.000 ljudi za predstavnike.
- Sljedeći korak je množenje omjera broja stanovništva države i ukupnog stanovništva s veličinom doma da bi se dobila idealna kvota za svaku državu. Često ove idealne kvote imaju vrijednosti razlomka, pa se ne mogu koristiti takve kakve jesu jer broj predstavnika mora biti cijeli broj.
- Dodijelite svakoj državi broj mjesta jednak cjelobrojnom dijelu njezine idealne kvote. Ustav jamči da će svaka država imati najmanje jednog predstavnika, pa ako država ima idealnu kvotu manju od jedan, dodijelite joj jednog predstavnika.
- Pronađite zbroj dodijeljenih mjesta koristeći cjelobrojne dijelove idealne kvote. Ako ukupan broj mjesta nije jednak dopuštenom broju mjesta, usporedite decimalne dijelove svake idealne kvote. Dodijelite državi s najvećim decimalnim dijelom još jedno mjesto. Ako je država dobila mjesto jer je njezina idealna kvota bila manje od jedan, ne ispunjava uvjete za dodatno mjesto. Ponavljajte ovaj postupak dok se ne popune sva preostala mjesta. Dakle, dodijeljeni su dodatni predstavnici države s "najvećim ostatcima".

Hamilton i njegovi sljedbenici predložili su da Zastupnički dom ima 120 mjesta (ukupno stanovništvo podijeljeno s 30 000, minimalni omjer zastupljenosti naveden u Ustavu).

Kako bi saznali koliko bi Connecticut trebao imati predstavnika, pomnožili su omjer broja stanovništva države i ukupnog stanovništva s veličinom doma da bi se dobila idealna kvota:

$$\frac{238\,841}{3\,615\,920} \cdot 120 \approx 7,860.$$

Dakle, u prvom krugu, Connecticutu bi bilo dodijeljeno 7 predstavnika.

Rezultati popisa iz 1790. godine

država	stanovništvo	idealna kvota	broj predstavnika (cijeli dio)	broj dodatnih predstavnika na temelju (najvećeg ostatka)	ukupan broj predstavnika na temelju Hamiltonove metode
Connecticut	236 841	7,860	7		
Delaware	55 540				
Georgia	70 835				
Kentucky	68 705				
Maryland	278 514				
Massachusetts	475 327				
New Hampshire	141 822				
New Jersey	139 570				
New York	331 589				
North Carolina	353 523				
Pennsylvania	432 879				
Rhode Island	68 446				
South Carolina	206 236				
Vermont	85 533				
Virginia	630 560				
	ukupno 3 615 920		cjelobrojni zbroj	ukupni broj dodatnih predstavnika	ukupni broj predstavnika

Razmotrite ovo ...

1. U tablici popisa iz stanovništva 1790. godine ispunite stupac s oznakom ”Idealna kvota”.

2. U stupac s oznakom ”Broj predstavnika (cijeli dio)” upišite cijeli dio svake idealne kvote. Izračunajte ili odredite zbroj unosa u stupcu. Jeste li ovim procesom popunili svih 120 mjesta u Domu?

3. Da biste popunili preostala mjesta (ako ih ima), pronađite državu s najvećim ostatatkom i dajte joj još jednog predstavnika. Nastavite s dodjelom dodatnih mjesta na temelju silaznog redoslijeda decimalnog dijela idealnih kvota dok ne napunite Dom.

4. Čini li vam se ova metoda fer načinom raspodjele mjesta u Zastupničkom domu? U kojim državama mislite da bi građani bili zadovoljni ovom metodom?

Istražujte dalje

Učenici u okrugu Broad istraživali su povijesnu pozadinu raspodjele mandata u procesu osnivanja svoga vijeća učenika, pa su odlučili eksperimentirati s metodama koje su predložili političari u SAD-u. Isprobali su Hamiltonovu metodu raspodjele. Pretpostavimo da će biti 30 članova u novoosnovanom učeničkom vijeću.

5. Pronađite idealnu kvotu za svaku školu. Da biste to učinili, pomnožite omjer broja učenika u školi prema ukupnoj učeničkoj populaciji s brojem učenika članova vijeća.

škola	školska populacija	idealna kvota	broj predstavnika (cijeli dio)	dodatni predstavnici	ukupan broj predstavnika na temelju Hamiltonove metode
Central City High	4 464				
East High	3 782				
West High	3 284				
Hill High	1 842				
Outland High	1 288				
Sticks High	422				
	ukupno		cjelobrojni zbroj	ukupni broj dodatnih predstavnika	ukupni broj predstavnika

6. Ustav zahtijeva da svaka država ima najmanje jednog zastupnika. Slično tome, školska uprava okruga zahtijeva da svaka škola ima najmanje jednog predstavnika. Ako postoje škole koje imaju idealnu kvotu manju od jedan, dodijelite im jednog predstavnika.

7. Ostatak predstavnika rasporedite Hamiltonovom metodom.

8. Na temelju vaše raspodjele pomoću Hamiltonove metode odgovorite na ova pitanja.

- Čini li vam se Hamiltonova metoda fer metodom za raspodjelu mjesta u vijeće učenika okruga Broad?

- Kako se Hamiltonova metoda može usporediti s metodom koju ste razvili u Aktivnosti 9.?

- Tko ima više koristi od Hamiltonove metode - velike ili male škole?

9. Učenici žele znati kako će se dodjeljivati mandati predstavnicima učenika u vijeću okruga Broad kada se školi Wide High dopusti pridruživanje. Koristite Hamiltonovu metodu za pronaći novu raspodjelu.

škola	školska populacija	idealna kvota	broj predstavnika (cijeli dio)	dodatni predstavnici	ukupan broj predstavnika na temelju Hamiltonove metode
Central City High	4 464				
East High	3782				
West High	3284				
Wide High	2478				
Hill High	1842				
Outland High	1288				
Sticks High	422				
	ukupno		cjelobrojni zbroj	dodatni predstavnici	sve u svemu ukupno

10. Na koje škole najviše utječe dodatak Wide High?

11. Mislite li da će učenici u svakoj školi biti zadovoljni rezultatima ove nove raspodjela?

Istraživanje pomoću kalkulatora

12. Kako će na raspodjelu utjecati promjena broja mjesta koja će se dodijeliti? Ovo pitanje može dovesti do prilično zamornih izračuna bez pomoći kalkulatora. Možda možete napisati program za kalkulator koji će automatski rasporediti mjesta ili upotrijebite ono što vam učitelj ponudi. Tako ćete lakše usporediti raspodjele za različite situacije.

Istraživanje

13. Istražite činjenice o prvom predsjedničkom vetu.

14. Doznajte više o Alexandru Hamiltonu. Koje je još doprinose dao povijesti SAD-a? Iz koje je države došao? Kakav je to učinak imalo na njegovu politiku?

15. Kakvu ulogu igra popis stanovništva u zastupljenosti u SAD-a? Koja je svrha računa raspodjele? Kako se to promijenilo od 1790. godine? Kakav je bio izvorni popis stanovništva?

* * * * *

Kutak za učitelja

Ova aktivnost predstavlja metodu raspodjele mandata Alexandra Hamiltona. Izvorna rasprava o raspodjeli Hamiltonovom metodom na kraju je tu metodu odbacila u korist Jeffersonove metode. To nije bilo zbog matematičkih grješaka, već zbog toga što je Jefferson tvrdio da Hamiltonova metoda ne ispunjava zahtjeve Ustava. Jefferson je vjerovao da se Hamiltonova metoda može koristiti samo s veličinom doma od 120 zastupnika, stoga možda ne će biti dobra kako broj stanovništva bude rastao.

Hamiltonova metoda zapravo ima nedostatak koji učenici istražuju u kasnijim aktivnostima. Sigurno će imati različito mišljenje o tome je li metoda fer ili nije. Potaknite ih na raspravu o tome.

Učenici će ponovno koristiti istu populaciju u kasnijim aktivnostima. Možda će im biti zgodno pohraniti popise u jedan kalkulator i zatim ih prema potrebi povezivanjem prenijeti kako bi izbjegli ponovno unošenje popisa svaki put kada je to potrebno. Morat će rezervirati dva popisa za školsku populaciju - jedan sa školom Wide High i jedan bez nje.

Ako su učenici došli do Hamiltonove metode raspodjele u Aktivnosti 9., onda neko od pitanja u ovoj aktivnosti može biti suvišno. Međutim, pitanja mogu voditi učenika prema boljem definiranju metode.

Odgovori

Razmotrite ovo ...

1. - 3.

država	stanovništvo	idealna kvota	broj predstavnika (cijeli dio)	broj dodatnih predstavnika na temelju (najvećeg ostatka)	ukupan broj predstavnika na temelju Hamiltonove metode
Connecticut	236 841	7,860	7	1	8
Delaware	55 540	1,843	1	1	2
Georgia	70 835	2,351	2		2
Kentucky	68 705	2,280	2		2
Maryland	278 514	9,243	9		9
Massachusetts	475 327	15,774	15	1	16
New Hampshire	141 822	4,707	4	1	5
New Jersey	139 570	5,959	5	1	6
New York	331 589	11,004	11		11
North Carolina	353 523	11,732	11	1	12
Pennsylvania	432 879	14,366	14		14
Rhode Island	68 446	2,271	2		2
South Carolina	206 236	6,844	6	1	7
Vermont	85 533	2,839	2	1	3
Virginia	630 560	20,926	20	1	21
	ukupno 3 615 920		cjelobrojni zbroj 111	ukupni broj dodatnih predstavnika 9	ukupni broj predstavnika 120

4. Odgovori će varirati.

Istražujte dalje

5. - 7. Vidi tablicu.

škola	školska populacija	idealna kvota	broj predstavnika (cijeli dio)	dodatni predstavnici	ukupan broj predstavnika na temelju Hamiltonove metode
Central City High	4 464	8,879	8	1	9
East High	3 782	7,523	7		7
West High	3 284	6,532	6		6
Hill High	1 842	3,664	3	1	4
Outland High	1 288	2,562	2	1	3
Sticks High	422	0,839	1		1
	ukupno 15 082		cjelobrojni zbroj 27	dodatni predstavnici 3	sve u svemu ukupno 30

8. Odgovori će varirati.

9.

škola	školska populacija	idealna kvota	broj predstavnika (cijeli dio)	dodatni predstavnici	ukupan broj predstavnika na temelju Hamiltonove metode
Central City High	4 464	7,626	7	1	8
East High	3 782	6,461	6		6
West High	3 284	5,610	5	1	6
Wide High	2 478	4,233	4		4
Hill High	1 842	3,147	3		3
Outland High	1 288	2,200	2		2
Sticks High	422	0,721	1		1
	ukupno 17 560		cjelobrojni zbroj 28	dodatni predstavnici 2	sve u svemu ukupno 30

Zbroj učeničke populacije je 17 560. Omjer zastupljenosti bit će

$$\frac{17\,560}{30} = 585{,}33 \approx 585.$$

10. Central City High, East High, Hill High i Outland High gube po jednog predstavnika. Promjena u zastupljenosti ravnomjerno je raspoređena na velike i male škole.

11. Odgovori će varirati.

Istraživanje pomoću kalkulatora

12. Ako neki od vaših učenika znaju programirati svoj kalkulator, neka napišu program za izračun rezultata pomoću Hamiltonove metode, ili u programu C^{+}, Java itd.

Istraživanje

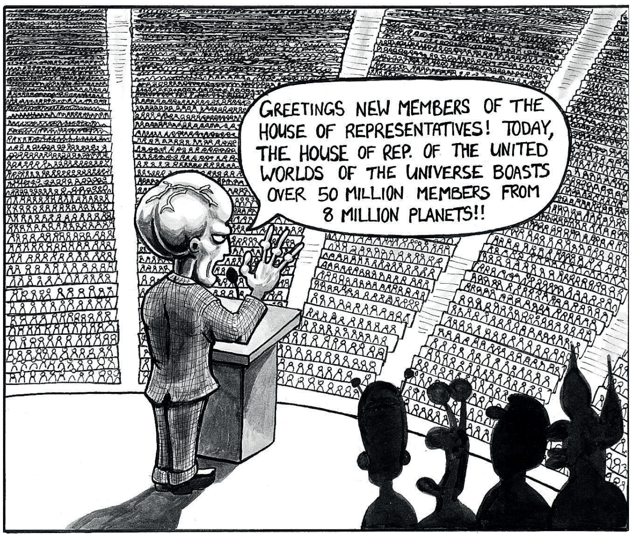
13. Prvi predsjednički veto stavio je George Washington na zakon koji bi propisao Hamiltonovu metodu za raspodjelu mandata.

14. Alexander Hamilton živio je od 1755. do 1804. godine. Bio je prvi američki ministar financija za vrijeme predsjednika G. Washingtona. Imao je vrlo zanimljivi dinamičan život. Rođen je u Britanskoj Zapadnoj Indiji, a poginuo je u dvoboju. Istražujući njegov život, učenici mogu uživati čitajući o njegovoj ulozi u ratu za neovisnost i stvaranju američke vlade.

15. Ustav SAD-a navodi da se službeni popis stanovništva mora provoditi svakih deset godina u svrhu raspodjele predstavnika naroda. Provođenje prvog popisa stanovništva bilo je prava muka, a metode su varirale od države do države. U prvom popisu stanovništva nije se pokušalo uključiti stanovništvo na sjeverozapadnom i jugozapadnom teritoriju. Iako se pokušalo prebrojiti sve stanovnike država, nisu bili uključeni američki domorodci. U broj za raspodjelu mandata nisu bili uključeni ni oni koji nisu plaćali porez te oni koji nisu mogli glasati. U svrhu raspodjele mandata robovi su se računali kao tri petine osobe.

1.11. Aktivnost 11.: Metoda raspodjele Thomasa Jeffersona

Rezultati prvog popisa stanovništva prijavljeni su Kongresu SAD 1791. Tada je počela i borba oko raspodjele mandata. Vodila se žestoka rasprava između dvaju suprotstavljenih tabora - Thomas Jefferson bio je vođa grupe republikanaca koji su bili u sukob s federalističkim snagama predvođenim Hamiltonom. Na kraju je Hamiltonova metoda bila odbijena, ne zbog matematičke pogrješke, nego jer je Jefferson uspješno tvrdio da



Jefferson je tvrdio da bi se njegova metoda mogla koristiti u dalekoj budućnosti.

Hamiltonova metoda ne ispunjava uvjete Ustava.

"Ali umjesto takvog *jednog* zajedničkog omjera, ili uniformnog djelitelja, kako je propisano Ustavom, u računu je [Hamiltonova metoda] primijenio *dva omjera*, barem za različite države ... A ako se primijene *dva* omjera, onda može i petnaest, i raspodjela postaje proizvoljna ..."

Jeffersonovu metodu prihvatila su oba doma Kongresa pa je ona potvrđena kao zakon 14. travnja 1792. Prijedlogu zakona trebalo je samo dva dana da bude usvojen u Zastupničkom domu, unatoč posljednjem pokušaju povećanja veličine Doma. Prema ovom prijedlogu zakona, svaki član Zastupničkog doma predstavljao bi 33.000 ljudi.

Jedan od razloga zašto je Jefferson preferirao svoju metodu bio je taj što je nudila metodu za raspodjelu koja je bila neovisna o veličini Doma ili broju stanovnika zemlje. Nasuprot tome, vjerovao je da se Hamiltonova metoda odnosi samo na raspodjelu 120 mjesta, bez navođenja pravila za određivanje raspodjele mandata koje bi se moglo primijeniti u sljedećim godinama. Jeffersonova metoda korištena je do 1841. i još se uvijek koristi ili se primjenjuje u uporabi u mnogim zemljama, uključujući Belgiju, Nizozemsku, Izrael, Lihtenštajn, Finsku, Njemačku, Brazil i Austriju.

Osmislio ju je 1878. belgijski odvjetnik **Victor D'Hondt** pa se ponegdje naziva D'Hondtova metoda, Hagenbach-Bischoffova metoda ili metoda **najvećih prosjeka** ili **najvećih djelitelja**.[5]

Jeffersonova metoda funkcionira na ovaj način.

- Prvo odaberite veličinu Doma koju želite podijeliti. (Veličinu Predstavničkog Doma određuju postojeći Dom i Senat.)

- Zatim izračunajte vrijednost za x tako da stanovništvo svake države podijeljeno s x daje racionalne brojeve koje zaokružite na niže, te da zbroj veličina Doma bude kakav želite. Svakoj državi je dodijeljen cijeli broj zastupnika. To rezultira odlukom da se njegov kvocijent

[5] T. Marošević: Hagenbach-Bischoffova metoda je proporcionalna izborna metoda s Hagenbach-Bischoffovom kvotom (još se zove Droop kvota); kod Hagenbach-Bischoffove metode se u njezinom drugom koraku zapravo koristi D'Hondtova metoda za raspodjelu preostalih mjesta nakon prvog koraka.

Stoga su D'Hondtova metoda i Hagenbach-Bischoffova metoda dvije različite metode;

Jeffersonova metoda je naziv u SAD-u za D'Hondtovu metodu. Ipak, Jeffersonova metoda daje svakoj državi barem jedno mjesto (kako je ovdje u tekstu opisano), dok D'Hondtova metoda može dodijeliti nekoj stranci nula mjesta. U tom smislu Jeffersonova metoda je mala modifikacija D'Hondtove metode.

zaokruži prema *dolje* osim, naravno, onih situacija kada bi vrijednost zaokružena prema dolje bila nula. U tom slučaju dodijelite državi jednog predstavnika. Cilj je pronaći djelitelja koji funkcionira.

Na kraju su se Jefferson i njegovi kolege složili da Zastupnički Dom treba imati 105 članova, koristeći djelitelj 33000.

Popis stanovništva iz 1790. godine

država	stanovništvo	Jeffersonova raspodjela državnih 105 mjesta
Connecticut	236 841	
Delaware	55 540	
Georgia	70 835	
Kentucky	68 705	
Maryland	278 514	
Massachusetts	475 327	
New Hampshire	141 822	
New Jersey	139 570	
New York	331 589	
North Carolina	353 523	
Pennsylvania	432 879	
Rhode Island	68 446	
South Carolina	206 236	
Vermont	85 533	
Virginia	630 560	
ukupno	3 615 920	

Jefferson je pronašao točnu raspodjelu za svaku državu

$$\mathrm{INT}\left(\frac{\text{stanovništvo}}{33\,000}\right).$$

(Zapamtite da je INT funkcija cijelog broja. To znači zaokruživanje prema dolje.) Da biste pronašli raspodjelu za Connecticut, pronađite $\mathrm{INT}\left(\frac{236\,841}{33\,000}\right)$. Prvo podijelite 236841 s 33000, što daje 7,177. Zatim pronađite INT(7,177) što je 7. Dakle, Connecticut bi dobio 7 predstavnika.

Razmotrite ovo . . .

1. Uporabite rezultate popisa iz 1790. godine da biste izračunali izvornu raspodjelu koristeći Jeffersonovu metodu.

   (Napomena: Vaš kalkulator može umjesto vas računati funkciju INT. Također možete koristiti popis funkcija vašeg kalkulatora ili proračunske tablice.)

2. Odredite zbroj brojeva predstavnika. Jeste li dobili više od izvornih 105 članova?

3. Je li Jeffersonova metoda bila povoljnija za velike ili male države?

4. Koja vam je metoda draža, Jeffersonova ili Hamiltonova? Zašto?

5. Je li 33000 najveći djelitelj koji daje gornju raspodjelu? Postoji li samo jedan djelitelj koji vrijedi ili postoji niz djelitelja koji će dati istu raspodjelu?

Učenici Central City High žele isprobati Jeffersonovu metodu i usporediti je s rezultatima Hamiltonove metode. Da bi koristili Jeffersonovu metodu, moraju pronaći djelitelja d takvoga da kada se broj učenika svake škole podijeli s d te se odrede cjelobrojne vrijednosti tih kvocijenata, zbroj tih vrijednosti bude željeni broj učenika u vijeću učenika.

(Zapamtite, uprava je htjela 30 učenika u učeničkom vijeću.)

Učenici su shvatili da žele odrediti vrijednost d tako da

$$\mathrm{INT}\left(\frac{4464}{d}\right)+\mathrm{INT}\left(\frac{3782}{d}\right)+\mathrm{INT}\left(\frac{3284}{d}\right)+\mathrm{INT}\left(\frac{1842}{d}\right)+\mathrm{INT}\left(\frac{1288}{d}\right)+\mathrm{INT}\left(\frac{422}{d}\right)=30.$$

Prvi djelitelj koji su pokušali bio je 400. Ovo daje

$$\mathrm{INT}\left(\frac{4464}{400}\right)+\mathrm{INT}\left(\frac{3782}{400}\right)+\mathrm{INT}\left(\frac{3284}{400}\right)+\mathrm{INT}\left(\frac{1842}{400}\right)+\mathrm{INT}\left(\frac{1288}{400}\right)+\mathrm{INT}\left(\frac{422}{400}\right)=36.$$

Rezultat s djeliteljem 400 bio je previsok, pa su pokušali s djeliteljem 422. Htjeli su osigurati da škola Sticks High ima barem jednog predstavnika.

$$\mathrm{INT}\left(\frac{4464}{422}\right)+\mathrm{INT}\left(\frac{3782}{422}\right)+\mathrm{INT}\left(\frac{3284}{422}\right)+\mathrm{INT}\left(\frac{1842}{422}\right)+\mathrm{INT}\left(\frac{1288}{422}\right)+\mathrm{INT}\left(\frac{422}{422}\right)=33.$$

Rezultat s djeliteljem 422 još uvijek nije dobar. Kako i prema Ustavu svaka država mora imati barem jednog zastupnika, učenici su predložili da i svaka škola koja završi s manje od jednog predstavnika ipak dobije svoga zastupnika pa su odlučili isprobati veći djelitelj.

Nakon nekoliko pokušaja, otkrili su da im djelitelj 469
daje učeničko vijeće s 30 mjesta ako dodijele jednog predstavnika i Sticks Highu.

Istražujte dalje

6. Uporabite rezultate s djeliteljem 469 za popunjavanje sljedeće tablice.

škola	učenička populacija	kvocijent	Jeffersonova raspodjela s 30 mjesta
Central City High	4 464		
East High	3 782		
West High	3 284		
Hill High	1 842		
Outland High	1 288		
Sticks High	422		

7. Što mislite u kojim će školama učenici biti najviše, a u kojim najmanje zadovoljni rezultatima Jeffersonove metode?

8. Usporedite rezultate korištenjem Jeffersonove metode raspodjele s rezultatima raspodjela pomoću Hamiltonove metode.

- Za koju od metoda možete reći da je fer i zašto?
- Koju metodu preferirate i zašto?

9. Koristite Jeffersonovu metodu za određivanje raspodjele kada su predstavnici škole Wide High pridruženi učeničkom vijeću. Učinite to za vijeće učenika od 30 članova.

škola	učenička populacija	kvocijent ($d =$)	Jeffersonova raspodjela s 30 mjesta
Central City High	4 464		
East High	3 782		
West High	3 284		
Wide High	2 478		
Hill High	1 842		
Outland High	1 288		
Sticks High	422		

Istraživanje pomoću kalkulatora

Učenici su ubrzo uvidjeli kako je velik i težak posao računanja raspodjele morao biti prije upotrebe kalkulatora i računala! Ako imate kalkulator koji se može programirati, možete napisati program za izračunavanje raspodjele koristeći Jeffersonovu metodu ili možete koristiti program koji vam ponudi vaš učitelj.

10. Uporabite Jeffersonov program kako biste odredilili raspodjelu za vijeće učenika s 32 mjesta. Kako se ova raspodjela može usporediti s onom od 30 mjesta u pitanju 6.? Je li neka od škola bolje ili manje zastupljena? Koje škole imaju koristi od veće veličine vijeća?

škola	učenička populacija	kvocijent ($d =$)	Jeffersonova raspodjela s 32 mjesta
Central City High	4 464		
East High	3 782		
West High	3 284		
Hill High	1 842		
Outland High	1 288		
Sticks High	422		

11. Koristite Jeffersonov program za raspodjelu mjesta u učeničkom vijeću od 32 člana za sljedeću školsku godinu, kada će se škola Wide High pridružiti vijeću učenika.

škola	učenička populacija	kvocijent ($d =$)	Jeffersonova raspodjela s 32 mjesta
Central City High	4 464		
East High	3 782		
West High	3 284		
Wide High	2 478		
Hill High	1 842		
Outland High	1 288		
Sticks High	422		

12. Eksperimentirajte s različitim djeliteljima i veličinama vijeća učenika dok ne pronađete veličinu i raspodjelu koju biste željeli preporučiti drugim učenicima i upravi. Upotrijebite donju tablicu da zabilježite svoje rezultate i date objašnjenje zašto preferirate raspodjelu koju ste odabrali.

škola	učenička populacija	kvocijent ($d =$)	Jeffersonova raspodjela s ...... mjesta
Central City High	4 464		
East High	3 782		
West High	3 284		
Wide High	2 478		
Hill High	1 842		
Outland High	1 288		
Sticks High	422		

Istraživanje

13. Istražite rane Republikance i Federaliste. Što svaka grupa želi sačuvati?

14. Istražite Thomasa Jeffersona. Koji je njegov doprinos povijesti SAD-a?

* * * * *

Kutak za učitelja

Jeffersonova metoda je prva od metoda "djelitelja", koja uključuje pronalaženje prikladnog djelitelja kako bi raspodjela uspjela.

Ako je moguće, potaknite svoje učenike na služenje kalkulatorom s listama ili računalne proračunske tablice. Ako nemate pristup ovoj tehnologiji, zamolite pola razreda da to učini s pitanjem 10., a druga polovicu s pitanjem 11. Dvije grupe mogu međusobno razmijeniti svoje rezultate.

Svaki učenik treba ispuniti tablicu u pitanju 12. i razviti svoju raspodjelu.

Odgovori

Razmotrite ovo ...

1.,2.

država	stanovništvo	Jeffersonova raspodjela državnih 105 mjesta
Connecticut	236 841	7
Delaware	55 540	1
Georgia	70 835	2
Kentucky	68 705	2
Maryland	278 514	8
Massachusetts	475 327	14
New Hampshire	141 822	4
New Jersey	179 570	5
New York	331 589	10
North Carolina	353 523	10
Pennsylvania	432 879	13
Rhode Island	68 446	2
South Carolina	206 236	6
Vermont	85 533	2
Virginia	630 560	19
ukupno	3 615 920	105

3. Odgovori će varirati. Povijest je pokazala da Jeffersonova metoda ide u prilog većim državama. Učenici će to dalje istražiti u kasnijim aktivnostima.

4. Odgovori će varirati.

5. Raspon djelitelja je od 32 139 do 33 158.

Istražujte dalje

6.

škola	učenička populacija	kvocijent	Jeffersonova raspodjela s 30 mjesta
Central City High	4464	$9,518$	9
East High	3 782	$8,064$	8
West High	3 284	$7,002$	7
Hill High	1 842	$3,928$	3
Outland High	1 288	$2,746$	2
Sticks High	422	$0,09$	1

7. Odgovori će varirati.

8.

škola	Hamiltonova razdioba	Jeffersonova raspodjela s 30 mjesta
Central City High	9	9
East High	7	8
West High	6	7
Hill High	4	3
Outland High	3	2
Sticks High	1	1

Postoje različita mišljenja o tome koja je metoda pravednija. Potaknite učenike na raspravu o tome. Aktivnost 13. sadrži više rasprava o pravednosti metoda, a bit će ih i o kriterijima koji će se razviti. Potaknite učenike da sada osmisle vlastite kriterije pravednosti.

9. Raspon djelitelja je od 541 do 547.

škola	učenička populacija	kvocijent	Jeffersonova raspodjela s 30 mjesta
Central City High	4464	$8,161$	8
East High	3 782	$6,914$	6
West High	3 284	$6,004$	6
Wide High	2 478	$4,53$	4
Hill High	1 842	$3,367$	3
Outland High	1 288	$2,355$	2
Sticks High	422	$0,771$	1

Istraživanje pomoću kalkulatora

10. Raspon djelitelja koji rade je od 430 do 446.

škola	učenička populacija	kvocijent	Jeffersonova raspodjela s 32 mjesta
Central City High	4464	$10,262$	10
East High	3 782	$8,6943$	8
West High	3 284	$7,5494$	7
Hill High	1 842	$4,2345$	4
Outland High	1 288	$2,9609$	2
Sticks High	422	$0,97011$	1

Najveća Central City High i srednje velika Hill High škola dobile su po jednog predstavnika.

11. Jedini djelitelj je 496.

škola	učenička populacija	kvocijent	Jeffersonova raspodjela s 32 mjesta
Central City High	4464	9	9
East High	3 782	$7,625$	7
West High	3 284	$6,621$	6
Wide High	2 478	$4,996$	4
Hill High	1 842	$3,7137$	3
Outland High	1 288	$2,5958$	2
Sticks High	422	$0,85\,51$	1

12. Odgovori će varirati.

Istraživanje

13. Hamilton i Jefferson bili su vođe prvih dviju političkih stranaka u Sjedinjenim Američkim Državama. Isprva se mislilo o uspostavi vlade nadređenih osoba koje bi bile iznad stranke, ali Hamilton i Jefferson ubrzo su otkrili da im trebaju pristaše njihovih politika. U vanjskim poslovima, Hamilton i federalisti željeli su zadržati bliske veze s Engleskom. Jefferson i republikanci bili su više za jačanje stare privrženosti Francuskoj. Sporili su se od 1791. do 1793. godine, nastojeći jedan drugoga politički eliminirati. Svaki je pokušao predsjednika Washingtona pridobiti na svoju stranu.

14. Thomas Jefferson živio je od 1743. do 1826. godine. Bio je treći predsjednik Sjedinjenih Država, glavni autor Deklaracije o neovisnosti te iznimno utjecajan politički filozof.

Referentna bilješka

1. Thomas Jefferson - vidi [14].

1.12. Aktivnost 12.: Metoda raspodjele Daniela Webstera

Jeffersonova metoda korištena je za raspodjelu u Zastupničkom domu od 1792. do 1841. godine, ali od 1830. godine političari su se sporili oko metode raspodjele mandata koja bi bila pravednija. John Quincy Adams, u to vrijeme predstavnik iz Massachusetts i bivši predsjednik SAD-a, napisao je u svojim memoarima:

Hvala nebesima, Daniel Webster i osnivači nisu bili vješti u računici.

Proveo sam besanu noć. Nezakonitost metode kojom se djelomično i nepravedno realizira raspodjela predstavnika jako je utjecala na mene, uznemirila me tako da nisam mogao oka sklopiti.

Adams je mislio na prijedlog zakona čiji je autor James K. Polk iz Tennesseeja, koji je koristio Jeffersonovu metodu raspodjele s povećanim djeliteljem od 47 700. Polkov račun poboljšao je zastupljenost nekoliko ključnih država, ali je oštetio zastupljenost nekih najstarijih država Nove Engleske.

Problem je proizašao iz rasta stanovništva SAD-a. Naime, zemlja od 15 država narasla je na njih 24, dok je popis stanovništva iz 1790. godine brojio 3 615 920, stanovnika SAD-a, a iz 1830. godine njih 12 866 020. Veličina Zastupničkog doma povećala se na 240 članova, a djelitelj se promijenio s 33 000 na 47 700.

Vodilo se bezbroj rasprava o raspodjeli mandata, a pojavili su se i mnogi prijedlozi novih metoda koje su također bile odbačene kao nepravedne. Povijesni dokazi pokazali su da Jeffersonova metoda favorizira veće države. Mnogi ljudi i političari smatrali su da je vrijeme za novu metodu.

Ona se pojavila 1832. godine, a razvio ju je Daniel Webster. Webster se referirao na Ustav i na argumente Washingtona, Hamiltona i Jeffersona iz prve rasprave o raspodjeli mandata. Savjete je dobivao i od matematičara diljem zemlje i na kraju predložio sljedeću metodu:

Neka pravilo bude da stanovništvo svake države bude podijeljeno zajedničkim djeliteljem i pored broja članova koji proizlaze iz takve podjele, član će biti dopušten svakoj državi čiji udio premašuje manji dio djelitelja.

Websterova metoda slična je Jeffersonovoj metodi po ulozi djelitelja koji je potreban za odabrati željenu veličinu Doma. Ali umjesto da se uvijek zaokružuje prema dolje, kao u Jeffersonovoj metodi, decimalni dijelovi se zaokružuju prema standardnoj konvenciji - dolje za decimalni dio manji od 0,5, a prema gore za decimalni dio od 0,5 i naviše.

Sljedeća tablica prikazuje broj stanovnika u devet odabranih država 1830. godine.

država	stanovništvo	kvocijent stanovništvo / (49 800)	raspodjela
New York	1 918 578	38,526	39
Pennsylvania	1 348 072		
Kentucky	621 832		
Vermont	280 657		
Louisiana	171 904		
Illinois	157 147		
Missouri	130 491		
Mississippi	110 358		
Delaware	75 432		
ukupno	4 814 471		

Webster je prvi predložio korištenje ove metode s djeliteljem od 49 800. Kako bi odredio raspodjelu mandata za New York, podijelio je 1 918 578 s 49 800 da bi dobio 38,526, što je zatim zaokružio na 39.

Razmotrite ovo $\cdots$

1. Na temelju stanovništva navedenog u tablici, razdijelite mandate predstavnika država primjenom Websterove metode.
2. Čini li se ova metoda fer? Čini li vam se da favorizira velike ili male države?
3. Koju metodu preferirate: Jeffersonovu, Hamiltonovu ili Websterovu? Zašto?
4. Možda se čini da je Websterovu metodu teško izraziti formulom, ali postoji mali trik za to. Svaki broj u a) - d) zaokružite prema standardnoj konvenciji.

   a) 3,124 b) 4,00 c) 5,523 d) 8,99

   Sada za svaki rezultat n pronađite $\text{INT}(n + 0,5)$. Što primjećujete?

   Učenici Central City Higha odlučili su isprobati Websterovu metodu. Znaju da treba pronaći djelitelja d tako da kada se broj članova svake škole podijeli s d a dobiveni kvocijent zaokruži, zbroj svih zaokruženih kvocijenata bit će jednak 30. To bi mogli napisati kao jednadžbu

$$\text{INT}\left(\frac{4464}{d}+0,5\right)+\text{INT}\left(\frac{3782}{d}+0,5\right)+\text{INT}\left(\frac{3284}{d}+0,5\right)+\text{INT}\left(\frac{1842}{d}+0,5\right)+\text{INT}\left(\frac{1288}{d}+0,5\right)$$
$$+\text{INT}\left(\frac{422}{d}+0,5\right)=30.$$

   Neki od učenika odlučili su započeti s djeliteljem 469, što je funkcioniralo za Jeffersonovu metodu.

škola	učenička populacija	Websterova raspodjela s 30 mjesta ($d = 469$)
Central City High	4 464	10
East High	3 782	8
West High	3 284	7
Hill High	1 842	4
Outland High	1 288	3
Sticks High	422	1
ukupno		33

```
Ukupno 33 je preveliko. Koji biste sljedeći djelitelj isprobali?
```

5. Pronađite djelitelj koji će zadovoljiti gornju jednadžbu za raspodjelu učeničkog vijeća.

6. Ispunite tablicu pokazujući raspodjelu koja rezultira korištenjem Websterove metode.

škola	učenička populacija	Websterova raspodjela s 30 mjesta
Central City High	4 464	
East High	3 782	
West High	3 284	
Hill High	1 842	
Outland High	1 288	
Sticks High	422	

Istražujte dalje

7. Koristite Websterovu metodu za raspodjelu mjesta u učeničkom vijeću s 32 mjesta. Kako ovu raspodjelu usporediti s raspodjelom koju ste izračunali za 30 mjesta? Je li neka od škola bolje ili manje zastupljena? Koje škole imaju koristi od veće veličine vijeća?

škola	učenička populacija	Websterova raspodjela s 32 mjesta
Central City High	4 464	
East High	3 782	
West High	3 284	
Hill High	1 842	
Outland High	1 288	
Sticks High	422	

8. Koristite Websterovu metodu za raspodjelu mjesta u učeničkom vijeću s 30 mjesta kada se Wide Higt pridruži vijeću.

škola	učenička populacija	Websterova raspodjela s 30 mjesta
Central City High	4 464	
East High	3 782	
West High	3 284	
Wide High	2 478	
Hill High	1 842	
Outland High	1 288	
Sticks High	422	

Metoda Johna Quincyja Adamsa

Odaberite veličinu Doma koja će se distribuirati. Pronađite djelitelj d na takav način da najmanji cijeli brojevi koji sadrže količnike država čine potreban zbroj. Dodijelite svakoj državi njezin cijeli broj.

9. John Quincy Adams također je predložio metodu raspodjele mandata koja je slična Jeffersonovoj metodi osim što se kod Adamsove metode kvocijenti uvijek zaokružuju na više (tj. na najmanji prirodni broj koji je veći ili jednak kvocijentu). Eksperimentirajte s njegovom metodom koristeći podatke iz okruga Broad.

škola	učenička populacija	Adamsova raspodjela s s 30 mjesta ($d =$)	Adamsova raspodjela s 32 mjesta ($d =$)
Central City High	4 464		
East High	3 782		
West High	3 284		
Hill High	1 842		
Outland High	1 288		
Sticks High	422		

škola	učenička populacija	Adamsova raspodjela s s 30 mjesta ($d =$)	Adamsova raspodjela s 32 mjesta ($d =$)
Central City High	4 464		
East High	3 782		
West High	3 284		
Wide High	2 478		
Hill High	1 842		
Outland High	1 288		
Sticks High	422		

10. Favorizira li Adamsova metoda velike ili male populacije?

Istraživanje pomoću kalkulatora

11. Učenici Central City Higha ubrzo su shvatili da je Websterova metoda, poput Jeffersonove metode. Bila je savršena za programiranje njihovih kalkulatora. Napišite vlastiti program ili koristite program koji je pripremio vaš učitelj.

12. Uporabite Websterovu metodu za stvaranje vlastite raspodjele učeničkog vijeća. Eksperimentirajte s različitim djeliteljima i veličinama vijeća dok ne pronađete veličinu i raspodjelu koju biste htjeli preporučiti drugim učenicima i upravi. Uporabite tablicu kako biste predstavili svoje rezultate i obrazložite zašto preferirate raspodjelu koju ste odabrali.

škola	učenička populacija	Websterova raspodjela s . . . mjesta
Central City High	4 464	
East High	3 782	
West High	3 284	
Wide High	2 478	
Hill High	1 842	
Outland High	1 288	
Sticks High	422	

13. Adamsova metoda također je jednostavna za korištenje u kalkulatoru koji se može programirati. Napravite vlastiti program ili uporabite onaj koji vaš učitelj nudi za ostvariti vlastitu raspodjelu vijeća učenika. Eksperimentirajte različitim djeliteljima i veličinama vijeća dok ne pronađete veličinu i raspodjelu koju biste preporučili drugim učenicima i administraciji. Upotrijebite tablicu kako biste predstavili svoje rezultate i obrazložite zašto preferirate raspodjelu koju ste odabrali.

škola	učenička populacija	Adamsova raspodjela s ... mjesta
Central City High	4 464	
East High	3 782	
West High	3 284	
Wide High	2 478	
Hill High	1 842	
Outland High	1 288	
Sticks High	422	

Istraživanje

14. Do godine 1832. Daniela Webstera mnogi su ljudi smatrali najvećim čovjekom u Americi, iako su ga drugi zvali Black Dan. Istražite život ovoga američkog političara iz 19. stoljeća i saznajte više o njemu.

15. Istražite nešto o Johnu Quincyju Adamsu. Što je on doprinio ranoj američkoj povijesti?

* * * * *

Kutak za učitelja

U ovoj aktivnosti učenici istražuju metodu raspodjele mandata Daniela Webstera. Njegova metoda čini se najintuitivnijom od metoda djelitelja jer uključuje zaokruživanje na konvencionalan način. Pitanja 9. i 10. istražuju metodu Johna Quincyja Adamsa. Mogu se koristiti kao nastavak aktivnosti ili se mogu preskočiti.

Potaknite učenike da koriste kalkulatore za ovu aktivnost. Mnogi kalkulatori imaju funkciju koja će zaokružiti brojeve prema standardnoj konvenciji. Ako učenici radeći s kalkulatorima koji se mogu programirai ili proračunskom tablicom kalkulatora mogu unijeti populacije u jednoj listi, izračunajte kvocijent u drugoj, zaokružite ga u trećoj, a zatim upotrijebite funkcije kalkulatora ili proračunske tablice kako biste pronašli zbroj ove posljednje liste. Uistinu je nevjerojatno da su prvi političari izračunali ove raspodjele bez pomoći kalkulatora i računala. Moramo se diviti njihovoj ustrajnosti.

Odgovori

Razmotrite ovo ...

1.

država	stanovništvo	kvocijent stanovništvo / (49 800)	raspodjela
New York	1 918 578	38,526	39
Pennsylvania	1 348 072	27,07	27
Kentucky	621 832	12,487	12
Vermont	280 657	5,636	6
Louisiana	171 904	3,452	3
Illinois	157 147	3,156	3
Missouri	130 491	2,619	3
Mississippi	110 358	2,216	2
Delaware	75 432	1,5157	2
ukupno	4 814 471		

2. Učenici će imati svoje mišljenje o tome koja je metoda najpravednija.

3. Odgovori će varirati.

4. a) 3 b) 4 c) 6 d) 9

U 4. pitanju učenici otkrivaju da formula $\mathrm{INT}(n+0,5)$ daje vrijednost n zaokruženu standardnom konvencijom. Neki kalkulatori također imaju funkciju zaokruživanja.

5. Vrijedi za svaki djelitelj između 506 i 515.

6.

škola	učenička populacija	Websterova raspodjela s 30 mjesta
Central City High	4 464	9
East High	3 782	7
West High	3 284	6
Hill High	1 842	4
Outland High	1 288	3
Sticks High	422	1

Ako učenici imaju funkciju popisa/liste na svojim kalkulatorima, mogu pojednostaviti svoj unos populacije.

Istražujte dalje

7. Za raspodjelu vijeća s 32 mjesta, koristite djelitelj 471. East High i West High dobit će po jedno mjesto.

škola	učenička populacija	Websterova raspodjela s 32 mjesta
Central City High	4 464	9
East High	3 782	8
West High	3 284	7
Hill High	1 842	4
Outland High	1 288	3
Sticks High	422	1

8. Za djelitelj 585 dobija se sljedeća raspodjela:

škola	učenička populacija	Websterova raspodjela s 30 mjesta
Central City High	4 464	8
East High	3 782	6
West High	3 284	6
Wide High	2 478	4
Hill High	1 842	3
Outland High	1 288	2
Sticks High	422	1

9. Raspon djelitelja dan je za svaku raspodjelu.

škola	učenička populacija	Adamsova raspodjela s 30 mjesta (548-557)	Adamsova raspodjela s 32 mjesta (496-540)
Central City High	4 464	9	9
East High	3 782	7	8
West High	3 284	6	7
Hill High	1 842	4	4
Outland High	1 288	3	3
Sticks High	422	1	1

škola	učenička populacija	Adamsova raspodjela s 30 mjesta - npr. 640 (638-643)	Adamsova raspodjela s 32 mjesta - npr. 620 (620-630)
Central City High	4 464	7	8
East High	3 782	6	7
West High	3 284	6	6
Wide High	2 478	4	4
Hill High	1 842	3	3
Outland High	1 288	3	3
Sticks High	422	1	1

10. Adamsova metoda za raspodjelu favorizira male populacije.

Istraživanje pomoću kalkulatora

11. Program se može napisati na kalkulatoru s mogućnošću programiranja.
12. Odgovori će varirati.
13. Odgovori će varirati.

Istraživanje

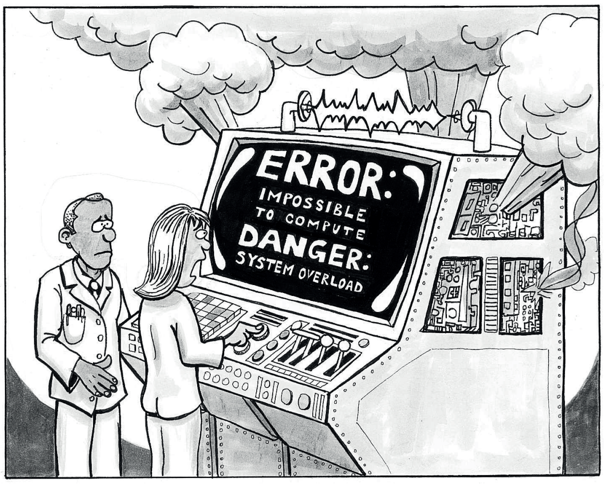
14. Daniel Webster bio je jedan od najistaknutijih političara svog vremena, briljantan govornik i najveći zagovornik američkog nacionalizma svog doba. Služio je u Domu i u Senatu postavši državni tajnik u srpnju 1850. godine pod predsjednikom Millardom Fillmoreom. Bio je "Black Dan" za one koji su ga vidjeli kao čovjeka sklonom kompromisu, primjerice po pitanju ropstva, kako bi sačuvao Uniju. Njegov osobni život također je pridonio njegovom imidžu "Black Dana" jer je živio ekstravagantno. Uvijek je bio u dugovima, a od bankrota su ga spasili bogati podupiratelji iz tzv. Nove Engleske koji su platili njegove račune.
15. John Quincy Adams bio je šesti predsjednik Sjedinjenih Država. Služio je u Senatu Massachusettsa kao i Senatu SAD-a. Bio je i američki veleposlanik u Nizozemskoj, Pruskoj i Rusiji te državni tajnik Jamesu Monroeu. Nakon svog predsjedničkog mandata, vratio se u Zastupnički dom gdje je služio devet uzastopnih mandata. Adams je umro 23. veljače 1848. godine. Bio je posljednji preživjeli državnik američke revolucije.

Referentne bilješke

1. John Quincy Adams - vidi [1].
2. Daniel Webster - vidi [21].

1.13. Aktivnost 13.: Je li fer?

Kako se odlučiti je li metoda raspodjele mandata predstavnika fer? U zadnjih nekoliko aktivnosti, ispitivali smo metode Hamiltona, Jeffersona, Webstera i Adamsa. Primijenili smo svaku metodu za raspodjelu mjesta za učenike u vijeću Broad okruga, a u svakoj smo se aktivnosti pitali je li ta metoda bila fer. Koja vam se metoda čini najpravednijom?



"Samo sam želio da se izračuna fer metoda raspodjele mandata."

Ova pitanja muče i političare koji traže najpošteniju metodu raspodjele mandata. Daniel Webster zaključio je da nijedna metoda ne može posve točno i pravedno raspodijeliti mandate. Također je tvrdio da najpravednija metoda nije samo stvar nečijeg mišljenja nego i matematičke sigurnosti.

Jedna od prvih mjera koju su koristili Hamiltonovi sljedbenici za procjenu pravednosti bilo je "Pravilo trice". Tako se zove jer su uključene tri veličine: ukupno stanovništvo, stanovništvo države i broj zastupnika koje treba podijeliti. **Idealna kvota** za svaku državu odredi se ili izračuna dijeljenjem stanovništva države s ukupnim stanovništvom, a zatim množeći s ukupnim brojem zastupnika koje treba podijeliti. Kada koristite Hamiltonovu metodu raspodjele mandata, izračunavate idealnu kvotu svake države. To će ostati konstantno za bilo koju veličinu Doma, bez obzira na metodu raspodjele koju koristite. Ova idealna kvota razlikuje se od količine koju dobijete kada podijelite stanovništvo države prema određenom djelitelju koji koristite u metodi raspodjele mandata. To čini metode djelitelja različitima od Hamiltonove metode.

Nakon što ste pronašli kvotu za svaku državu, usporedite raspodjelu mandata za svaku državu prema njenoj kvoti. Ako metoda zadovoljava kvotu, svaka će država dobiti najmanje toliko zastupnika kao svoju idealnu kvotu zaokruženu i ne više zastupnika od svoje zaokružene idealne kvote. Na primjer, ako je idealna kvota države 13,459, tada bi država trebala dobiti ne manje od 13 i ne više od 14 zastupnika. Ako dobije manje od 13 ili više od 14 zastupnika, takva raspodjela mandata krši kvotu. Neke metode nikad ne krše kvotu, dok druge to povremeno čine.

Učenici škole Central City High odlučili su pronaći fer metodu raspodjele u učeničkom vijeću. Krenuli su u posjet sestrinskoj školi u okrugu Dale koja je upravo uvela učeničko vijeće. Učenici Valley Higha jedva su čekali podijeliti svoje podatke.

Učenička populacija okruga Dale u školama

škola	učenička populacija
North High	9061
South High	7179
Valley High	5259
Meadow High	3319
Ridge High	1182
ukupno	26000

Razmotrite ovo ...

1. Izračunajte omjer zastupljenosti za svaku veličinu vijeća u tablici. U tu svrhu podijelite ukupnu učeničku populaciju s danim brojem mjesta.

broj mjesta	26	27	40
omjer zastupljenosti			

2. Izračunajte idealne kvote za svaku veličinu vijeća u tablici. Da biste to učinili, podijelite svaku populaciju prema ukupnom broju populacije (26000) i pomnožite s brojem članova u vijeću.

škola	**idealna kvota za 26 mjesta**	**idealna kvota za 27 mjesta**	**idealna kvota za 40 mjesta**
North High	9,061	9,4095	13,94
South High	7,179	7,4551	11,045
Valley High	5,259	5,4613	8,0908
Meadow High	3,319	3,4467	5,1062
Ridge High	1,182	1,2275	1,8185

škola	**26 mjesta**	**27 mjesta**	**40 mjesta**
North High			
South High			
Valley High			
Meadow High			
Ridge High			

3. Primjenom Hamiltonove metode izračunajte broj predstavnika koje će svaka škola imati u vijeću učenika s 26 mjesta, 27 mjesta i 40 mjesta.

4. Čini li vam se da Hamiltonova metoda zadovoljava kvotu? Hoće li Hamiltonova metoda uvijek zadovoljiti kvotu? Objasnite!

5. Mislite li da će učenici Meadow Higha biti zadovoljni raspodjelom s 27 mjesta? Objasnite!

6. Problem s kojim se Meadow High suočio kada je veličina vijeća povećana s 26 na 27 naziva se *Alabama paradoks*. Objasnite ovaj paradoks svojim riječima.

7. Ako veličina vijeća učenika ostane fiksna s 26 mjesta kada školski okrug raste, hoće li se promjeniti raspodjela ako se broj učenika povećava? Pretpostavimo da je udio učenika u svakoj školi ostao konstantan.

Istražujte dalje

8. Primjenite Jeffersonovu metodu za raspodjelu mjesta u učeničkom vijeću okruga Dale.

Raspodjela korištenjem Jeffersonove metode

škola	**26 mjesta** ($d = ?$)	**27 mjesta** ($d = ?$)	**40 mjesta** ($d = ?$)
North High			
South High			
Valley High			
Meadow High			
Ridge High			

- Čini li vam se da Jeffersonova raspodjela zadovoljava kvotu?
- Čine li vam se ovi rezultati fer? Nastaju li problemi zbog povećanja veličine vijeća učenika?
- Ako veličina vijeća učenika ostane fiksna na 26 mjesta kada školski okrug naraste, hoće li se raspodjela mijenjati s povećanjem broja učenika? Pretpostavite da udio učenika u svakoj školi ostaje konstantan.

9. Primjenite Websterovu metodu za raspodjelu mjesta u učeničkom vijeću okruga Dale.

Raspodjela korištenjem Websterove metode

škola	**26 mjesta** ($d = ?$)	**27 mjesta** ($d = ?$)	**40 mjesta** ($d = ?$)
North High			
South High			
Valley High			
Meadow High			
Ridge High			

- Čini li vam se da Websterova raspodjela zadovoljava kvotu?
- Čine li vam se ovi rezultati fer? Nastaju li problemi zbog povećanja veličine vijeća učenika?
- Ako veličina vijeća učenika ostane fiksna na 26 mjesta kada školski okrug naraste, hoće li se raspodjela mijenjati s povećanjem broja učenika? Pretpostavite da udio učenika u svakoj školi ostaje konstantan.

10. Primjenite Adamsovu metodu za raspodjelu mjesta u učeničkom vijeću okruga Dale.

Raspodjela primjenom Adamsove metode

škola	**26 mjesta** ($d = ?$)	**27 mjesta** ($d = ?$)	**40 mjesta** ($d = ?$)
North High			
South High			
Valley High			
Meadow High			
Ridge High			

- Čini li vam se da Adamsova raspodjela zadovoljava kvotu?

- Čine li vam se ovi rezultati fer? Nastaju li problemi zbog povećanja vijeća učenika?
- Ako veličina vijeća učenika ostane fiksna na 26 mjesta kada školski okrug naraste, hoće li se raspodjela mijenjati s povećanjem broja učenika? Pretpostavite da udio učenika u svakoj školi ostaje konstantan.

Istraživanje pomoću kalkulatora

11. Učenici Central City Higha također su pokušavali prikupiti informacije koje bi im pomogle u donošenju odluke o raspodjeli učeničkog vijeća. Na internetu su pronašli neke zanimljive podatke iz okruga Four Corners Water. Koristite Websterovu metodu i svoj kalkulator za raspodjelu mjesta za odbor s 35 mandata u okrugu Four Corners Water.

okrug	**populacija**	**broj predstavnika ($d =$?)**	**idealna kvota**
South East okrug (SE)	70653		
North West okrug (NW)	117404		
North East okrug (NE)	210923		
South West okrug (SW)	1194456		
ukupno	1593436		

- Izračunajte idealnu kvotu za svaki dio županije. Zadovoljava li u ovom slučaju Websterova metoda kvotu?
- Čini li vam se ovo kao fer raspodjela? Objasnite!

* * * * *

Kutak za učitelja

Ova aktivnost istražuje neke kriterije pravednosti, kvote i paradoks Alabame. Učenici će naučiti više o paradoksu Alabame i drugim paradoksima u Aktivnosti 14. Učenicima objasnite značenje riječi "paradoks". Ova se aktivnost može primijeniti na nekoliko načina.

- Možete dopustiti učenicima da izračunaju raspodjele mandata koristeći metode iz triju prethodnih aktivnosti. Primijenite četiri metode u istoj aktivnosti. Učenici će se bolje upoznati s njima i moći će ih uspoređivati. Ako učenici koriste kalkulatorske programe, pronalaženje raspodjele ne će im oduzeti previše vremena.
- Ako je matematika izračunavanja raspodjele mandata učenicima preteška, možete im dati djelitelje za svaku raspodjelu. Napišite djelitelje na ploču kako bi ih svaki učenik znao.
- Druga mogućnost je dati učenicima primjer djelitelja nakon ove aktivnosti. Ovaj primjer sadrži sve raspodjele potrebne za završavanje aktivnosti.

Razmotrite ovo ...

1.

broj mjesta	26	27	40
omjer reprezentacije	1000:1	963:1	650:1

2. Ako učenici imaju kalkulatore s funkcijom unosa popisa/lista, onda je ovaj izračun prilično jednostavan. Unesite školske populacije na jednom popisu, a na drugom popisu podijelite prvi popis s 26 000. Dobivenom kvotom, možete pomnožiti unose na drugom popisu s potrebnim veličinama vijeća.

škola	idealna kvota za 26 mjesta	idealna kvota za 27 mjesta	idealna kvota za 40 mjesta
North High	9,061	9,4095	13,94
South High	7,179	7,4551	11,045
Valley High	5,259	5,4613	8,0908
Meadow High	3,319	3,4467	5,1062
Ridge High	1,182	1,2275	1,8185

3. Raspodjela korištenjem Hamiltonove metode

škola	26 mjesta	27 mjesta	40 mjesta
North High	9	9	14
South High	7	8	11
Valley High	5	6	8
Meadow High	4	3	5
Ridge High	1	1	2

4. Hamiltonova metoda zadovoljava kvote za sve veličine učeničkih vijeća. Zapravo, uvijek zadovoljava kvotu.

5. Učenici u Meadow High mogu smatrati da je metoda nepoštena za 27 mjesta. Iako se je vijeće učenika povećalo i nije bilo promjena u broju stanovnika, Meadow High je izgubio mjesto.

6. Alabama paradoks nastaje kada se veličina doma poveća, a to povećanje uzrokuje da država izgubi mjesto. O tome se detaljnije govori u Aktivnosti 14. Potaknite svoje učenike da dalje istražuju i otkriju kako se to moglo dogoditi.

7. Na Hamiltonovu metodu ne utječe porast reprezentativne populacije. Ovo svojstvo Hamiltonove metode može se dokazati na sljedeći način:

   Dokaz: Pretpostavimo da je idealna kvota za svaku državu $\frac{x_i}{x}s$ gdje je x_i broj stanovnika u svakoj državi, x je ukupan broj stanovnika, a s je broj mjesta. Ako se populacija poveća ili smanji za faktor k, tada je nova ukupna populacija kx.
   Ako je relativni udio stanovništva za svaku državu ostao konstantan, tada je nova populacija svake države dana s $\frac{x_i}{x} \cdot kx = kx_i$. Dakle, nova je idealna kvota $\frac{kx_i}{kx}s = \frac{x_i}{x} \cdot s$, koja je ista kao izvorna idealna kvota.

Istražujte dalje

8. Raspodjela korištenjem Jeffersonove metode

škola	**26 mjesta** ($d = 906$)	**27 mjesta** ($d = 897$)	**40 mjesta** ($d = 600$)
North High	10	10	15
South High	7	8	11
Valley High	5	5	8
Meadow High	3	3	5
Ridge High	1	1	1

- Jeffersonova metoda ne zadovoljava kvotu za vijeće od 40 mjesta. Broj predstavnika za North High trebali bi biti 13 ili 14.
- Odgovori će se razlikovati. Ne čini se da Jeffersonova metoda ima problem kao što je paradoks Alabame.
- Raspodjela mandata ostaje ista kako se broj stanovnika proporcionalno povećava. Ovo se može dokazati na slijedeći način:

Dokaz: `Razmotrimo jednadžbu (1)` Σ `INT` $\dfrac{x_i}{d_1} = s$ `gdje je` x_i `populacija u` i`-toj državi, a` d_1 `je djelitelj koji daje traženu veličinu Doma od` s `mjesta. Pretpostavimo da se ukupna populacija promijeni na` kx`. Tada se stanovništvo u državi` i `mijenja u` kx_i`. Dakle, trebate pronaći djelitelj` d_2 `tako da je` Σ `INT` $\dfrac{kx_i}{d_2} = s$`. Usporedba ove jednadžbe s gornjom jednadžbom (1) pokazuje da` d_2 `mora biti jednak` kd_1`. Prema tome, dodjela za svaku državu ostaje konstantna INT` $\dfrac{x_i}{d_1}$.

9. Raspodjela korištenjem Websterove metode

škola	**26 mjesta** ($d = 957$)	**27 mjesta** ($d = 956$)	**40 mjesta** ($d = 671$)
North High	9	9	14
South High	8	8	11
Valley High	5	6	8
Meadow High	3	3	5
Ridge High	1	1	2

- Čini se da u ovom primjeru Websterova metoda zadovoljava kvotu. U kasnijem problemu, učenici će otkriti da Websterova metoda ne zadovoljava uvijek kvotu.
- Čini se da je Websterova metoda fer. Ne postoje problemi povezani s povećanjem veličine vijeća.
- Websterova raspodjela mandata ostat će ista kako populacija bude rasla. Dokaz je sličan dokazu za Jeffersonovu raspodjelu.

10. Raspodjela mandata pomoću Adamsove metode

- Čini se da Adamsova metoda zadovoljava kvotu, ali postoje slučajevi u kojima to ne zadovoljava.
- Odgovori će se razlikovati. Adamsova metoda ne podliježe paradoksu Alabame.
- Raspodjela će ostati konstantna.

škola	**26 mjesta** ($d = 1110$)	**27 mjesta** ($d = 1100$)	**40 mjesta** ($d = 690$)
North High	9	9	14
South High	7	7	11
Valley High	5	5	8
Meadow High	3	4	5
Ridge High	2	2	2

Istraživanje pomoću kalkulatora

11.

okrug	**populacija**	**broj predstavnika** ($d = 46850$)	**idealna kvota**
South East okrug (SE)	70653	2	1,5519
North West okrug (NW)	117404	3	2,5788
North East okrug (NE)	210923	5	4,6329
South West okrug (SW)	1194456	25	26,236
ukupno	1593436	35	

- Ne, ne zadovoljava kvotu. South West okrug ima manje predstavnika od svoje idealne zaokružene kvote.
- Odgovori će se razlikovati.

* * * * *

Raspodjela mandata za Aktivnost 13.

1. Omjer zastupljenosti

broj mjesta	26	27	40
omjer reprezentacije	1000:1	963:1	650:1

2. Idealna kvota

škola	**idealna kvota za 26 mjesta**	**idealna kvota za 27 mjesta**	**idealna kvota za 40 mjesta**
North High	9,061	9,4095	13,94
South High	7,179	7,4551	11,045
Valley High	5,259	5,4613	8,0908
Meadow High	3,319	3,4467	5,1062
Ridge High	1,182	1,2275	1,8185

3. Raspodjela mandata pomoću Hamiltonove metode

škola	**26 mjesta**	**27 mjesta**	**40 mjesta**
North High	9	9	14
South High	7	8	11
Valley High	5	6	8
Meadow High	4	3	5
Ridge High	1	1	2

8. Raspodjela mandata Jeffersonovom metodom

škola	**26 mjesta** ($d = 906$)	**27 mjesta** ($d = 897$)	**40 mjesta** ($d = 600$)
North High	10	10	15
South High	7	8	11
Valley High	5	5	8
Meadow High	3	3	5
Ridge High	1	1	1

9. Raspodjela mandata korištenjem Websterove metode

škola	**26 mjesta** ($d = 957$)	**27 mjesta** ($d = 956$)	**40 mjesta** ($d = 671$)
North High	9	9	14
South High	8	8	11
Valley High	5	6	8
Meadow High	3	3	5
Ridge High	1	1	2

10. Raspodjela mandata pomoću Adamsove metode

škola	**26 mjesta** ($d = 1110$)	**27 mjesta** ($d = 1100$)	**40 mjesta** ($d = 690$)
North High	9	9	14
South High	7	7	11
Valley High	5	5	8
Meadow High	3	4	5
Ridge High	2	2	2

11. Raspodjela mandata pomoću Websterove metode

okrug	**populacija**	**broj predstavnika** ($d = 46850$)	**idealna kvota**
South East okrug (SE)	70653	2	1,5519
North West okrug (NW)	117404	3	2,5788
North East okrug (NE)	210923	5	4,6329
South West okrug (SW)	1194456	25	26,236
ukupno	1593436	35	

1.14. Aktivnost 14.: Paradoksi raspodjele mandata

U Aktivnosti 13. otkrili ste da postoje problemi s metodama raspodjele mandata koje ste do sada istraživali. Jedan od tih problema je pitanje kako zadovoljiti kvotu, a drugi je Alabama paradoks. Nakon popisa iz 1850. godine raspodjela je donesena Hamiltonovom metodom raspodjele mandata, koja se obično naziva Vintonovom metodom. Alabama paradoks prvi je put primijećen nakon popis stanovništva 1870.

Kongres nije reagirao na sve veće probleme raspodjele sve dok C. W. Seaton nije otkrio "paradoks Alabame"

Za 270 članova Doma, državi Rhode Island dodijeljena su dva člana prema Hamiltonovoj metodi, ali kada je veličina doma povećana na 280, Rhode Island dobio je samo jedno mjesto. Nakon popisa 1880. godine C. W. Seaton, glavni službenik Ureda za popis stanovništva Sjedinjenih Država, izračunao je raspodjele mandata korištenjem Hamiltonove metode za sve veličine Zastupničkog doma između 275 i 350 članova. Seaton se obratio Kongresu navodeći kako je Alabami dodijeljeno osam zastupnika za veličinu Doma od 299 zastupnika, ali samo sedam njih kada je veličina Doma povećana na 300 zastupnika. Konačno, odabrana je veličina Doma od 325 jer su za taj broj Websterova i Hamiltonova metoda dale iste rezultate. Nakon popisa iz 1900. godine kompromis više nije bio moguć. Maine i Colorado, između ostalih država, bile su pogođene paradoksom Alabame. Godine 1901., tri desetljeća nakon paradoksa Alabame, Hamiltonova je metoda konačno odbačena u korist Websterove. Činilo se da Kongres može tolerirati povremeno kršenje kvote, ali nije mogao prihvatiti metodu koja je dopuštala paradoks Alabame.

U svim primjerima koje ste istražili u Aktivnosti 13., pronašli ste da Hamiltonova metoda zadovoljava kvotu. Zapravo, Hamiltonova metoda uvijek će zadovoljiti kvotu, ali kao što je otkriveno, podložna je paradoksu Alabame. Naišli ste na ovaj problem kada se povećala veličina učeničkog vijeća s 26 na 27 mjesta. Ukupan broj učenika nije se promijenio, udio učenika u srednjoj školi Meadow High nije se promijenio, ali je Meadow High ipak dobio manje mjesta u većem vijeću.

Također ste otkrili da Jeffersonova i Websterova metoda povremeno ne zadovoljavaju kvotu. Međutim, čini se da one nisu podložne paradoksu Alabame.

Razmotrite ovo ...

1. Navedite uvjerljivo objašnjenje kojim metode djelitelja kao što su Jeffersonova i Websterova izbjegavaju paradoks Alabame. Moglo bi biti korisno razmotriti što se događa s djeliteljem i kvocijentom svake države (reprezentativno stanovništvo podijeljeno s d) kao veličinom kojom se povećava Kongres.

2. Godine 1901., kada je Kongres SAD-a odbacio Hamiltonovu metodu raspodjele mandata i usvojio Websterovu, prihvaćen je presedan da se metode koje dopuštaju Alabama paradoks ne mogu koristiti za raspodjelu. Međutim, Kongres je bio voljan dopustiti korištenje metode koja bi mogla prekršiti kvotu. Što mislite zašto su to dopustili?

Postoje i drugi paradoksi raspodjele. Jedan, nazvan **paradoks stanovništva**, događa se kada promjene u raspodjeli mandata ne odražavaju točno promjene u popu-laciji. To se dogodilo s Hamiltonovom metodom između 1900. i 1901. godine. Virginia je rasla puno brže od Mainea. Stanovništvo Virginije poraslo je za 19767 dok se stanovništvo Mainea povećalo za 4648. Nadalje, stopa rasta Virginije u odnosu na Maine bila je gotovo 60% veća. Međutim, iako je Virginia postala proporcionalno veća od Mainea, Hamiltonova metoda rezultirala je preuzimanjem mjesta od Virginije dajući ga Maineu.

Kod Hamiltonove metode javlja se još jedan paradoks, nazvan **paradoks novih država**. Ovaj paradoks pojavio se kada je Oklahoma postala država 1907. godine. Oklahoma je imala pravo na oko pet mjesta u Domu. Kada je ovih pet mjesta dodano ukupan broj mjesta ponovno je raspoređen korištenjem Hamiltonove metode. New York je morao prepustiti mjesto Maineu, iako nije bilo promjena u stanovništvu Mainea, New Yorka ili bilo koje druge države! Ovaj se paradoks također može dogoditi kada se država odvoji od Unije.

Sigurno se pitate postoji li metoda kojom se mogu izbjeći ovi paradoksi da se zadovolji kvota. Odgovor je da nijedna metoda djelitelja ne zadovoljava kvotu. Metode djelitelja ne ispunjavaju kvotu, stoga metoda djelitelja ne prisiljava sve države da ostanu unutar kvote! Ne utječe na velike države na isti način kao na male države. Razlika od jednog mjesta ima manji učinak na udio zastupljenosti veće države od onog u manjoj državi.

Budući da nije postojala savršena metoda, Websterova metoda je prihvaćena kao kompromis.

Povijesni dokazi od tada su pokazali da je najmanje vjerojatno da će Websterova metoda prekršiti kvotu. Matematika pokazuje da je Websterova metoda jedina metoda djelitelja koja ostaje blizu kvote.

3. Vaša grupa je odbor za raspodjelu jednog od odjela tvrtke SuperTec, tvornice specijalizirane za računalne proizvode koji se koriste u školama. SuperTec je u vlasništvu svojih zaposlenika. Svaki zaposlenik ima jednak udio u tvrtki, stoga mora biti ravnopravno zastupljen u vodstvu poduzeća. SuperTec se sastoji od četiri odjela: proizvodnje, razvoja, prodaje i servisa. Svaki odjel bira predstavnike u upravnom odboru.

odjel	broj zaposlenika	raspodjela
razvoj	241	
proizvodnja	673	
prodaja	368	
servis	173	

Formulirajte prijedlog za raspodjelu mandata upravnog odbora SuperTeca. Koristite pitanja u nastavku kao vodič za formuliranje svojeg prijedloga.

- Koliki bi trebao biti upravni odbor? Zašto?
- Koju metodu raspodjele mandata preporučujete? Zašto? Hoćete li zahtijevati da vaša metoda zadovolji kvotu? Jeste li spremni tolerirati paradokse?
- Kako bi trebalo postupati s dodavanjem novih odjela?
- Kako bi trebalo postupati s rastom populacije odjela?

4. Usporedite predloženu raspodjelu mandata svog odjela s onima drugih odjela. Mogu li se svi odjeli složiti oko metode raspodjele mandata?

Istražujte dalje

5. Raspodjela mandata ima široku primjenu i izvan politike. Klub mladih Central City nudi tečajeve od pet sati umjetnosti u svakom semestru koje predaje isti nastavnik. 51 učenik predbilježio se za slikarstvo, 30 za kiparstvo i 19 za klesarstvo. Tablica ispod prikazuje raspodjelu pomoću Hamiltonove metode.

tečaj	broj učenika	idealna kvota	raspodjela	prosjek tečaja
slikarstvo	51	2,55	3	17
kiparstvo	30	1,50	1	30
klesarstvo	19	0,95	1	19

Kad su tečajevi započeli, stvarni upis u tri razreda popeo se na 52 učenika u slikarstvu, 33 u kiparstvu, a 15 u klesarstvu. Tablica prikazuje novu raspodjelu pomoću Hamiltonove metode.

tečaj	broj učenika	idealna kvota	raspodjela	prosjek tečaja
slikarstvo	52	2,60	2	26
kiparstvo	33	1,65	2	16,5
klesarstvo	15	0,75	1	15

Usporedite i analizirajte rezultate dviju raspodjela i opišite vlastitim riječima problem koji se javlja s promjenom upisa. Koliko vam se činiti da je ovo ozbiljan problem?

6. Cygnet College mali je fakultet s tri odjela. Upisani studenti po odjelima prikazani su tablicom.

podjela	upis
umjetnost	690
znanost	435
poslovanje	375
ukupno	1500

- Kako biste na tri odjela rasporedili pet mjesta u studentskom vijeću?
- Kad bi se sljedeće godine broj studenata promijenio redom na 555, 465 i 480, kako biste podijelili tih pet mjesta?
- Hoće li neka podjela dobiti studente, ali izgubiti zastupljenost u vijeću zbog promjena u populaciji?

Istraživanje

7. Na izborima 1876. godine Rutherford B. Hayes izabran je za predsjednika. Koju je ulogu imao elektorski kolegij na njegovim izborima? Što mislite kako je to utjecalo na rasprave o raspodjeli mandata?

8. Ponekad se paradoksi o kojima se raspravlja u ovoj aktivnosti nazivaju neuspjeh u zadovoljavanju **monotonosti doma** ili **monotonosti kvote**. U rječniku pronađite definiciju za monotonost za koju mislite da se odnosi na ovu situaciju. Istražite što se podrazumijeva pod monotonost Doma ili monotonost kvote.

* * * * *

Kutak za učitelja

U ovoj aktivnosti učenici nastavljaju s istraživanjem nepoželjnih svojstava metoda raspodjele mandata koje su proučavali. Balinski i Young dokazali su 1970-ih da svaka moguća metoda raspodjele mandata, bila poznata ili još neotkrivena, mora u nekim slučajevima dati poneke neugodne rezultate. Ovo je primjer poučka o nemogucnosti.

Za dio *Razmotrite ovo . . .* ove aktivnosti, podijelite razred u grupe koje predstavljaju četiri odjela SuperTeca. Ako imate dovoljno učenika, možda možete ih podijeliti u dvije grupe koje predstavljaju svaki odjel. Nakon što je svaka grupa formulirala prijedlog neka ga iznese pred razredom. Održite razrednu raspravu u kojoj razred, koji predstavlja zaposlenike poduzeća, dogovara način raspodjele mandata.

Odgovori

Razmotrite ovo . . .

1. Metode djelitelja izbjegavaju Alabama paradoks jer kako se veličina doma povećava, djelitelj d mora biti manji. Kako se djelitelj smanjuje, kvocijent svakog se stanja (reprezentativno stanovništvo države podijeljeno djeliteljem) povećava. Svaki put kad taj kvocijent prenosi cjelobrojnu vrijednost u Jeffersonovoj metodi ili određenu decimalnu vrijednost u Websterovoj metodi, njegova država dobiva još jedno mjesto. Budući da niti jedan državni kvocijent nikako ne može dobiti manje, nijedna država nikada ne će izgubiti mjesto.

2. Kongres je zaključio da je mogućnost pojave paradoksa više uznemirujuća od povremenog kršenja kvote.

3. Odgovori će varirati.

4. Odgovori će varirati.

Istražujte dalje

5. Odgovori će varirati. Problem je što se povećenjem kvote za slikarstvo raspodjela smanjila. Situacija u ovom problemu ilustrira neuspjeh **kvote monotonosti**, koja se spominje u pitanju 8. To je problem u svakoj razumnoj metodi raspodjele mandata. On se događa kada se poveća kvota grupe, ali se njezina raspodjela smanjuje. Ova situacija razlikuje se od paradoksa Alabame koji se ponekad naziva neuspjehom monotonosti Doma.

6. Tablice prikazuju raspodjele za obje populacije.

podjela	upis	Hamilton	Jefferson	Webster	Adams
umjetnost	690	2	3	2	2
znanost	435	2	1	2	2
poslovanje	375	1	1	1	1
ukupno	1500				

podjela	upis	Hamilton	Jefferson	Webster	Adams
umjetnost	555	2	2	2	2
znanost	465	1	1	1	1
poslovanje	480	2	2	2	2
ukupno	1500				

Svaka metoda osim Jeffersonove rezultira time da znanstveni odjel gubi mjesto iako se je veličina povećala. Učenici mogu imati različita mišljenja o pravednosti ovoga.

Istraživanje

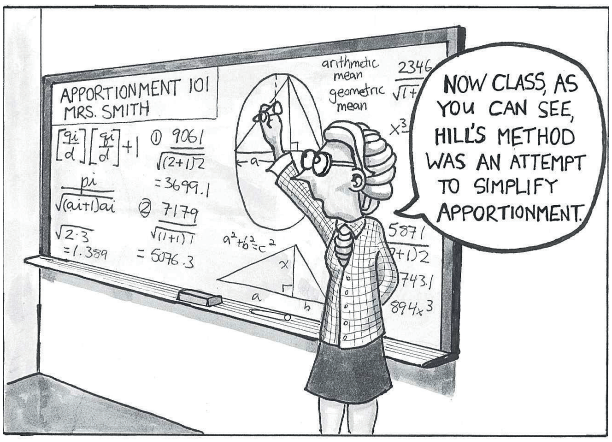
7. Na predsjedničkim izborima 1876. godine, Samuel J. Tilden dobio je 4 300 590 glasova prema 4 036 298 glasova Rutherforda B. Hayesa, ali elektorski kolegij izabro je Hayes.

8. Skup vrijednosti je monoton ako vrijednosti u skupu rastu ili opadaju redom. Ako se monotonost koristi za označavanje skupova, onda to znači da svaki skup sadrži prethodni skup.

   Ako metoda raspodjele mandata zadovoljava monotonost Doma, tada nema paradoksa Alabame. Kako se veličina Doma povećava, svaka raspodjela sadrži prethodnu raspodjelu mandata.

   Ako raspodjela mandata zadovoljava monotonost kvote, tada će se svako povećanje ili smanjenje državne kvote povećati ili smanjiti na isti način.

1.15. Aktivnost 15.: Metoda raspodjele Josepha A. Hilla



Od 1850. do 1900. godine stanovništvo Sjedinjenih Država dramatično je poraslo s 23 milijuna na 75 milijuna, što je porast za više od 200%. Dodano je 14 novih država, a stanovništvo je migriralo s istoka prema zapadu i sa sela u gradove. Porast stanovništva imao je za posljedicu povećanje broja zastupnika Zastupničkog doma s 234 na 386. Tijekom ovog razdoblja rasta, nekoliko događaja preokrenulo je vruću raspravu o raspodjeli mandata.

Političari su otkrili da je Hamiltonova metoda podložna nekima od paradoksa koje ste istraživali u Aktivnosti 14. Iako je Hamiltonova metoda donesena 1852. kao Vintonov zakon za raspodjelu mandata, nije ga se uvijek striktno pridržavalo. 60-ih i 70-ih godina 19. stoljeća nije korištena prava metoda. Rezultati Hamiltonove metode mijenjani su kako bi se zadovoljilo države koje su smatrale da nemaju dovoljno predstavnika. 60-ih godina 19. stoljeća 233 mjesta raspodijeljena su Hamiltonovom metodom, ali još je osam mjesta proizvoljno dodijeljeno sjevernim državama. Slično tome, 70-ih godina 19. stoljeća prva je raspodjela rezultirala s 283 mandata. Budući da su Hamiltonova i Websterova motoda dale istu raspodjelu, odabrana je veličina Doma s 283 predstavnika. Nekoliko mjeseci kasnije, broj mjesta povećan je za 9. Nova raspodjela od 292 mjesta nije se slagala ni s Hamiltonovom ni s Websterovom metodom.

Druge su stvari pokazivale da s raspodjelom mandata nije sve u redu. Godine 1876. na predsjedničkim izborima Samuel J. Tilden dobio je 4 300 590 glasova, a Rutherforda B. Hayes 4 036 298 glasova. No elektorski kolegij, koji je pod utjecajem raspodjele Doma, izabrao je Hayesa.

Kada su rezultati popisa iz 1880. prezentirani Domu, rasprave o raspodjeli postale su intenzivnije. Postalo je jasno da je Hamiltonova metoda "zaražena" paradoksom. Walter F. Willcox, mladi profesor na Odsjeku za filozofiju na Cornellu, proučavao je slične primjere kao i kongresne rasprave zaključivši da je Websterova metoda bila ispravan pristup raspodjeli. Kao rezultat toga, Websterova metoda bila je upotrijebljena i 1910. godine za raspodjelu Doma s 433 mjesta, zajedno s odredbom da teritoriji Arizone i Novog Meksika dobivaju po jedno mjesto ako budu primljene kao države prije sljedećeg popisa stanovništva. Broj 433 odabran je jer je bio najmanji broj koji je priječio da bilo koja država izgubi mjesto.

U međuvremenu se rasprava nastavila, iako je predložena nova metoda. Joseph A. Hill, glavni statističar Odjela za reviziju i rezultate, iz Ureda za Census, tvrdio je da ono o čemu treba voditi računa pri raspodjeli manadata u Domu jest je li neka država bolje zastupljena od bilo koje druge države. Time je mislio reći da bi omjer stanovništva po predstavniku trebao bi biti gotovo isti za svaku državu. Smatrao je da bi način provjere je li to postignuto bila provjera koliko je puta jedan omjer veći od drugoga, a razlika bi se mjerila postotkom.

Hillova metoda za raspodjelu mandata funkcionira na sljedeći način:

`Odaberite veličinu Doma koju želite podijeliti. Svakoj državi dodijelite određeni broj mjesta tako da nikakav prijenos bilo kojeg mjesta ne može smanjiti postotnu razliku u predstavljanju između tih država.`

Ova metoda ne daje recept za raspodjelu, već je primjenom matematike Edward V. Huntington stvorio metodu za raspodjelu doma prema Hillovom načelu.

Hillova metoda djeluje na sličan način kao i druge metode djeljitelja. Kao u onoj drugoj metodi djelitelja, morate pronaći djelitelj koji će osigurati željenu veličinu Doma. Razlika je u tome što se, umjesto korištenja pravila zaokruživanja, uspoređuje se kvocijent q_i dobiven dijeljenjem stanovništva države p_i djeliteljem d, s geometrijskom sredinom od $\left[\frac{p_i}{d}\right]$ i $\left[\frac{p_i}{d}\right] + 1$.

(Zagrade označavaju funkciju (cjelobrojno) najveće cijelo. Na primjer, ako je q_i 15,542, pogledajte $\sqrt{15 \cdot 16}$, što je otprilike 15,492. Budući da je 15,542 > 15,492 (geometrijska sredina), državi je dodijeljeno 16 predstavnika.

Razmotrite ovo ...

1. Primjenite Hillovu metodu pri podjeli vijeća učenika okruga Dale s 26 članova. Prvo morate podijeliti populaciju svake škole odabranim djeliteljem. Zatim usporedite ovaj kvocijent s geometrijskom sredinom od $\left[\frac{p_i}{d}\right]$ i $\left[\frac{p_i}{d}\right] + 1$. Ako je kvocijent veći od geometrijske sredine, tada školi dodijelite $\left[\frac{p_i}{d}\right] + 1$ predstavnika. Inače, škola ima $\left[\frac{p_i}{d}\right]$ predstavnika. Upotrijebite djelitelj od 960 za izračunavanje kvocijenata u tablicu ispod i dovršite raspodjelu učeničkog vijeća okruga Dale od 26 mjesta pomoću Hillove metode.

škola	**učenička populacija**	**kvocijent ($d = 960$)**	**geometrijska sredina**	**broj predstavnika**
North High	9061	9,439	$\sqrt{9 \cdot 10} = 9,487$	9
South High	7179			
Valley High	5259			
Meadow High	3319			
Ridge High	1182			
ukupno	26000			

2. Usporedite rezultate raspodjele u učeničkom vijeću pomoću Hillove metode s rezultatima dobivenim drugim metodama raspodjele. Koja se metoda čini najpravednijom i zašto?

škola	**Hamiltonova metoda**	**Jeffersonova metoda**	**Websterova metoda**	**Adamsova metoda**
North High	9	10	9	9
South High	7	7	8	7
Valley High	5	5	5	5
Meadow High	4	3	3	3
Ridge High	1	1	1	2

Istražujte dalje

3. Mountain County formira županijsku rukometnu ekipu koja će sudjelovati u nadolazećem nacionalnom turniru. Rukometni odbor donio je odluku o rasporedu sportaša za županijsku rukometnu ekipu iz svakog rukometnog kluba u županiji po Hillovoj metodi. Ispunite tablicu i odredite raspodjelu za županijsku rukometnu ekipu od 13 igrača.

klub	broj igrača	kvocijent ($d = 100$)	geometrijska sredina	broj sportaša	idealna kvota
Rainier	501				
Adams	332				
Whitney	53				
St. Helens	46				
Hood	15				
Shasta	58				
ukupno	1005				

4. Zadovoljava li raspodjela rukometaša kvotu? Što bi mogao biti razlog ovakvog rezultata raspodjele igrača u raznim klubovima?

5. Primjenite Hillovu metodu za raspodjelu SuperTecova upravnog odbora od šest članova.

odjel	broj zaposlenika	kvocijent ($d = 265$)	geometrijska sredina	broj predstavnika
razvoj	241			
proizvodnja	673			
prodaja	368			
servis	173			
ukupno	1455			

6. Jeste li zadovoljni rezultatima raspodjele Uprave SuperTeca? Objasnite!

7. Usporedite rezultate raspodjele SuperTec pomoću Hillove metode s rezultatima raspodjele korištenjem metoda prikazanih u tablici. Koju biste metodu preporučili?

odjel	Hamiltonova metoda	Jeffersonova metoda	Websterova metoda	Adamsova metoda
razvoj	2	1	1	1
proizvodnja	2	3	3	2
prodaja	1	1	1	2
servis	1	1	1	1

Istraživanje pomoću kalkulatora

8. Kalkulator koji se može programirati ili računalni program za proračunske tablice mogu uvelike pojednostavniti proračune s Hillovom metodom.

9. Upotrijebite kalkulator ili računalni program za proračunske tablice kako biste doznali koliko mjesta mora biti dodano u učeničko vijeće prije nego što Ridge High dobije drugo mjesto.

10. Upotrijebite kalkulator ili računalni program za proračunske tablice kako biste podijelili 23 člana bolničkog odbora okruga Broad koristeći Hillovu i Websterovu metodu.

bolnica	broj bolesničkih postelja	Hill raspodjela ($d = 203$)	Weber raspodjela ($d = 200$)
Grand Hospital	1518		
Mercy Hospital	1305		
Sunshine Hospital	865		
Rose Hospital	499		
Brookfield Hospital	296		
Littlefield Hospital	210		
ukupno			

Mogu li se rezultati dobiveni Hillovom metodom usporediti s rezultatima dobivenim Websterovom metodom? Koja je metoda po vama pravednija?

Istraživanje

11. Istražite i doznajte kako se geometrijska sredina dvaju brojeva može prikazati geometrijski.
12. Eksperimentirajte s parovima uzastopnih pozitivnih cijelih brojeva i napravite neke pretpostavke povezujući aritmetičku sredinu i geometrijsku sredinu dvaju brojeva. Geometrijski pokažite istinitost svojih tvrdnji.
13. Kakav je trenutačni status rasprave o raspodjeli mandata? Možete pronaći zanimljive informacije o glasanju i raspodjeli mandata na internetu kao i u vašoj lokalnoj knjižnici.

* * * * *

Kutak za učitelja

Ova aktivnost uvodi metodu koja se danas koristi za raspodjelu mandata u Zastupničkom domu. Prvi ju je opisao Joseph A. Hill, a dalje ju je razvio Edward V. Huntington. Ova metoda je također poznata kao metoda **jednakih omjera**. Kongres je prihvatio ovu metodu 1940. godine i od tada se primjenjuje.

Iznenađujuće je da ova metoda ne zadovoljava kvotu, no ovaj problem još nije uzrokovao mnogo kontroverze. Svaki od četiri puta kada se metoda jednakih razmjera primjenjivala, posebno dobivena raspodjela slučajno je zadovoljila kvotu, no nema jamstva da će tako biti i u budućnosti. Kada metoda raspodjele mandata ne bude zadovoljavala kvotu, pokrenut će se rasprava o njoj. Učenici trebaju znati kako izračunati geometrijsku i aritmetičku sredinu.

Razmotrite ovo ...

1.

škola	učenička populacija	kvocijent ($d = 960$)	geometrijska sredina	broj predstavnika
North High	9061	9,439	$\sqrt{9 \cdot 10} = 9,487$	9
South High	7179	7,478	$\sqrt{7 \cdot 8} = 7,483$	7
Valley High	5259	5,478	$\sqrt{5 \cdot 6} = 5,477$	6
Meadow High	3319	3,457	$\sqrt{3 \cdot 4} = 3,464$	3
Ridge High	1182	1,231	$\sqrt{1 \cdot 2} = 1,414$	1
ukupno	26000			26

2. Odgovori će varirati.

Istražujte dalje

3.

klub	broj igrača	kvocijent ($d = 95$)	geometrijska sredina	broj sportaša	idealna kvota
Rainier	501	5,274	$\sqrt{5 \cdot 6} = 5,477$	5	6,481
Adams	332	3,495	$\sqrt{3 \cdot 4} = 3,464$	4	4,295
Whitney	53	0,558	$\sqrt{0 \cdot 1} = 0^*$	1	0,686
St. Helens	46	0,484	$\sqrt{0 \cdot 1} = 0^*$	1	0,595
Hood	15	0,158	$\sqrt{0 \cdot 1} = 0^*$	1	0,194
Shasta	58	0,611	$\sqrt{0 \cdot 1} = 0^*$	1	0,750
ukupno	1005			13	

*Tim s kvocijentom manjim od 1 automatski dobiva 1 predstavnika.

4. Raspodjela rukometaša prema Hillovoj metodi ne zadovoljava kvotu. Kada postoji mnogo malih izbornih jedinica s nekoliko velikih izbornih jedinica, kvota će ponekad biti prekršena zato što manjim skupinama mora biti dodijeljen barem jedan član.

5.

odjel	broj zaposlenika	kvocijent ($d = 265$)	geometrijska sredina	broj predstavnika
razvoj	241	0,909	$\sqrt{0 \cdot 1} = 0$	1
proizvodnja	673	2,540	$\sqrt{2 \cdot 3} = 2,449$	3
prodaja	368	1,389	$\sqrt{1 \cdot 2} = 1,414$	1
servis	173	0,653	$\sqrt{0 \cdot 1} = 0^*$	1
ukupno	1455			6

6. Odgovori će varirati.

7. U ovom slučaju Hillova metoda daje istu raspodjelu kao Websterova i Jeffersonova metoda. Odgovori će se razlikovati.

Istraživanje pomoću kalkulatora

8. Odgovori će varirati.

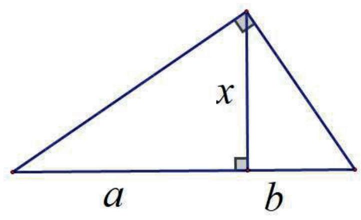
9. Potrebno je dodati šest mjesta prije nego što Ridge High dobije drugo mjesto.

10. U ovom konkretnom slučaju, čini se da Hillova metoda daje prednost manjim bolnicama. Općenito, uspoređujući Hillovu metodu i Websterovu metodu, prva će favorizirati manje jedinice.

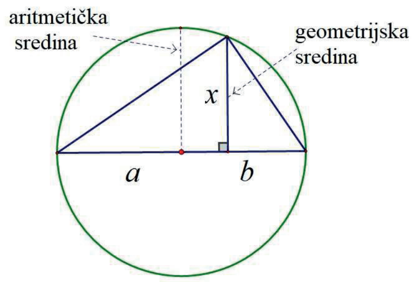
bolnica	broj bolesničkih postelja	Hill raspodjela	Webster raspodjela
Grand Hospital	1518	7	8
Mercy Hospital	1305	6	7
Sunshine Hospital	865	4	4
Rose Hospital	499	3	2
Brookfield Hospital	296	2	1
Littlefield Hospital	210	1	1
ukupno			

Istraživanje

11. Na slici je x geometrijska sredina između a i b.

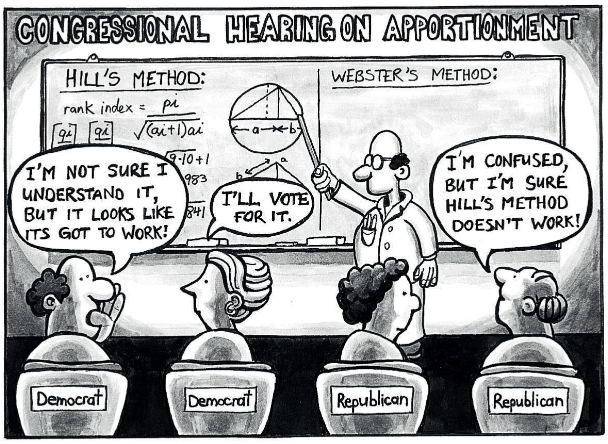


12. Aritmetička sredina uvijek je veća ili jednaka geometrijskoj sredini. Na slici isprekidana crta predstavlja duljinu aritmetičke sredine. Polumjer kružnice je aritmetička sredina jer je zbroj a i b promjer. Dijeleći ovaj zbroj s 2 dobiva se polumjer. Visina u pravokutnom trokutu predstavlja geometrijsku sredinu. Slika pokazuje da geometrijska sredina ne može biti dulja od polumjera kružnice, tj. aritmetičke sredine.



13. Pomozite svojim učenicima pronaći adrese njihovih zastupnika. Oni se često nalaze u lokalnim telefonskim imenicima, a neke ih lokalne novine redovito objavljuju. Puno zastupnika imaju i e-mail adresu koja se može pronaći pretraživanjem na internetu koristeć ključne riječi "Zastupnički dom". Da biste pronašli više informacija za tijek rasprave o raspodjeli, učenici mogu pretraživati internet koristeći ključne riječi kao što su "raspodjela" i "reforma glasanja".

1.16. Aktivnost 16.: Odabir metode: matematika ili politika?



Rasprava o Hillovoj i Websterovoj metodi nadrasla je matematička pitanja i prerasla u političku borbu u Kongresu.

Metodu Josepha Hilla zagovarao je Edward V. Huntington, profesor matematike i mehanike, i Hillov kolega na Sveučilištu Harvard. Huntington je 1921. pomoću Hillove metode naučio pronaći metodu raspodjele mandata. Hillovu je metodu preimenovao u **metodu jednakih omjera** i od tada se smatra da je Hillova metoda njegovo osobno otkriće. Huntington se snažno zalagao za usvajanje Hillove metode, dok se Walter Willcox jednako snažno zalagao za usvajanje Websterove metode.

Komisija od četiri matematičara pozvana je da razmotri problem, a na Huntingtonovo oduševljenje potvrdila je da je Hillova metoda poželjnija.

Povjerenstvo preferira [Hillovu] metodu jer zadovoljava [relativna razlika] test . . . kada se primijeni bilo na veličinu kongresnih distrikta ili na broj predstavnika po osobi i zato što matematički zauzima neutralan položaj s obzirom na naglasak na veće i manje države.

Nekoliko je čimbenika dovelo do prihvaćanja Hillove metode. Dom nikada nije podijeljen na temelju popisa iz 1920. godine jer bi nova raspodjela mandata pomoću Websterove metode dovela do velikog gubitka mjesta za ruralna područja. Kongres se nije mogao dogovoriti oko raspodjele mandata pa je odlučio zanemariti rezultate popisa iz 1920. godine, koristeći obrazloženje da su tijekom rata mnogi ljudi privremeno napustili farme kako bi potražili posao u gradovima te da su ruralna područja bila u velikoj mjeri slabo pobrojena jer je popis stanovništva proveden usred neobično jake zime.

Neuspjeh u raspodjeli mandata Kongresa 20-tih godina 20. stoljeća bio je izravno kršenje Ustava i izazvao je veliku pometnju. Postojala je bojazan da bi, ako bi popis stanovništva od 1930. pokazao još veći gubitak stanovništva u ruralnim područjima, preraspodjela bila još teža. Kao odgovor na ovaj strah, Kongres je ljeta 1929. usvojio zakon koji je zahtijevao od predsjednika da pošalje predstavnike stanovništva država dobivenih popisom stanovništva u Kongres. Zajedno s tim stanovništvom predsjednik bi dorađivao raspodjele koristeći tri različite metode: korištenu metodu nakon prethodnog popisa, Websterovu metodu i Hillovu metodu. Kad Kongres dobije informaciju od predsjednika, ona bi imala ograničeno vremensko razdoblje u kojem bi se opet razmotrila.

Ako to ne učini, automatski bi se ponovno rasporedilo mandate pomoću metode korištene nakon prethodnog popisa.

Godine 1930. metode Webstera i Hilla dale su istu raspodjelu, uzimajući brojne razloge kao argument. Godine 1940. metode su dale istu raspodjelu osim za dvije države, Arkansas i Michigan.

država	stanovništvo	Hill raspodjela	Webster raspodjela	kvota
Arkansas	1 949 383	7	6	6,473
Michigan	5 256 209	17	18	17,453
SAD ukupno	131 006 184	435	435	435

Dvije raspodjele mandata pretvorile su matematički problem koju metodu koristiti u politički problem. Arkansas je bio sigurna demokratska država. Michigan je bio republikanska. Predstavnik Arkansasa predložio je raspodjelu pomoću Hillove metode. Kad je došlo do glasanja, svi demokrati osim ovih iz Michigana glasali su za to. Svi republikanci glasali su protiv. Senat je održao saslušanja i bezuspješno pokušao utvrditi koja je metoda nepristrana. Utvrđeno je da je svaka metoda raspodjele mandata do neke mjere proizvoljna. Predsjednik Franklin D. Roosevelt potpisao je Javni zakon 291 u studenom 1941. Njime se Hillovu metodu za raspodjelu mandata ozakonjuje i koristi za raspodjelu mandata svakog sljedećeg izbora za Kongres.

Neki politički analitičari smatraju da je Websterova metoda najpravednija. Ne postoji metoda koja izbjegava paradoks stanovništva i uvijek ostaje unutar kvote. Sve metode djelitelja izbjegavaju Alabama paradoks, a Websterova metoda je metoda djelitelja koja ostaje najbliže kvoti. Statistički, u sadašnjim uvjetima u SAD-u može se očekivati da će Websterova metoda prekršiti kvotu otprilike 1 put na svakih 1600 raspodjela - to znači jednom svakih 16 000 godina! Hillova metoda krši kvotu češće od Websterove metode i teži favoriziranju male države. Čini se da je Websterova metoda pravednija u odnosu na velike i male države.

Razmotrite ovo ...

1. Koje čimbenike smatrate najvažnijima pri odlučivanju o metodi raspodjele mandata?
2. Postoji li jedna metoda raspodjele koja je najbolja u svim okolnostima?
3. Mislite li da se grupa poput Zastupničkog doma SAD-a može fer raspodijeliti? Objasnite!

Istraživanje

4. Doznajte koliko je velika vaša županija i osmislite županijsko vijeće učenika u kojemu će sve srednje škole bit fer zastupljene. Odlučite koliko bi trebalo biti veliko vijeće učenika i koju metodu treba koristiti za raspodjelu mandata. Koristeći ovu metodu, podijelite učeničko vijeće i grafom prikažite raspodjelu zajedno s idealnom kvotom za svaku školu.

Nakon što se odlučite za veličinu i način formiranja vijeća učenika, odlučite kako će se birati predstavnici u vijeće. Treba li svaka škola imati isti izborni proces? Koje ćete vrste glasačkih listića koristiti? Kako ćete obraditi glasačke listiće za izbor predstavnika škola? Trebaju li metode koje koriste male i velike škole biti iste? Na koja biste još pitanja željeli odgovoriti u procesu odabira izbornog postupka?

Pripremite prezentaciju planiranog izbora za vijeće učenika u svom razredu. Uključite objašnjenja zašto ste se odlučili za odabrane metode.

* * * * *

Kutak za učitelja

Jedini trajni zakon o raspodjeli mandata je zakon iz 1929. godine koji traži Kongres da se sam ponovno rasporedi ili da bude automatski ponovno raspoređen pomoću metode koja je korištena nakon prethodnog popisa stanovništva. Arthur Vandenberg, autor akta, objasnio je predstavljajući ga u Senatu:

Odabrati bilo koju metodu kao trajnu - bilo da je riječ o glavnoj metodi s razlomcima ili jednakim udjelima - značilo bi pretpostaviti da je sama znanost predmet okončala. Ali znanost još nije izgovorila zadnju riječ. Sami znanstvenici bit će među prvima koji će potvrditi ovu činjenicu, i, poput Nacionalne akademije, morati priznati da su ograničeni na postojeće znanje. Trebao bi, međutim, biti dopušten stalni ministarski akt o raspodjeli mandata u skladu s novim spoznajama.

U odjeljku *Razmotrite ovo ...*, potaknite učenike da izraze svoje mišljenje o tome postoji li "najbolja" metoda. To im može pomoći kada razmatraju koji je od nedostataka određenih metoda najveći pa je stoga treba izbjegavati. Nekim će učenicima više smetati kršenje kvote, a drugima paradoksi.

U svom članku[6] iz 1979. godine Jonathan Still predlaže objektivnost po pitanju paradoksa stanovništva koji muči mnoge metode. On tvrdi da su paradoksi zanimljivi, ali ništa više od toga:

Državno je stanovništvo takvo kakvo jest. Oni definiraju problem raspodjele mandata koji zapravo treba riješiti. Što bi moglo biti rješenje drugog, hipotetskog problema koji uključuje druge, hipotetske populacije, jednostavno je nevažno. Mijenjanje državnog stanovništva mijenja problem. U krajnjem slučaju, svi različiti paradoksi stanovništva svode se samo na opažanje da će različiti problemi raspodjele općenito imati različita rješenja. To nije posebno iznenađujuće.

Gornji citat mogao bi dovesti do zanimljivih rasprava s učenicima viših razreda.

Odgovori

1.-4. Odgovori će se razlikovati.

Referentne bilješke

1. G. A. Bliss, E. W. Brown, L. P. Eisenhart, and Raymond Pearl - vidi [3]

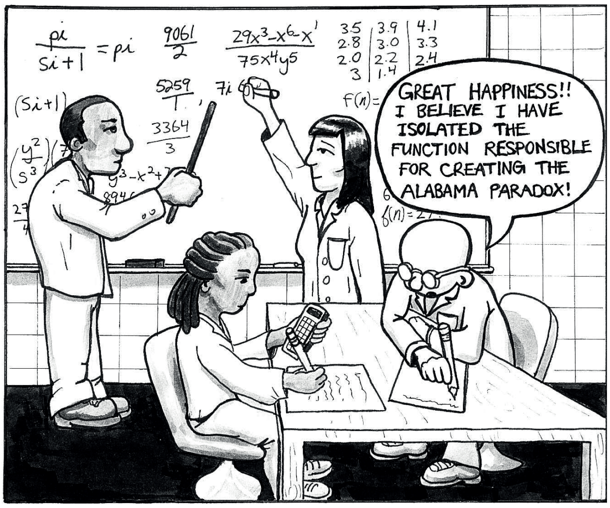
2. Senate, *Congressional Record*, 71st Congress, 1st Session (1929), 71: 108. From speech of Arthur H. Vandenberg of Michigan, April 18, 1929.

3. Still (1979)- vidi fusnotu 4 na stranici 91.

[6] J. W. Still: *Class of new methods for congressional apportionment*
SIAM Journal on Applied Mathematics, 1979
Nedostatak novih metoda za kongresnu raspodjelu
Ovaj rad razvija klasu novih metoda za kongresnu raspodjelu nadogradnjom i proširenjem nedavnog rada M. L. Balinskog i H. P. Younga. Klasa, koja također uključuje metodu kvote Balinski-Young, sastoji se od svih metoda raspodjele koje zadovoljavaju dva osnovna kriterija (zadovoljavanje kvote i monotonost kuće) koje su artikulirali Balinski i Young. Klasa je definirana i za problem čiste raspodjele i za problem raspodjele s minimalnim zahtjevima. U potonjem slučaju prikazana je nova generalizacija niže kvote, koja se razlikuje od generalizacije Balinskog i Younga. Konačno, navedeni su razlozi za odbacivanje Balinski-Youngove metode kvote i umjesto nje dali prednost jednoj od novih metoda u klasi.

1.17. Aktivnost 17.: Raspodjela mandata prema metodi kvote

U posljednjih nekoliko aktivnosti otkrili ste manjkavosti svih predloženih metoda raspodjele mandata za Zastupnički dom. Metode djelitelja, kao što su metode Jeffersona, Webstera, Adamsa i Hilla, ponekad ne uspijevaju zadovoljiti kvote. Hamiltonova pak metoda, koja nije metoda djelitelja, zadovoljava kvotu, ali ima nekoliko paradoksa.



Metoda kvota je matematički pristup raspodjeli.

Zato političari moraju naći kompromis i izabrati donekle prihvatljivo rješenje za sve. Kad ljudi zaglave s problemom kao što je ovaj, često pomisle da bi im mogao pomoći drugačiji pristup. Michael L. Balinski i H. Peyton Young učinili su baš to kada su osmislili genijalnu metodu nazvanu **Metoda kvota za raspodjelu mandata**. Predloživši metodu dokazali su da je

kvotna metoda jedinstvena metoda raspodjele mandata koja uvijek zadovoljava kvotu i izbjegava paradoks Alabame.

Ova metoda kvote za raspodjelu mandata je zapravo D'Hondtova metoda s dodanim ograničenjem ispunjavanja kvote.

Metoda kvota funkcionira na sljedeći način. Prvo odaberite veličinu Doma, s. Zatim krenite s Domom bez mjesta pa povećavajte njegovu veličinu za jedno po jedno mjesto dok Dom ne bude popunjen. Učinite to u nekoliko krugova. U svakom krugu stanovništvo svake države p_i dijeli se sa svojim sadašnjim brojem mjesta plus jedan $(a_i + 1)$. Dodatno mjesto tada se dodjeljuje državi s najvećom vrijednošću od $\dfrac{p_i}{a_i + 1}$. (Država ispunjava uvjete ako joj se dodijeli još jedno mjesto koje ne bi dovelo do kršenja gornje kvote s novom veličinom doma.)

Učenici okruga i susjednog okruga odlučili su isprobati metodu kvote za raspodjelu učeničkog vijeća susjednog okruga.

U tablici je dan broj učenika u školama u susjednom okrugu.

škola	učenička populacija	idealna kvota
North High	9061	9,061
South High	7179	7,179
Valley High	5259	5,259
Meadow High	3319	3,319
Ridge High	1182	1,182
ukupno	26000	26

U prvom krugu nema svaka škola mjesto, pa je $(a_i + 1) = 1$ za sve škole. Stoga u ovom je krugu vrijedi da je $\dfrac{p_i}{a_i + 1} = p_i$ za svaku školu. Dakle North High, s najvećom populacijom, dobiva prvo mjesto. Ovo mjesto upisuje se u tablicu u stupac označen 1. krug. U svakom krugu provjerite ima li škola s najvećom vrijednošću $\dfrac{p_i}{a_i + 1}$ pravo na mjesto. Da biste to učinili, izračunajte idealnu kvotu svake škole za tu veličinu vijeća. Ovaj izračun sažet je u tablici u nastavku. Gornja kvota za svaku školu u veličinama doma od 1 do 26.

škola\krug	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
North High	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5
South High	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4
Valley High	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3
Meadow High	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
Ridge High	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

škola\krug	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
North High	5	6	6	6	7	7	7	8	8	9	9	9	10
South High	4	5	5	5	5	6	6	6	7	7	7	7	8
Valley High	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6
Meadow High	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4
Ridge High	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2

U prvom krugu, North High ima pravo na mjesto. U drugom krugu izračunajte i usporedite $\frac{p_i}{a_i+1}$ za svaku školu, $\frac{9061}{2}$, $\frac{7179}{1}$, $\frac{5259}{1}$, $\frac{3319}{1}$ i $\frac{1182}{1}$. U ovom krugu, South School ima najveću vrijednost te tako dobiva mjesto. Raspodjela na kraju 2. kruga prikazana je tablicom.

škola\krug	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
North High	1	1											
South High	0	1											
Valley High	0	0											
Meadow High	0	0											
Ridge High	0	0											
ukupno mjesta	1	2											

škola\krug	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
North High													
South High													
Valley High													
Meadow High													
Ridge High													
ukupno mjesta													

Razmotrite ovo ...

1. Primijenite metodu kvote za dovršetak raspodjele mandata susjednog okruga. Svakako provjerite idealnu kvotu na svakoj razini kako biste vidjeli ispunjava li škola pravo na mjesto. Ako škola ne ispunjava uvjete, dodijelite mjesto školi koja ispunjava uvjete sa sljedećom najvećom vrijednošću $\frac{p_i}{a_i+1}$.
2. Čini li se metoda kvote fer? Objasnite!
3. Kako se rezultati ove metode mogu usporediti s rezultatima drugih metoda koje ste pokušali primijeniti? Koju od metoda preferirate?

škola	Hamiltonova metoda	Jeffersonova metoda	Websterova metoda	Adamsova metoda
North High	9	10	9	9
South High	7	7	8	7
Valley High	5	5	5	5
Meadow High	4	3	3	3
Ridge High	1	1	1	2

Metoda kvote nastala je pri pokušaju stvaranja metode raspodjele mandata koja uvijek zadovoljava kvotu i nema paradoksa. Podsjetimo da metode djelitelja ne zadovoljavaju uvijek kvotu i da Hamiltonova metoda nije oslobođena paradoksa. Drugi problem je pristranost. Raspodjela mandata ne bi trebala biti pristrana ni prema velikim ni prema malim državama. Iako su Balinski i Young shvatili da je nemoguće zadovoljiti sve te kriterije, smatrali su da je važnije izbjeći paradokse nego uvijek zadovoljiti kvotu.

Istražujte dalje

4. Primjenite metodu kvote za raspodjelu rukometnog tima Mountain County s 13 igrača.

rukometna udruga	glasovi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Rainier	501													
Adams	394													
Whitney	156													
St. Helens	149													
ukupno	1200													

5. Primjenite metodu kvote za preraspodjelu rukometnog tima Mountain County kada bude šest igrača više. Što primjećujete? Je li to fer?

rukometna udruga	glasovi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Rainier	501													
Adams	400													
Whitney	156													
St. Helens	149													
ukupno	1206													

6. Primjenite metodu kvote za raspodijeliti SuperTecov odbor u povjerenički odbor sa šest članova.

odjel	broj zaposlenika	raspodjela
razvoj	241	
proizvodnja	673	
prodaja	368	
servis	173	
ukupno	1455	

7. Na koje ste probleme naišli s raspodjelom SuperTeca? Kako možete modificirati metodu kvota za rješavanje uočenih problema?

8. Usporedite rezultate SuperTecove raspodjele korištenjem metode kvote s rezultatima dobivenima pomoću metoda prikazanih u tablici. Koju biste metodu preporučili?

odjel	Hamilton	Jefferson	Webster	Adams
razvoj	1	1	1	1
proizvodnja	3	3	3	2
prodaja	1	1	1	2
servis	1	1	1	1

Istraživanje pomoću kalkulatora

Pitanja 9.-11. odnose se na raspodjelu susjednog okruga koju ste istražili gore. Uporabite mogućnosti kalkulatora za metodu kvote.

9. Koliko će mjesta dobiti svaka škola ako je veličina vijeća učenika u susjednom okrugu porasla na 27?

10. Ako se poveća samo veličina vijeća, koliko će Ridge High dobiti dodatnih mjesta? Mislite li da je to fer?

11. Osmislite varijaciju metode kvota koja će riješiti probleme koje ste otkrili u pitanju 7.

Referentna bilješka

1. Balinski i Young (1975.) - vidi [2].

* * * * *

Kutak za učitelja

Ova aktivnost uvodi metodu kvote koja se na prvi pogled čini kao dobro rješenje problema raspodjele mandata. Međutim, kada u odjeljku *Istražite dalje* učenici pomnije istraže Aktivnosti 17., otkrit će da ova metoda ima problema. Podložna je paradoksu stanovništva. Znači da se mijenjanjem broja stanovništva ne podudara uvijek u broju dodijeljenih mandata.

Ova je aktivnost učenicima korisnija (i manje frustrirajuća) ako se mogu koristiti s programabilnim kalkulatorima. Potaknite svoje učenike da osmisle kalkulatorsko izračunavanje raspodjele koja će im također pomoći u vođenju evidencije. Ako trebaju prijedloge, možete predložiti sljedeće.

Unesite broj populacije škola p_i u listu 1 i broj mjesta u svakoj školi a_i u listu 2. U listu 3 unesite kvocijent $\dfrac{list1}{list2+1}$. To daje vrijednost $\dfrac{p_i}{a_i+1}$. Učenici mogu usporediti vrijednosti na ovom popisu i odlučiti koja će škola dobiti mjesto u danom krugu. Svoje rezultate trebaju zabilježiti u svoju tablicu i dodati 1 u odgovarajuću školu na popisu 2. Ovaj se postupak može ponavljati sve dok vijeće ne dođe do željene veličine. Međutim, prije davanja drugog mjesta bilo kojoj grupi, učenici moraju provjeriti hoće li idealna kvota za vijeće te veličine biti prekršena. U tablici idealnih kvota za svaku veličinu vijeća predviđena su pitanja koja se odnose na okrug Dale. Za druga pitanja učenicima bi moglo pomoći izračunati idealnu kvotu za svaku školu i okrug na listi 4.

Odgovori

Razmotrite ovo ...

1. Imajte na umu da pri prijelasku s veličine vijeća od 10 na 11, North High ima najveću vrijednost $\dfrac{p_i}{a_i+1}$, ali nema pravo na mjesto, tako da South High dobiva mjesto.

škola\krug	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
North High	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	5	5
South High	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	4	4	4
Valley High	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3
Meadow High	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
Ridge High	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ukupno mjesta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

škola\krug	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
North High	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9	10
South High	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	7
Valley High	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5
Meadow High	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3
Ridge High	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
ukupno mjesta	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

2. Odgovori će varirati.

3. Odgovori će varirati.

Istražujte dalje

4.

rukometna udruga	**glasovi**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
Rainier	501	1	1	2	2	3	3	3	3	4	5	5	5	6
Adams	394	0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	5	5
Whitney	156	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
St. Helens	149	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
ukupno	1200	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

5. Promjenom veličine momčadi s 11 na 12 igrača, rukometni klub Rainier ima najveću vrijednost, ali ne ispunjava uvjete. Rukometni klub Adams takoder nije kvalificiran, pa je rukometni klub Whitney dobio drugog igrača.

rukometni klub	**glasovi**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
Rainier	501	1	1	2	2	3	3	3	3	4	5	5	5	6
Adams	400	0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4
Whitney	156	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2
St. Helens	149	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
ukupno	1206	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Ovaj primjer pokazuje paradoks stanovništva. Iako je rukometni klub Adams dobio igrače u odnosu na sve ostale klubove (porastao mu je postotak glasova s 32,8 % na 33,2 %), izgubio je mjesto od rukometnog kluba Whitney!

6.

odjel	**broj zaposlenika**	**raspodjela**
razvoj	241	1
proizvodnja	673	3
prodaja	368	2
servis	173	0
ukupno	1455	6

7. Odgovori će varirati. Neki učenicii mogu misliti da je nepravedno što odjel za servis nije zastupljeni u odboru.

8. Odgovori će varirati.

Istraživanje pomoću kalkulatora

9. South High će dobiti mjesto. Niti jedna druga škola nije pogođena.

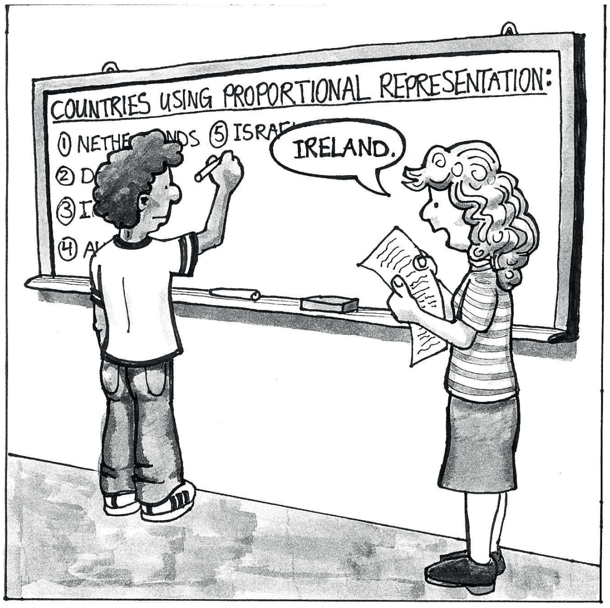
10. Ridge High će dobiti dodatno mjesto kada vijeće bude imalo 42 mjesta. Raspodjela će biti 15, 12, 8, 5, 2. Metoda kvote, kao i Jeffersonova metoda, očito favorizira veća udruženja.

11. Odgovori će varirati. Učenici mogu predložiti nekoliko varijanti metode kvote. Ako zapnu, možete predložiti druge načine da vidite koja bi škola trebala dobiti mjesto u svakoj rundi.

    Jedna varijacija koja još uvijek zadovoljava kriterij kvote i izbjegava paradoks Alabame je kad dodijelite mjesto u svakom krugu školi s najvećom razlikom između idealne kvote q_i u tom krugu i sadašnjeg broja mjesta a_i. Da biste koristili ovu varijaciju, trebali biste procijeniti $q_i - a_i$ u svakoj rundi.

    Druga varijanta je određivanje najvećeg djelitelja d tako da za sve zainteresirane strane $\Sigma\ \mathrm{INT}\left[\dfrac{x_i}{d} + 0,5\right] = 1$. Drugim riječima, dodatno bi se mjesto na svakoj razini dodijelilo onoj zainteresiranoj strani čiji broj glasova x_i podijeljen s d rezultira decimalom od 0,5 ili većom. Ova je varijacija poznata kao Quota-Webster metoda.

1.18. Aktivnost 18.: Proporcionalno zastupanje



Mnoge zemlje u svijetu koriste sustav proporcionalne zastupljenosti.

Sjedinjene Američke Države imaju federalni sustav u kojemu su zemljopisne jedinice zastupljene kao jednočlane izborne jedinice. Ovaj sustav je razvijen kao odgovor na fer homogeniziranje regija. Međutim, s vremenom su ove regije postale sve manje homogene, što može izazvati pitanja u vezi s metodama kojima su zastupnici izabrani. Mnoge nacije koriste proporcionalno reprezentacijski (PR) sustav vlasti, u kojoj građane predstavljaju političke stranke a ne zemljopisne regije. Ti su se sustavi razvili jer savezni jednočlani sustavi otežavaju ili onemogućuju malim strankama zastupljenost.

Proporcionalna zastupljenost naziva se **čistom** ako svaki birač daje jedan glas za stranku ili stranačku listu, a zastupnike zatim raspodjeljuje sama stranka. Samo nekoliko zemalja prakticira čistu proporcionalnu zastupljenost. Izraelski Kneset i nizozemski Drugi dom oba su čista razmjerna predstavnička tijela.

Mnoge zemlje koriste sustav proporcionalne zastupljenosti u kombinaciji s drugim metodama. Država može biti podijeljena na višečlane izborne jedinice. U ovim zemljama, predstavnici su zemljopisno raspoređeni. Unutar regija za raspodjelu mandata se koristi proporcionalna zastupljenost. U drugim zemljama, u jednom se Domu predstavničke grane čisto koristi razmjerna zastupljenost. Različite kombinacije proporcionalne zastupljenosti i zemljopisne zastupljenosti vode korištenju različitih metoda raspodjele.

Izraelski Kneset bira se putem proporcionalne liste. Kneset je jednodoman, sa 120 članova. Svake četiri godine, kada su izbori, svaka stranka predstavlja biračima svoju platformu i listu svojih kandidata za Kneset. Svaka stranka navodi kandidate po važnosti prema svojim kriterijima, a svaka lista može imati do 120 kandidata. Svaki birač tada glasa za stranku, a ne za kandidata. Nakon što su rezultati izbora poznati, mjesta se dodjeljuju svakoj stranci pomoću Jeffersonove metode koja se u većem dijelu svijeta naziva d'Hondtovom metodom. Na ovaj način zemlja je zastupljena kao jedinstvena izborna jedinica sa 120 zastupnika.

Proporcionalna zastupljenost na listi mogla bi funkcionirati u malom gradu na sljedeći način. Gradić Midlands treba izabrati dva predstavnika u svoju udrugu stanovnika cijele županije. Suprotstavljaju se dvije najveće stranke: Konzervativna stranka i Liberalna stranka. Najveći problem gradske politike je pitanje promjena. Članovi Konzervativne stranke žele promjene vrlo polako, ako ih uopće žele. Liberali žele niz promjena i to brzo. Žele poboljšati vodoopskrbu grada i postaviti uspornike na prometnice, a najradikalniji članovi stranke žele izgraditi sustav centralnog grijanja koji bi cijeli grad opskrbljivao toplinom.

U udruzi stanovnika Midlandsa ima 23 glasača; 13 konzervativaca i 10 liberala. Konzervativni kandidati su Winston i Nadia, s tim da je Winston konzervativniji. Kandidati liberala su Theo i Rudy, s tim da je Rudy radikalniji. U glasanju za udrugu stanovnika cijele županije, koristeći ordinalne glasačke listiće, pojavio se sljedeći raspored preferencija:

konzervativci		**liberali**	
7	6	6	4
Winston	Nadia	Theo	Rudy
Nadia	Winston	Rudy	Theo
Theo	Theo	Nadia	Nadia
Rudy	Rudy	Winston	Winston

Kad bi se dva kandidata birala Bordinom metodom, onda bi pobjednici bili Nadia (42 boda) i Theo (39 bodova). Stoga i liberali imaju zastupljenost. Inače, u ovom slučaju, deset liberalnih glasača uopće ne bi bilo zastupljeno, iako predstavljaju 43 % udruge stanovnika.

Kad bi se koristila lista proporcionalne zastupljenosti, svaki član udruge stanovnika glasao bi za svoje. Ako je svaki član glasao za stranku kojoj pripada, konzervativci bi dobili $\frac{13}{23} = 56,5\,\%$ glasova i imali bi pravo na taj postotak glasova raspoloživih mjesta, odnosno 1,13 mjesta. Slično tome, liberali bi dobili $\frac{10}{23} = 43,5\,\%$ glasova i imali bi pravo na 0,87 mjesta. Morala bi se složiti udruga stanovnika za metodu raspodjele, ali u ovom se slučaju čini razumnim da svaka strana dobije jedno mjesto.

Problem koji bi se mogao pojaviti s proporcionalnom zastupljenošću na listama je taj što su birački rasporedi preferencija potpuno zanemareni. Koji će kandidat popuniti mjesto ovisi o stranci. Stranke su mogle izabrati da ih zastupaju njihovi najradikalniji kandidati, Winston i Rudy, što je moglo povećati polarizaciju i dovesti do sukoba. To ne bi bilo dobro predstavljanje želja društva ili biračkog tijela u cjelini jer su svi konzervativci Rudyja stavili na zadnje mjesto, a svi liberali na posljednje su mjesto stavili Winstona. Još jedan problem s korištenjem liste proporcionalne zastupljenosti je taj što imenovani kandidati nisu izravno odgovorni biračkom tijelu, već samo svojoj stranci, što bi moglo izazvati slijepu odanost stranci i stranačkoj ideologiji kako bi se osiguralo izborno mjesto na stranačkoj listi.

Razmotrite ovo . . .

Ljubitelji umjetnosti okruga jednom u tri godine biraju Umjetničko povjerenstvo koje se sastoji od 18 ljudi. Članovi Umjetničkog povjerenstva aktivno sudjeluju u raspodjeli novca koji grupa prikuplja za stipendije mladih umjetnika i za predavanja o umjetnosti koja su dostupna javnosti okruga. U posljednjih nekoliko godina Ljubitelji umjetnosti podijelili su se u četiri različite skupine prema vrsti umjetnosti koju najviše vole, i to na plesače, glazbenike, slikare i kipare. Na prošlim izborima Ljubitelji umjetnosti odlučili su iskoristiti proporcionalnu zastupljenost za odabir svoje komisije. Rezultati glasanja prikazani su u tablici.

zabava	**broj glasova**
plesači	164
glazbenici	278
slikari	172
kipari	81

1. U svojoj skupini odlučite o metodi i rasporedite Povjerenstvo za umjetnost.
2. Objasnite odabir metode. Ima li jedna strana više koristi pri odabiru određene metode?
3. Kad bi se slikari i kipari udružili u jednu skupinu, bi li imali koristi od toga i koliko bi glasova dobili? Istražite.

4. Usporedite različite metode koje su predložili vaši kolege iz razreda. Kakve prednosti te različite metode nude?

Istražujte dalje

5. Građani Metropolisa održavaju izbore svake četiri godine kako bi odabrali gradski peteročlani sudski odbor. Građani se dijele na tri stranke: demokrate, republikance i neovisne. Koristite Hamiltonovu metodu za raspodjelu rezultata ovogodišnjih i prošlih izbora. Usporedite rezultate raspodjele s idealnim kvotama. Što primjećujete?

stranka	glasovi na prošlim izborima	idealna kvota	raspodjela
demokrati	43500		
republikanci	69000		
nezavisni	37500		

stranka	glasovi na izborima ove godine	idealna kvota	raspodjela
demokrati	45000		
republikanci	59000		
nezavisni	46000		

6. Jedno od pitanja koje se javlja u sustavima razmjerne zastupljenosti je pitanje koliko stranka mora biti velika da bi dobila barem jedno mjesto. Za američki Zastupnički dom ovaj je problem riješen u Ustavu, ali rješenje nije tako jednoznačno u zemljama koje koriste proporcionalnu zastupljenost. U Metropolisu je Socijalistička partija dobivala članove. Što mislite koliko bi velika stranka trebala biti prije nego što bude zastupljena u peteročlanom sudačkom vijeću? Opišite kako biste to odlučili.

7. Glavna razlika između proporcionalne zastupljenosti i federalnih sustava je u tome što u federalnim sustavima broj država ostaje prilično stabilan, dok je u nekim zemljama koje koriste proporcionalnu zastupljenost broj stranaka stalno podložan promjenama. Neke stranke nestaju, a stvaraju se nove. Prevelika promjena u broju i sastavu stranaka može dovesti do političke nestabilnosti. Što mislite koju metodu raspodjele primijeniti da bi najbolje osigurali stabilnost stranke?

Istraživanje

8. Neki politički aktivisti vjeruju da je došlo vrijeme za reformu američkog političkog sustava. Istražite proporcionalnu zastupljenost u Sjedinjenim Američkim Državama. Pod kojim bi se okolnostima ona mogla koristiti? Tko to zagovara? Tko se tome protivi? Koje bi bile prednosti i nedostatci korištenja proporcionalnog reprezentativnog sustava?

* * * * *

Kutak za učitelja

Proporcionalna zastupljenost posebno je prikladna za politički heterogena društva, npr. za federalni sustav u kojemu pobjednik uzima sve u svakoj izbornoj jedinici, a manje stranke vrlo teško mogu biti zastupljene.

Postoji cijeli pokret za izbornu reformu SAD-a koji zagovara usvajanje proporcionalne zastupljenosti barem na lokalnoj i državnoj razini. Bob Richie, Nacionalni direktor Centra za glasanje i demokraciju, tvrdi da mnogi Amerikanci ne glasaju jer se ne osjećaju zastupljenima. Ističe da je na izborima 1994. godine u Zastupnički dom jedva 22% birača s pravom glasa pomoglo izabrati kandidate. Nasuprot tome, 75% njemačkih birača s pravom glasa sudjelovalo je u izboru kandidata koristeći proporcionalni izborni predstavnički sustav na svojim izborima 1994. Bob Richie navodi:

Širenje političke moći, pružanje biračima da sjede za stolom donošenja politika vrlo su važni koraci u pružanju veće dugoročne stabilnosti za našu demokraciju.

Centar za glasanje i demokraciju nalazi se na World Wide Webu. Poštanska adresa Centra je 6905 Fifth Street NW, Suite 200, Washington DC 20012. Vaši bi se učenici mogli pridružiti raspravi o mogućnostima reforme glasanja u SAD-u. Osjećaju li se zastupljenima? Misle li da bi se osjećali bolje zastupljenima u sustavu proporcionalne zastupljenosti? Je li vjerojatnije da bi tada glasali?

Odgovori

Razmotrite ovo ...

1. - 4. Odgovori će se razlikovati.

5.

stranka	glasovi na prošlim izborima	idealna kvota	raspodjela
demokrati	43500	1,45	2
republikanci	69000	2,3	2
nezavisni	37500	1,25	1

stranka	glasovi na izborima ove godine	idealna kvota	raspodjela
demokrati	45000	1,5	1
republikanci	59000	1,97	2
nezavisni	46000	1,53	2

Demokrati su dobili više glasova, ali su izgubili mjesto. Republikanci su dobili manje glasova ali su dobili mjesto.

6. Odgovori će varirati.

7. Odgovori će varirati. Jeffersonova metoda favorizira veće države, a time i veće stranke. Može se pokazati da će to potaknuti koalicije stranaka, a zapravo je to jedina metoda koja potiče koalicije i izbjegava paradoks stanovništva.

Istraživanje

8. Na World Wide Webu postoje informacije o proporcionalnoj zastupljenosti. One se mogu pronaći pretraživanjem s ključnim frazama i riječima kao što su "proporcionalna reprezentacija", "izbori", "glasovanje", "demokracija" i "raspodjela".

Referentna bilješka

1. Centar za glasanje i demokraciju[7]

Center for Voting and Democracy
6930 Carroll Avenue Suite 610
Takoma Park, MD 20912
The Center for Voting and Democracy
6930 Carroll Ave. Suite 610, Takoma Park, MD 20912
info@fairvote.org
Url: http://www.fairvote.org/

[7]FairVote (bivši Centar za glasovanje i demokraciju) organizacija je 501(c)(3) koja zagovara izbornu reformu u Sjedinjenim Državama. Osnovana 1992. kao Građani za proporcionalnu zastupljenost kako bi podržala provedbu proporcionalne zastupljenosti na američkim izborima. Organizacija je 1993. godine postala Centar za glasovanje i demokraciju, a 2004. promijenila je ime u FairVote kako bi izrazila svoju potporu takvim naporima.

2. M. de Villiers: Dva teksta

Tekstovi koje je napisao Michael de Villiers objavljeni su u časopisima *Pythagoras, 33*, April 1994, pp. 33 - 36 *A mathematical look at "voting power"* i *Spectrum, 33(3)*, 36 - 37, Aug 1995 *The voting power of the various parties at national and provincial level*

Ovdje dajemo dva teksta koje je napisao Michael de Villiers i koja su objavljena 1994.i 1995. godine.

2.1. Matematički pogled na glasačku moć

Od 27. do 29. travnja 1994. godine dogodio se dugo iščekivani povijesni događaj u Južnoj Africi - prvi potpuno demokratski izbori. U ovom trenutku, moglo bi stoga biti od posebnog zanimanja i važnosti za učitelje matematike i učenike pogledati matematičko viđenje koncepta glasanja poput *glasačke moći.* Na skroman način, to bi moglo pozitivno pridonijeti općem biračkom obrazovanju nacije.

Još jedna svrha ovog članka je pokazati primjenu matematičkih tehnika na političke znanosti, a time i problematiziranje stereotipa da matematika ima vrijednost samo u određenim primijenjenim znanostima poput fizike, kemije, informatike itd. Namijenjen je srednjoškolskoj razini i uglavnom uključuje elementarne matematičke koncepte kao što su postotci, tehnike brojanja, itd.

Što je glasačka moć?

Većina politologa u definiciji *glasačke moći* tvrdi da što je veći udio glasova koje akter (npr. stranka) kontrolira, veća je ta glasačka moć. Drugačije rečeno, glasačka moć je izravno proporcionalna broju glasova koje netko kontrolira.

Ali je li to stvarno tako?

Pogledajmo konkretan primjer.

Pretpostavimo da su se na izborima za skupštinu od 450 mjesta dobili sljedeći rezultati.

stranka	broj mjesta	postotak %
A	200	44,4 %
B	150	33,3 %
C	100	22,2 %

Intuitivno, čini se da stranka A ima više moći od druge dvije. Je li to stvarno istina?

Banzhafova metoda

Državni prizivni sud New Yorka je prihvatio Banzhafov indeks kao osnovu za dodjelu pondera predstavnicima u županijskim odborima te države. Ova metoda ispituje sve moguće **ishode** glasanja aktera u glasačkom tijelu.

Radi jednostavnosti, ovdje ćemo pretpostaviti da svi stranački predstavnici bilo koje konkretne stranke uvijek glasuju isto, tj. u bloku. (U praksi se to ne će nužno dogoditi.)

Općenito, postoje 2^n moguća ishoda s "da/za" ili "ne/protiv" u glasanju n stranaka (grupa birača). U navedenom je primjeru $n = 3$ pa imamo $2^3 = 8$ mogućih ishoda prema pravilu *apsolutne većine* (glasovi ≥ 226) kao što je prikazano u tablici.[1]

[1]T. Marošević: Ovdje je i u tablici pristup Banzhafovom indeksu takav da se gledaju svi ishodi ("prolazi" i "ne prolazi"), tj. gledaju se sve koalicije, koje su i pobjedničke i gubitničke

U literaturi koja se koristi kod Banzhafovog indeksa gledaju se samo pobjedničke koalicije (tj. samo ishodi-rezultati "prolazi"), pa je ovdje razlika u pristupu.

stranke				
A(200)	B(150)	C(100)	ukupno glasova	rezultat
da	da	da	450	prolazi
da	ne	da	300	prolazi
da	da	ne	350	prolazi
da	ne	ne	200	ne prolazi
ne	da	da	250	prolazi
ne	ne	da	100	ne prolazi
ne	da	ne	150	ne prolazi
ne	ne	ne	0	ne prolazi

Tablica 1.

Da bismo utvrdili da li odluka prolazi ili ne, brojimo ukupan broj glasova, a odluka (”pitanje”) prolazi, ako je broj glasova ”za” jednak ili veći od potrebnog minimuma. ili ne će proći.[2] Ispitajte svaki ishod. Ako prolazi, gleda se svaka stranka koja je glasala s ”da”. Ako *bilo koja stranka u isto vrijeme* mijenja svoje glasove u protiv, da li pitanje propada? Ako hoćete, zaokružite onu stranku, koja se zove **središnja** (ili kritična) i nastavite provjeravati sve stranke za svaki ishod.[3]

(`Napomena:` Ovdje se koriste tri istoznačna pojma (središnja = kritična = ključna).

Ako pitanje ne prolazi, provjeravamo svaku stranku koja je glasala protiv. Ako bilo koja od ovih stranaka promijeni svoje glasove u ”da”, hoće li odluka (pitanje, prijedlog) tada proći? Ako hoće, ta stranka je ključna i zaokružite je.

Na primjer, kada sve tri stranke glasaju ”za”, pitanje prolazi s 450 glasova. Ako bilo koja stranka promijeni svoje glasove u ”ne”, problem će ipak proći; dakle, u prvom retku nijedna stranka nije ključna. U drugom redku stranke A i C glasovale su ukupno s 300 glasova ”da”, tako da odluka će ipak proći. Međutim, ako bilo koja strana promijeni glas u ”protiv”, odluka ne će proći. Kao rezultat toga, obje stranke A i C su ključne u tom ishodu drugog redka.

Glasačka moć svake stranke sada se izračunava dijeljenjem broja koliko je puta stranka bila ključna s ukupnim brojem ključnih slučajeva. Dakle, Banzhafov indeks za stranke A, B i C je $\left(\frac{4}{12}, \frac{4}{12}, \frac{4}{12}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.[4]

Nadalje, glasačka moć svakog pojedinog člana stranke može se izračunati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \text{Stranka A} &= \tfrac{1}{200} \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{600} \\ \text{Stranka B} &= \tfrac{1}{150} \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{450} \\ \text{Stranka C} &= \tfrac{1}{100} \times \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{300} \end{aligned}$$

[2] T. Marošević: može biti zahjev da bude potrebna nadpolovična većina, ili neka druga kvota glasova za ”prolaz” odluke (prijedloga)

[3] T. Marošević: Ovdje se već podrazumijeva da je poznato što to znači da je stranka središnja (tj. kritična). Iz literature je poznata ovakva definicija pojma kritične stranke: gledaju se samo pobjedničke koalicije (stranke čine pobjedničku koaliciju, ako one imaju nadpolovični broj glasova, tj. ako odluka-pitanje prolazi); stranka koja je član u pobjedničkoj koaliciji naziva se kritična, ako izlaskom stranke iz pobjedničke koalicije, ta koalicija postaje gubitnička (tj. tada odluka-pitanje ne će proći).

[4] T. Marošević: Vjerojatno se radi o dva pristupa izračunavanja Banzhafovog indeksa; - poznat je pristup, već spomenut, da se u izračunu Banzhafovog indeksa gledaju samo pobjedničke koalicije (tj. samo oni ishodi-rezultati u kojima odluka-pitanje ”prolazi”) Banzhafov indeks stranke A jeste 2/(2+2+2)=2/6=1/3, analogno je tako i za stranku B i za stranku C;

- u takvom pristupu, u Banzhafovom indeksu ne gledaju se ishodi u kojima odluka-pitanje ne prolazi (jer je to nekako komplementarno sa slučajevima u kojima pitanje prolazi, ovdje u tekstu kao da bi onda bio faktor 2 u izračunavanju, a Banzhafov indeks je jednak).

Kao što se vidi, stranka A *nema* veću moć. Naprotiv, sve tri stranke posjeduju istu moć jer *nijedna* stranka ne može pobijediti, ali svake dvije stranke mogu. Nadalje, kada se ispituje glasačka moć pojedinih članova, članovi stranke C, a ne stranke A, posjeduju najveću moć.

Zadatak 1.

(a) Što se događa s glasačkom moći neke stranke u gornjem primjeru ako se pravilo glasanja promijenio u pravilo dvotrećinske apsolutne većine (glasovi ≥ 300)? **Prije** stvarnog izračuna, za koju od stranaka intuitivno mislite da će imati najviše koristi od povećanja glasačkog pravila?

(b) Koja je odgovarajuća glasačka moć triju stranaka A, B i C prema pravilu proste apsolutne većine ako redom imaju 200 (57 %), 100 (29 %) i 50 (14 %) mjesta u parlamentu ili domu od 350 mjesta ili skupštini?

Paradoks novih članova

Konvencionalna politička mudrost sugerira da je ratna varka za razvodnjavanje moći dominantnog člana (ili koalicije) u glasačkom tijelu povećati veličinu tijela. Ali je li to stvarno tako?

Pretpostavimo da je nova stranka s 50 mjesta, recimo stranka D dodana našem prvom primjeru, čime je povećan broj od 450 mjesta u parlamentu na 500 mjesta. Kako ovo povećanje veličine tijela utječe na odgovarajuću glasačku moć izvorne stranke, s obzirom na pravilo glasanja prostom većinom (glasovi ≥ 250)?

Razmotrite tablicu koja prikazuje sve moguće ishode glasovanja predstavnika četiriju stranaka ($2^4 = 16$). Ključni slučajevi već su zaokruženi.

stranke					
A(200)	B(150)	C(100)	D(50)	ukupno glasova	rezultat
da	da	da	da	500	prolazi
da	da	ne	da	400	prolazi
da	da	da	ne	450	prolazi
da	da	ne	ne	350	prolazi
da	ne	da	da	350	prolazi
da	ne	ne	da	250	prolazi
da	ne	da	ne	300	prolazi
da	ne	ne	ne	200	ne prolazi
ne	da	da	da	300	prolazi
ne	da	ne	da	200	ne prolazi
ne	da	da	ne	250	prolazi
ne	da	ne	ne	150	ne prolazi
ne	ne	da	da	150	ne prolazi
da	ne	ne	da	50	ne prolazi
ne	ne	da	ne	100	ne prolazi
ne	ne	ne	ne	0	ne prolazi

Tablica 2.

Banzhafov indeks za stranke A, B, C i D redom jednak je $\left(\frac{10}{24}, \frac{6}{24}, \frac{6}{24}, \frac{2}{24}\right) = \left(\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right)$. Dok se glasačka moć stranaka B i C smanjuje u proširenom glasačkom tijelu, stranka A iznenađujuće *povećava* svoju snagu u tijelu! Točnije, njezina snaga raste s $\frac{1}{3} = 0,33$ na $0,42$, unatoč činjenici da se njezin relativni udio glasova smanjuje od $\frac{200}{450} = 0,44$ na $\frac{200}{500} = 0,40$. Ovo istovremeno *smanjenje* u stranačkom omjeru glasova, u proširenom glasačkom tijelu *povećanje* je njezine glasačke moći. To djeluje paradoksalno.

Brams (1976) pokazao je da je vjerojatnost ovog paradoksa koji se događa dodavanjem jedne stranke glasačkom tijelu (između 2 i 7 stranaka) uvijek prelazi 0,45 što je prilično velika vjerojatnost. On također daje zanimljive empirijske primjere ovog paradoksa i njegovih posljedica u američkoj politici itd.

Zadatak 2.

(a) Što se događa s glasačkom snagom četiriju stranaka gore iz Tablice 2. ako se pravilo glasanja promijeni u pravilo dvotrećinske apsolutne većine (glasovi ≥ 333)?

Prije provođenja pravog izračuna, pokušajte odgovoriti na pitanje - koja stranka ili stranke bi intuitivno imale najviše koristi od povećanja pravila glasanja?

Paradoks zavađenih članova

Tradicionalni pogled na moć kaže da što je manje sukoba među sudionicima (npr. strankama), moć je veća. Pretpostavimo da su dvije stranke u glasačkom tijelu svađaju i odbijaju zajedno formirati koalicije. (Drugim riječima, pretpostavimo da stranke odbijaju surađivati u potpori prijedloga, tj. odbijaju istovremeno glasati "za"). Intuitivno se očekuje da će uspjeti samo povrijediti jedni druge. Je li ovo očekivanje nužno?

stranke				
A(200)	B(150)	C(100)	ukupno glasova	rezultat
da	da	da	450	prolazi
da	ne	da	300	prolazi
da	da	ne	350	prolazi
da	ne	ne	200	ne prolazi
ne	da	da	250	ne prolazi
ne	ne	da	100	ne prolazi
ne	da	ne	150	ne prolazi
ne	ne	ne	0	ne prolazi

Tablica 3.

Razmotrimo ponovno problem dan u zadatku 1.(a) gdje smo pronašli da je Banzhafov indeks stranaka $\left(\frac{6}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Ključni slučajevi su prikazani u tablici. Pretpostavimo da se svađaju dvije stranke B i C.

Izbrišite prvi redak:

$$\underbrace{\text{da} \quad \texttt{da} \quad \texttt{da} \quad \texttt{450} \quad \texttt{prolazi}}_{\text{(prvi redak)}}$$

i peti redak:

$$\underbrace{\text{ne} \quad \texttt{da} \quad \texttt{da} \quad \texttt{250} \quad \texttt{ne prolazi}}_{\text{(peti redak)}}$$

koji su isključeni svađajućim ograničenjem jer oni ne rade zajedno u potpori prijedloga. Zatim je Banzhafov indeks jednak $\left(\frac{4}{8}, \frac{2}{8}, \frac{2}{8}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Glasačka snaga stranaka B i C je povećana s $\frac{1}{5} = 0,2$ ako se ne svađaju, na $\frac{1}{4} = 0,25$ ako se posvađaju!

Kao što Brams (1976: str.190) ističe:

... dakle ... razmatranje moći - neovisno o ideološkim razmatranjima - može potaknuti sukobe među članovima glasačkog tijela jednostavno zato što takav sukob pojačava svoj učinak na glasačke moći članova.

Zaključak

Naravno, moglo bi se ustvrditi da navedeni paradoksi su *nenormalni*, da su samo umjetne tvorevine Banzhafovog indeksa. Ipak treba istaknuti da se točno isti paradoksi javljaju s drugim mjerama glasačke moći, npr. Shapley-Shubik i Colemanovi indeksi (vidi Swetz & Hartzler, 1991: str.60-64; Brams, 1976: str.176-190).

Brams (1976: str.192) zauzima stajalište da se radi o ograničenju u klasičnom političkom razmišljanju i modelima, a ne o aberaciji u fenomenu. Stoga se čini poželjnije promatrati ove paradokse kao odraz suptilnih aspekata glasačke moći čije bi postojanje bilo teško utvrditi u nedostatku preciznih kvantitativnih pojmova.

Čitatelj može također razmotriti tvrdnju Bramsa (1976) u zanimljivoj raspravi o paradoksu predsjedavajućeg položaja u glasačkom tijelu. Taj u nekim slučajevima može biti u izrazito nepovoljnom položaju u odnosu na drugog člana unatoč njegovom dodatnom odlučujućem glasu. (Također pogledajte Steiner, 1968).

Rješenja

Zadatak 1.

(a) Intuitivno se može očekivati da bi se pravilnim povećanjem broja glasova mogla smanjiti glasačka moć najveće stranke, budući da jedna stranka može postati ovisnija o drugoj formirajući pobjedničku koaliciju.

Međutim, Banzhafov indeks je $\left(\frac{6}{10}, \frac{2}{10}, \frac{2}{10}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right)$. (Vidi Tablicu 3.) Drugim riječima, najveća glasačka moć gotovo se *udvostručila* s $\frac{1}{3} = 0,33$ na $\frac{3}{5} = 0,60$, dok je dvjema manjim strankama glasačka moć smanjena s $\frac{1}{3} = 0,33$ na $\frac{1}{5} = 0,20$!

Čini se razumnim pretpostaviti da u situaciji poput one prikazane u tablici, stranka A bi snažno podržavala povećanje pravila glasanja. (Pod pretpostavkom naravno da su svjesni Banzhafovog indeksa.)

(b) U ovom slučaju, Banzhafov indeks je $(1, 0, 0)$. Stranke B i C zajedno kontroliraju samo 150 (43%) glasova i njihovi glasovi su nebitni za odabir ishoda. Takvi nemoćni članovi se uobičajeno zovu *lutkama*. Stranka se A, pak, zove *diktator*, budući da su njezini glasovi sami po sebi dovoljni za odrediti ishod ili samo s koalicijom čiji je član.

Imajte na umu da je u situaciji (iz tablice) smanjenja glasanja od 40 % (glasovi ≥ 180) rezultiralo da stranka A postane diktator.

Zadatak 2.

(a) Banzhafov je indeks $\left(\frac{10}{20}, \frac{6}{20}, \frac{2}{20}, \frac{2}{20}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$. Iako je glasanje moć dviju većih stranaka povećalo kako se moglo očekivati iz našeg prethodnog primjera, glasačka moć stranke

D također je malo porasla s $\frac{1}{12} = 0,08$ na $\frac{1}{10} = 0,1$. Međutim, stranka C je imala ogromno smanjenje glasačke moći s $\frac{1}{4} = 0,25$ na $\frac{1}{10} = 0,1$.

Literatura:

1. Brams, S.J. (1976): *Paradoxes in politics*, New York, The Free Press
2. Swetz., F. &. Hartzler, J. S. (1991): *Mathematical in the secondary school curriculum*, Reston, VA:NCTM
3. Steiner, K. G. (1968): *Examples of excercices in mathematization on the secondary school level*, Educational Studies im Mathematics, 1:181-201.

2.2. Glasačka moć raznih stranaka na nacionalnoj i razini provincije

Dana 27. i 29. travnja 1994. u Južnoafričkoj Republici dogodio se dugo iščekivani povijesni događaj - prvi potpuno demokratski izbori. Sada kada su glasovi prebrojani i mjesta dodijeljena u nacionalnom parlamentu i provincijskim tijelima, moglo bi biti zanimljivo pogledati moć različitih stranaka u njima. Ovaj će članak pokušati pokazati informativnu vrijednost matematičke analize odnosa moći u različitim političkim tijelima.

Većina tradicijskih definicija *glasačke moći* političkih znanstvenika tvrdi da s većim udjelom glasova koji akter (npr. stranka) kontrolira u glasačkom tijelu (npr. nacionalnom ili provincijskom), veća je moć tog aktera. Drugim riječima, nečija glasačka moć izravno je proporcionalan broju glasova koje netko kontrolira. Je li to stvarno tako?

Pogledajmo konkretan primjer.[5] Pretpostavimo da na izborima stranke A, B i C redom dobiju 200 (44,4 %), 150 (33,3 %) i 100 (22,2 %) mjesta u sklopu 450 skupšinskih mjesta. Intuitivno se čini da stranka A ima veću moć od druge dvije (npr. dvostruko veću moć od stranke C). Međutim, je li to stvarno istina?

Banzhafova metoda

Državni prizivni sud New Yorka prihvatio je Banzhafov indeks kao osnovu za dodjelu pondera predstavnicima u županijskim odborima te države. Ova metoda ispituje sve moguće **ishode** glasanja sudionika ili glasača u glasačkom tijelu i određuje sposobnost svakog aktera da **kontrolira** svaki ishod.

Jednostavnosti radi, ovdje ćemo pretpostaviti da svi stranački zastupnici bilo koje konkretne stranke uvijek glasuju isto, npr. u bloku. (U praksi se to ne događa nužno.)

stranke				
A(200)	B(150)	C(100)	ukupno glasova	rezultat
da	da	da	450	prolazi
da	ne	da	300	prolazi
da	da	ne	350	prolazi
da	ne	ne	200	ne prolazi
ne	da	da	250	prolazi
ne	ne	da	100	ne prolazi
ne	da	ne	150	ne prolazi
ne	ne	ne	0	ne prolazi

Tablica 4.[6]

Općenito, postoje 2^n moguća ishoda glasovanja n stranaka (grupe birača) s "da/za" ili "ne/protiv". U gornjem primjeru za tri stranke imamo $2^3 = 8$ mogućih ishoda uz pravilo *apsolutne većine* (glasovi ≥ 225) kako je prikazano u tablici.[7]

Brojimo ukupan broj glasova kako bismo utvrdili hoće li problem proći (glasovi koji su jednaki ili veći od potrebnog minimuma) ili ne će proći. Ispitajte svaki ishod. Ako problem prođe, gledamo svaku stranku koja je glasala s "da". Kad bi jedna po jedna stranka promijenila svoj glas u glas "ne", bi li problem tada propao? Ako hoćete, zaokružite onu stranku koja se naziva **ključnom** (ili kritičnom) i nastavite provjeravati sve stranke za svaki ishod.

[5] T. Marošević: Ovaj tekst na početku 2.2. je (pod)jednak tekstu na početku 2.1.

[6] Tablica 4. ista je kao Tablica 1. na str. 106.

[7] T. Marošević: Tekst nakon Tablice 4. (pod)jednak je takstu nakon Tablice 1. Stoga, svi prethodni komentari teksta oko i u vezi Tablice 1., mogu se odnositi i na ovaj tekst oko i u vezi Tablice 4.

(`Napomena:` Više od jedne stranke ili nijedna stranka ne može biti ključna).[8]

Ako problem nije prihvaćen, provjeravamo svaku stranku koja je glasala s "ne". Ako je ijedna od tih stranaka promijenila svoj glas u "da", hoće li se problem tada prihvatiti? Ako hoće, ta je stranka ključna i zaokružite je.

Na primjer, kada sve tri stranke glasaju s "da", problem prolazi s 450 glasova. Ako bilo koja stranka mijenja svoje glasove u "ne", problem bi mogao ipak proći. Dakle, u prvom retku nijedna stranka nije ključna. U drugom redku, stranke A i C glasale su s "da" s ukupno 300 glasova, tako da problem prolazi. Međutim, ako bilo koja stranka promijeni glas u "ne", problem se ne će prihvatiti. Kao rezultat toga, obje stranke A i C su ključne u tom ishodu drugog redka.

Glasačka moć svake stranke sada se izračunava dijeljenjem broja koliko je puta stranka bila ključna s ukupnim brojem ključnih slučajeva.

Dakle, Banzhafov je indeks za stranke A, B i C $\left(\frac{4}{12}, \frac{4}{12}, \frac{4}{12}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Nadalje,[9] glasačka moć svakog *pojedinog* člana stranke može se izračunati na sljedeći način:

$$\text{Stranka A} \quad = \quad \frac{1}{200} \times \frac{1}{3} \quad = \quad \frac{1}{600}$$

$$\text{Stranka B} \quad = \quad \frac{1}{150} \times \frac{1}{3} \quad = \quad \frac{1}{450}$$

$$\text{Stranka C} \quad = \quad \frac{1}{100} \times \frac{1}{3} \quad = \quad \frac{1}{300}$$

Kao što se vidi, stranka A nema veću moć. Točnije, sve tri stranke posjeduju istu moć jer nijedna stranka ne može pobijediti, ali svake *dvije* stranke mogu. Nadalje, kada se ispituje glasačka moć pojedinačnih članova, članovi stranke C, a ne stranke A, posjeduju najviše moći.

Naravno, netko bi mogao tvrditi da je gore spomenuta analiza *nenormalna* i samo umjetno stvaranje Banzhafovog indeksa. Slični rezultati su pronađeni i kod drugih mjerenja glasačke moći, tj. Shapley-Shubik i Coleman indeksi.

Zapravo, može se tvrditi da je to bilo ograničenje u tradicionalnom političkom mišljenju i modelima i nije odstupanje od fenomena nego jednostavno izjednačavanje moći s veličinom. Stoga se čini da je bolje promatrati takve rezultate kao ponovno otkrivanje suptilnih aspekata glasačke moći čije bi postojanje bilo teško utvrditi u nedostatku preciznih kvantitativnih koncepata.

Banzhafovi indeksi političkih stranaka

Banzhafov indeks (B.I.) glasačke moći različitih političkih stranaka na nacionalnoj i na razini provincije dane su u tablicama na kraju članka. U većini slučajeva dani su Banzhafovi indeksi apsolutnom većinom (glasovi $> 50\,\%$), kao i dvotrećinskom većinom (glasovi $> 66,7\,\%$). Glasačka moć pojedinačnih članova svake stranke dana je u zagradi. Imajte na umu da je postotak nakon broja mandata stranke postotak mandata u tom glasačkom tijelu, a ne nužno jednak postotku glasova dobivenih na izborima.

Pogledamo li najprije slučaj Narodne skupštine, odmah bi trebalo biti jasno da za odlučivanje apsolutnom većinom ANC će imati svu moć kao i da sve ostale su stranke potpuno nemoćne odrediti ishod bilo kojeg glasanja. (U matematičkoj teoriji glasanja član glasačkog tijela koji kontrolira svu moć naziva se *diktatorom*, dok su nemoćni članovi nazivaju *lutkama*.)

Međutim, za dvotrećinsku većinu zanimljivo je vidjeti da je glasačka snaga svakog pojedinog člana manje stranke Slobodarske fronte (Freedom Front) najveća i jednaka 0,0065.

Iako je Nacionalna stranka (NP) druga po broju mjesta, svaki njezin pojedinačni član ima najmanju glasačku moć u ishodu glasovanja.

---

[8] T. Marošević: kod Tablice 1. već je komentirano: redak 2 u Tablici 4.: da ne da, pokazuje da su i stranka A i stranka C ključne u tom ishodu.

[9] Isti tekst kao na str. 106.

Zanimljivo je da NP ima gotovo dvostruko više mjesta od IFP-a u Nacionalnoj skupštini, a da je njihova glasačka moć potpuno ista i iznosi 0,129. Također je zanimljivo uočiti, kako je prikazano u predzadnjoj koloni, da formiranje koalicije između recimo DP-a i FF-a ne smanjuje glasačku moć ANC, što bi se moglo intuitivno pretpostaviti, nego je povećava s 0,624 na 0,70. Nadalje, formiranjem ove koalicije dobili bi istu moć kao i NP i IFP-a, a to bi rezultiralo potpunim lišavanjem ovlasti PAC-a i ACDP-a.

Daleko značajnije, vidimo, kao što je prikazano u zadnjem stupcu, da bi (minimalna) koalicija NP, IFP i FF rezultirali dobivanjem potpuno istog Banzhafovog indeksa od 0,5 kao ANC!

Drugim riječima, takva bi koalicija imala potpuno istu moć odrediti ishod glasovanja kao ANC, iako ANC ima gotovo dvostruko više mjesta od njih. Pod takvim uvjetima, bilo bi poželjno da se manje, sada nemoćne stranke, pridruže jednoj iz njihovog grupiranja. (Treba napomenuti da je broj 267 minimalan za prolaz glasanja. Ako je 266 minimalan za prolaz glasanja, tada bi DP, PAC i ACDP imali određenu glasačku moć jer se mogu kombinirati s ANC-om kako bi osigurali prolaz glasanja.

Zapravo, Banzhafovi bi indeksi tada bili: ANC= 0,44, NP/IFP/FF= 0,39 i DP= PAC = ACDP = 0,06. Ako je 266 odabrano kao minimalan za prolaz glasanja, barem jedna od manjih stranaka, također bi se morala pridružiti koaliciji NP/IFP/FF kako bi koalicija ponovno imala istu moć kao ANC s 0,5).

U pokrajinskim skupštinama Istočnog Capea, Istočnog Transvaala, Sjevernog Transvaala, Sjeverozapada i Orange Free State, ANC je u biti diktator, budući da imaju više od dvije trećine zastupničkih mjesta. U drugim provincijama opet nalazimo da pojedini članovi nekih od manjih dijelova imaju veću glasačku moć od onih članova većih stranaka. Na primjer, u Western Capeu Banzhafov indeks jednog člana ACDP-a je 0,0526 za razliku od 0,0189 za svakog člana NP-a. Nadalje, iako NP ima gotovo dvostruko veći broj mjesta od ANC-a u Western Capeu, sigurno nema dvostruko moći.

Slično tome, vidimo u Kwazulu/Natalu da iako IFP ima mnogo više mjesta od ANC-a, njihova glasačka moć od 0,472 nije mnogo veća od 0,417 ANC-a. Nadalje, iako čak NP ima 9 puta više mjesta u ovoj pokrajini nego što imaju MP i ACDP, on (NP) nema veću glasačku moć od MF i ACDP u određivanju ishoda glasanja.

U Northern Capeu Slobodarska fronta (FF) i Demokratska stranka (DP) nemaju stvarnu vlast dvotrećinskom većinom i bilo bi bolje da njihovi članovi koaliraju s Nacionalom strankom (NP).

Slično tome, PAC-u i ACDP-u u PWV području isplatilo bi se razmotriti formiranje koalicije s većim strankama.

(Napomena: Oznaka B.I. je Banzhafov indeks.)

Nacionalni

	mjesta	B.I. (> 200)	B.I. (> 266)	B.I. (> 266)	B.I. (> 266)
ANC	252 (63,0 %)	1 (0,004)	0,624 (0,0025)	0,70 (0,003)	0,50 (0,002)
NP	82 (20,5 %)	0	0,129 (0,0016)	0,10 (0,001)	0,50 (0,004)
IFP	43 (10,8 %)	0	0.129 (0,0030)	0,10 (0,002)	
FF	9 (2,2 %)	0	0,059 (0,0065)		
DP	7 (1,8 %)	0	0,035 (0,0050)	0,10 (0,006)	0
PAC	5 (1,3 %)	0	0,012 (0,0024)	0	0
ACDP	2 (0,5 %)	0	0,012 (0,0059)	0	0

Eastern Cape

	mjesta	B.I. (> 37)
ANC	48 (84,2 %)	1 (0.021)
NP	6 (10,5 %)	0
DP	1 (1,8 %)	0
PAC	1 (1,8 %)	0
FF	1 (1,8 %)	0

Western Cape

	mjesta	B.I. (> 22)	B.I. (> 29)
NP	25 (56,8 %)	1 (0,04)	0,474 (0,0189)
ANC	14 (31,8 %)	0	0,368 (0,0263)
DP	3 (6,8 %)	0	0,053 (0,0175)
FF	1 (2,3 %)	0	0,053 (0,0526)
ACDP	1 (2,3 %)	0	0,053 (0,0526)

Northern Cape

	mjesta	B.I. (> 15)	B.I. (> 19)
ANC	15 (50,0 %)	0.538 (0,0359)	0,50 (0,0333)
NP	12 (40,0 %)	0,308 (0,0256)	0,50 (0,0417)
FF	2 (6,7 %)	0,077 (0,0385)	0
DP	1 (3,3 %)	0,077 (0,0769)	0

Eastern Transvaal

	mjesta	B.I. (> 20)
ANC	25 (83,3 %)	1 (0,04)
NP	3 (10,0 %)	0
FF	2 (6,7 %)	0

Northern Transvaal

	mjesta	B.I. (> 27)
ANC	38 (95,0 %)	1 (0,03)
NP	1 (2,5 %)	0
FF	1 (2,5 %)	0

PWV

	mjesta	B.I. (> 43)	B.I. (> 57)
ANC	50 (58,1 %)	1 (0,02)	0,545 (0,0109)
NP	21 (24,4 %)	0	0,189 (0,0087)
FF	5 (5,8 %)	0	0,091 (0,0182)
DP	5 (5,8 %)	0	0,091 (0,0182)
IFP	3 (3,5 %)	0	0,091 (0,0303)
PAC	1 (1,2 %)	0	0
ACDP	1 (1,2 %)	0	0

North West

	mjesta	B.I. (> 20)
ANC	26 (86,7 %)	1 (0,0385)
NP	3 (10,0 %)	0
FF	1 (3,3 %)	0

Orange Free State

	mjesta	B.I. (> 20)
ANC	24 (80,0 %)	1 (0,0417)
NP	4 (13,3 %)	0
FF	2 (6,7 %)	0

KwaZulu/Natal

	mjesta	B.I. (> 40)	B.I. (> 53)
IFP	41 (51,3 %)	1 (0,0244)	0,472 (0,0115)
ANC	26 (32,5 %)	0	0,417 (0,0160)
NP	9 (11,3 %)	0	0,028 (0,0031)
DP	2 (2,5 %)	0	0,028 (0,0139)
MF	1 (1,3 %)	0	0,028 (2,0278)
ACDP	1 (1,3 %)	0	0,028 (2,0278)

3. N. Radović, P. Mladinić: Analiza hrvatskih izbora

Nikol Radović

Petar Mladinić

U ovom poglavlju objavit ćemo podatke koji se mogu naći na službenim stranicama u RH i koji će učenicima i nastavnicima poslužiti u analizi i mogućim primjenama metoda koje su elaborirane u poglavljima: *Je li demokracija fer?* i *Dva teksta Michaela de Villiersa*.

Primjena tih različitih metoda i, sukladno njima, raspodjeli i odlukama jasno će ukazati na dobre i slabe strane našeg izbornog sustava kao što će, uvjereni smo, ukazati i na matematičke razloge odbijanja referendumske inicijative u dosadašnjim pokušajima promjene izbornog sustava u RH.

U *Izbornom leksikonu* Mirjana Kasapović je napisala (str. 61. - 62.): "*D'Hondtova metoda* je u stvari *Jeffersonovo pravilo*[1] jer ju je prvi razvio Thomas Jefferson kao postupak za raspodjelu kongresnih mandata među američkim saveznim državama i pripada metodama najvećeg broja. *Zapravo, nije po srijedi matematički postupak nego postupno razvijena logika brojeva* kako je Müler 1959. godine to elaborirao. Najviše pogoduje velikim strankama."

Razmotrit će se što bi realno izazvala promjena na više ili na manje od 5 % u D'Hondtovoj metodi u izborima, primjerice, na 7 % ili na 3 %, odnosno zašto taj postotak nije 10 % ili više posto.

Matematika te odluke je vrlo jednostavna i lako izračunljiva. Odluka o tom ograničenju je stvar političke odluke i zato je ona dio građanskog odgoja.

Primjeri i zadatci ukazuju na veliki i široki kontekst uporabe ovih metoda ne samo u političkim izborima i raspodjelama glasanja nego u svakodnevnom životu i kao takvi su sastavni dio građanskoj odgoja u našim školama.

Analizu izbora u RH i gradu Zagrebu trebaju razmotriti učenici u obliku projekata u kojima će primjenom pojedine metode na izbornim podatcima moći uočiti *što bi bilo kad bi bilo* sukladno pojedinoj metodi. Slično primjerima izbora u različitim podatcima iz svakodnevnog života. I na taj će način shvaćati i prihvaćati ili ne prihvaćati odluke kojom metodom dobiti rezultate.

Državni zavod za statistiku objavio je rezultate Popisa stanovništva, kućanstva i stanova u Republici Hrvatskoj 2021. godine, prema kojoj Republika Hrvatska ima 3 888 529 stanovnika.

Čak ni Zagreb kao glavni grad nije izbjegao pad stanovništva, a kako situacija izgleda po kvartovima, stoji u podacima DZS-a, a mi smo uz podatke popisa stanovništva 2021. godine naveli i podatke za navedeni kvart iz popisa stanovništva iz 2011. godine.

3.1. Hrvatski Zakon o izborima zastupnika

U zakonu o izborima u RH se definiraju sljedeće činjenice.

a) Broj zastupnika koji će biti izabran sa svake liste izborne jedinice utvrđuje se na sljedeći način:

Ukupan broj važećih glasova koji je dobila svaka lista (biračka masa liste) dijeli se s brojevima od 1 do zaključno 14, pri čemu se uvažavaju i decimalni ostaci. Od svih dobivenih rezultata, zastupnička mjesta osvajaju one liste na kojima se iskaže 14 brojčano najvećih rezultata uključujući decimalne ostatke. Svaka od tih lista dobiva onoliki broj zastupničkih mjesta u Saboru koliko je postigla pojedinačnih rezultata među 14 brojčano najvećih rezultata.

b) Za nacionalne manjine vrijedi:

Pripadnici srpske nacionalne manjine biraju tri zastupnika u Sabor u skladu s Ustavnim zakonom o pravima nacionalnih manjina.

Pripadnici mađarske nacionalne manjine biraju jednog zastupnika u Sabor.

Pripadnici talijanske nacionalne manjine biraju jednog zastupnika u Sabor.

Pripadnici češke i slovačke nacionalne manjine biraju zajedno jednog zastupnika u Sabor.

[1] T. Marošević: zapravo, razlika bi bila u tome, što po D'Hondtovoj metodi može se pridružiti nekoj stranci (odnosno državi-članici) nula zastupničkih mjesta, dok po Jeffersonovoj metodi za pridruživanje broja zastupnika državi-članici ako bi se zaokruživanjem kvocijenta prema dolje (funkcija najveće cijelo) dobila nula, onda se toj državi-članici dodijeli 1 zastupničko mjesto, jer svaka država-članica mora imati barem jedno zastupničko mjesto u Zastupničkom domu (tj. Kongresu) SAD-a.

Pripadnici austrijske, bugarske, njemačke, poljske, romske, rumunjske, rusinske, ruske, turske, ukrajinske, vlaške i židovske nacionalne manjine biraju zajedno jednog zastupnika u Sabor.

Pripadnici albanske, bošnjačke, crnogorske, makedonske i slovenske nacionalne manjine biraju zajednog jednog zastupnika u Sabor.

Pripadnici nacionalnih manjina iz stavka 1., 2. i 3. ovoga članka uz kandidata za zastupnika predlažu i kandidata za njegova zamjenika koji se bira zajedno s njim.

Pripadnici nacionalnih manjina iz stavka 4., 5. i 6. ovoga članka predlažu samo kandidata za zastupnika, a njegovim zamjenikom postaje zastupnički kandidat koji je iza izabranog zastupnika dobio najviše glasova.

Birači, pripadnici nacionalnih manjina koje u stanovništvu Republike Hrvatske sudjeluju s manje od 1,5 % stanovnika, pored općeg biračkog prava imaju i posebno biračko pravo u izborima zastupnika u Sabor.

Nacionalnim manjinama koje na dan stupanja na snagu Ustavnog zakona o izmjenama i dopunama Ustavnog zakona o pravima nacionalnih manjina u stanovništvu Republike Hrvatske sudjeluju s više od 1,5 % stanovnika jamči se najmanje tri zastupnička mjesta pripadnika te nacionalne manjine u Saboru.

Nacionalna manjina iz stavka 2. ovoga članka je srpska nacionalna manjina, koja svoju zastupljenost ostvaruje na temelju općega biračkog prava na stranačkim kandidacijskim listama te manjine ili kandidacijskim listama koje predlažu birači te manjine u izbornim jedinicama na području Republike Hrvatske.

Nacionalne manjine koje u stanovništvu Republike Hrvatske sudjeluju s manje od 1,5 % stanovnika, biraju pet zastupnika pripadnika nacionalnih manjina u posebnoj izbornoj jedinici koju čini cjelokupno područje Republike Hrvatske.

c) Broj zastupnika:

140 zastupnika u Sabor, ne računajući zastupnike nacionalnih manjina i zastupnike koje biraju hrvatski državljani koji nemaju prebivalište u Republici Hrvatskoj, bira se tako da se područje Republike Hrvatske podijeli na deset izbornih jedinica te se u svakoj izbornoj jedinici bira 14 zastupnika u Sabor.

Zastupnici u Sabor biraju se po proporcionalnoj zastupljenosti i preferencijskom glasovanju.

Birači mogu glasovati samo za jednu listu kandidata.

Birač na glasačkom listiću može označiti jednog kandidata koji ima prednost pred ostalim kandidatima na listi za koju je glasovao (preferirani glas).

Broj zastupnika u Sabor koji će biti izabran sa svake liste izborne jedinice utvrđuje se na sljedeći način:

- ukupan broj važećih glasova koji je dobila svaka lista (biračka masa liste) dijeli se brojevima od 1 do zaključno 14, pri čemu se uvažavaju i decimalni ostaci. Od svih dobivenih rezultata, zastupnička mjesta u Saboru osvajaju one liste na kojima se iskaže 14 brojčano najvećih rezultata uključujući decimalne ostatke. Svaka od tih lista dobiva onoliki broj zastupničkih mjesta u Saboru koliko je postigla pojedinačnih rezultata među 14 brojčano najvećih rezultata. S liste je izabrano toliko zastupnika koliko je mandata dobila ta lista,

- preferirani glasovi za pojedine kandidate se uvažavaju ako broj preferiranih glasova pojedinog kandidata iznosi najmanje 10 % glasova koje je osvojila pojedina lista,

- izabrani su oni kandidati sa svake liste koji su dobili najveći broj preferiranih glasova. Kada dva ili više kandidata dobije isti broj preferiranih glasova, odlučujući je poredak na listi kandidata,

- ako na temelju podstavaka 2. i 3. ovoga članka nije izabrano onoliko zastupnika koliko mandata pripada pojedinoj listi, na preostala mjesta na toj listi određuju se zastupnici po redoslijedu na listi.

d) Izborni prag

U našem izbornom zakonu izborni prag iznosi 5 % i definiran je u članku 41. zakona:

Pravo na sudjelovanje u diobi zastupničkih mjesta u izbornoj jedinici ostvaruju liste koje na *izborima dobiju najmanje 5 % važećih glasova birača.*

e) O D'Hondtovoj metodi

U Hrvatskoj postoji 10 teritorijalnih izbornih jedinica, 1 jedinica za dijasporu i 1 jedinica za predstavnike nacionalnih manjina. U svakoj od 10 teritorijalno određenih izbornih jedinica bira se 14 saborskih zastupnika. U jedinici za dijasporu bira se još 3 zastupnika, a u izbornoj jedinici manjina bira se 8 zastupnika. Izborni prag je 5 %, što znači da lista ima pravo sudjelovanja u razdiobi mandata u parlamentu ako osvoji najmanje 5 % glasova birača u jednoj izbornoj jedinici.

U Hrvatskoj se broj zastupnika koje neka lista osvaja u izbornoj jedinici određuje D'Hondtovom metodom.

Kako se ukupan broj glasova neke liste pretvara u broj zastupnika?

Postupak

Radi pojednostavljenja, objasnimo postupak D'Hondtove metode na primjeru.

Uzmimo da postoji samo jedna izborna jedinica i da se u njoj bira 6 zastupnika i da su tri liste prešle prag. Lista A skupila je 38 995 glasova, lista B 37 100, a lista C 19 497.

Korak 1. U prvom koraku broj birača svake liste dijeli se prvo s 1, pa s 2, pa s 3 i tako do broja zastupnika koji se bira u jedinici. U ovom slučaju to je 6. (Kako se recimo u RH po jedinici bira 14 zastupnika, brojevi glasova lista dijele se sa svim brojevima do 14.)

Korak 2. Svi dobiveni omjeri poredaju se u tablici po veličini, sve do broja koji je jednak broju zastupnika koji se biraju (u ovom slučaju s=6 zastupnika).

Iz dobivenih glasova lista dobivaju se sljedeći omjeri (djelitelji su redom 1,2,3,4,5,6):

za listu A: 38995; 19497,5; 12998,3; 9748,75; 7799; 6499,17,

za listu B: 37100; 18550; 12366,7; 9275; 7420; 6183,33,

za listu C: 19497; 9748,5; 6499; 4874,25; 3899,4; 3249,5.

Bira se 6 zastupnika i prvih 6 najvećih omjera su sljedeći:

38995; 37100; 19497,5; 19497; 18550; 12998,3.

Budući da u tih prvih 6 najvećih omjera listi A pripadaju tri njezina omjera (38995; 19497,5; 12998,3), lista A osvaja (dobiva) 3 zastupnička mjesta.

Lista B ima u tih 6 najvećih omjera dva svoja omjera (37100; 18550), pa lista B osvaja 2 zastupnička mjesta.

Analogno, lista C ima u šest najvećih omjera jedan svoj omjer (19497), pa lista C dobiva jednog zastupnika.

Svaka je lista prešla izborni prag od 5%.

Stoga, mandati se mogu odrediti i bez dijeljenja brojeva glasova neke stranke sa zajedničkim djeliteljem, tako da se jednostavno prebroji koliko pojedina stranka ima 'svojih' brojeva među 6 najvećih omjera, koji su prethodno navedeni i opisani.

U slučaju neriješenog ishoda pojedinih omjera, potrebno je utvrditi dodatna pravila za takav slučaj.

Korak 3. Prema dobivenim rezultatima izračuna stranka A osvojila je 3 mandata, stranka B 2, a stranka C 1 mandat.

3.2. Analiza hrvatskih izbora posljednjih godina

Sabor RH ima 151 zastupnika. Izbor zastupnika provodi se na slijedeći način:

- Hrvatska je podijeljena na **deset izbornih jedinica**. U svakoj izbornoj jedinici **14 mandata proporcionalno** se dodjeljuje pomoću **D'Hondtove metode** za ukupno **140 mandata**. Primjenjuje se **preferencijsko glasovanje** i **izborni prag od 5 %**.
- **Tri zastupnička mjesta** biraju Hrvati izvan domovine (11. izborna jedinica).
- **Osam mandata** biraju pripadnici nacionalnih manjina (12. izborna jedinica).

Izbor članova u europski parlament kao i za **predsjednika RH** provodi se u RH kao **jedinstvenoj izbornoj jedinici**.

*****

Potpuni rezultati izbora članova u europski parlament iz RH 2019. godine su u tablici:

broj birača na obrađenim biračkim mjestima	3.696.907	
pristupilo glasovanju	1.103.941	29,86%
glasovalo birača (prema glasačkim listićima)	1.103.551	29,85%
važećih listića	1.073.954	97,32%
nevažećih listića	29.597	2,68%

Službeni rezultati izbora kao i razdioba manadata na izborima iz 2019. godine za europski parlament dana je tablicom:

	LISTE	broj glasova	postotak	broj mjesta
1	HDZ	244 076	22,72%	4
2	SDP	200 976	18,71%	4
3	Hrvatski suverenisti	91.546	8,52%	1
4	NL MISLAV KOLAKUŠIĆ	84 765	7,89%	1
5	ŽIVI ZID	60 847	5,66%	1
6	Amsterdamska koalicija	55 829	5,19%	1
7	MOST	50 257	4,67%	0
8	Ostali			0
	Ukupno	1 093 954	100,00	12

*** za europski parlament 2019. godine RH ima 12 mjesta

Zadatak 1.: Analizirajte ove podatke primijenjujući metode i postupke koji su elaborirani u poglavlju 1.

Zadatak 2.: Kako bi se raspodjelili mandati da se izborni prag promijeni na:

a) 10 %,

b) 7 %,

c) 4 %?

Zadatak 3.: Na stranicama izbornog državnog povjerenstva nađite rezultate glasanja za europski parlament 2024. godine.

Analizirajte ih primijenjujući metode i postupke koji su elaborirani u poglavljima od 1. do 3.

*****

Rezultati izbora za hrvatski Sabor 2024. godine

Temeljem članka 48. Zakona o registru birača popis birača sadrži podatke o biračima koji imaju prebivalište u Republici Hrvatskoj i važeće osobne iskaznice te biračima kojima je izdana osobna iskaznica s podatkom o prebivalištu izvan Republike Hrvatske, biračima koji su se privremeno upisali u registar birača izvan mjesta prebivališta, biračima kojima su izdane potvrde za glasovanje izvan mjesta prebivališta, biračima koji su se prethodno registrirali te aktivno registrirane birače koji nemaju prebivalište u Republici Hrvatskoj.

STATISTIKA BROJA BIRAČA - IZBORI ZA ZASTUPNIKE U HRVATSKI SABOR
UKUPAN BROJ BIRAČA IZ ZAKLJUČENOG POPISA BIRAČA 11.4.2024.
3.733.398

Broj birača s prebivalištem u RH (birači koji imaju važeću osobnu iskaznicu)	Broj birača bez prebivališta u RH
3.511.098	222.300

Broj birača s prebivalištem u RH koji mogu glasovati u mjestu prebivališta	Broj birača s prebivalištem u RH koji će glasovati u inozemstvu registrirani	Broj birača s prebivalištem u RH koji će glasovati u RH izvan prebivališta privremeno	Broj birača s prebivalištem u RH koji će glasovati s potvrdom	Broj birača s posebnim biračkim mjestom
3.449.066	13.507	33.387	1.096	236.342

Hrvatska demokratska zajednica je četvrti put za redom dobila najviše glasova na parlamentarnim izborima 2024. godine, no nije uspjela osvojiti dovoljan broj mandata za većinu u Saboru. HDZ je osvajio 61 mandat, dok drugoplasirana koalicija Rijeke pravde 42 mandata.

koalicija	vodeći kandidat	ideologija	ukupno glasova	%	ukupno mandata
HDZ i partneri	Andrej Plenković	konzervativizam demokršćanstvo	729 949	$34,32\,\%$	61/151
Rijeke pravde	Peđa Grbin	socijaldemokracija soc. liberalizam	538 748	$25,40\,\%$	42/151
DP i partneri	Ivan Penava	nacionalni konzervativizam	202 714	$9,56\,\%$	14/151
Most i Suverenisti	Nikola Grmoja	konzervativizam suverenizam	169 988	$8,02\,\%$	11/151
Možemo! - platforma	Sandra Benčić	ekosocijalizam socijaldemokracija	193 051	$9,10\,\%$	10/151
Naša Hrvatska	Davorko Vidović	socijaldemokracija regionalizam	34 638	$1,63\,\%$	4/151
Fokus - Republika	Damir Vanđelić	liberalizam zelena politika	47 715	$2,25\,\%$	1/151
ostali			178 146	$8,40\,\%$	0/151
ukupno			2 120 779	$100\,\%$	151
važeći glasovi			2 120 779		
nevažeći glasovi			59 632		
izlaznost			2 763 779	$\mathbf{62,30}\,\%$	
broj birača			3 558 089	$100\,\%$	

Razdioba mandata u hrvatskom Saboru 2024. godine po političkim strankama

koalicija	stranka	mandati stranke	mandati koalicije
koalicija HDZ	HDZ	55	61
	HDS	1	
	HSLS	2	
	HNS	1	
	HSU	1	
	M.Petir	1	
Rijeke pravde	SDP	37	42
	Centar	2	
	DO i SIP	1	
	Glas	1	
	HSS	1	
DP, PiP, Nezavisni	DP	12	14
	Nezavisni	1	
	Pravo i Pravda	1	
Most, HS i ostali	Most	8	11
	HS	2	
	Marija S. Raspudić	1	
Možemo!			10
IDS			2
NPS			2
Fokus			1
Nacionalne manjine	SDSS	3	
	nezavisni	5	8
Ukupno			151

Po izbornim jedinicama

izborna jedinica	glasovi	broj mandata	HDZ	RP	DP	Most	Možemo	NŠ	F-R
I.	230.550	14	27,65 % (5)	24,37 % (4)	9,29 % (1)	7,43 % (1)	19,87 % (3)	0,91 % (0)	3,44 % (0)
II.	202.854	14	35,34 % (6)	24,83 % (4)	11,13 % (2)	9,07 % (1)	8,57 % (1)	1,16 % (0)	2,75 % (0)
III.	211.710	14	27,56 % (5)	36,75 % (6)	5,06 % (0)	3,83 % (0)	6,24 % (1)	12,20 % (2)	0,85 % (0)
IV.	202.567	14	41,81 % (7)	25,20 % (4)	13,07 % (2)	6,04 % (1)	5,49 % (0)	1,00 % % (0)	0,96 % (0)
V.	177.190	14	42,78 % (7)	19,57 % (3)	19,30 % (3)	8,48 % (1)	3,60 % (0)	0,42 % (0)	0,98 % (0)
VI.	236.121	14	24,84 % (4)	23,81 % (4)	8,70 % (1)	9,50 % (1)	18,14 % (3)	0,60 % (0)	7,75 % (1)
VII.	194.831	14	41,31 % (7)	25,35 % (4)	8,64 % (1)	6,61 % (1)	6,93 % (1)	0,69 % (0)	1,64 % (0)
VIII.	205.518	14	21,28 % (4)	33,36 % (6)	4,02 % (0)	5,71 % (1)	10,24 % (1)	15,92 % (2)	1,88 % (0)
IX.	202.706	14	39,74 % (7)	19,38 % (3)	10,64 % (2)	12,08 % (2)	4,44 % (0)	0,89 % (0)	0,99 % (0)
X.	216.320	14	37,00 % (6)	25,46 % (4)	10,83 % (2)	11,46 % (2)	5,27 % (0)	0,53 % (0)	0,49 % (0)
XI.	40.412	3	79,45 % (3)	-	-	6,64 % (0)	3,07 % (0)	-	0,49 % (0)
XII.		8	-	-	-	-	-	-	-
Ukupno	2.120.779	151	34,32 % (61)	25,40 % (42)	9,56 % (14)	8,02 % (11)	9,10 % (10)	1,63 % (4)	2,2 % (1)

`Napomena:` Nakon izbora, a prije konstituiranja Sabora zastupnici su Nino Raspudić (Most), Vesna Vučemilović (HS) i Josip Jurčević (DP) napustili svoje stranke.

Zadatak 4.: Izračunajte Banzhafov indeks glasačke moći političkih stranaka/koalicija na nacionalnoj razini.

Uputa: Pogledajte tekstove *Banzhafova metoda* na stranici 111. i *Banzhafovi indeksi političkih stranaka* na stranici 112.

3.3. Analiza izbora hrvatskog predsjednika 2020. godine

U svezi analize predsjedničkih izbora učenicima skrećemo pozornost da naš model dvokružnih izbora, koji je i najčešći u primjeni predsjedničkih izbora u Europi, nije jedini mogući način izbora. Mogao bi se primijeniti i model preferencijskog glasanja (koji je opisan u prevedenim tekstovima).

Primjerice, u nedavnom izboru predsjednika Irske koristi se preferencijsko glasanje, određena varijanta pojedinačnog prenosivog glasanja s jednim izabranim kandidatom, premda Ustav Irske u čl. 12 navodi da se predsjednik bira prema sustavu razmjernog predstavništva putem pojedinačnog prenosivog glasanja (iako je nelogično govoriti o razmjernom izbornom sustavu kada se bira jedna osoba).

Prvi krug izbora u RH održan je 22. prosinca 2019. godine. U tablici su prikazani rezultati izbora.

kandidat	stranka	broj glasova	%
Zoran Milanović	SDP	562.783	29,55
Kolinda Grabar-Kitarović	Nezavisna	507.628	26,65
Miroslav Škoro	Nezavisni	465.704	24,45
Mislav Kolakušić	Nezavisni	111.916	5,88
Dario Juričan	Nezavisni	87.883	4,61
Dalija Orešković	Nezavisni	55.163	2,90
Ivan Pernar	Stranka Ivana Pernara	44.057	2,31
Katarina Peović	Radnička fronta	21.387	1,12
Dejan Kovač	HSLS	18.107	0,95
Anto Đapić	DESNO	4.001	0,21
Nedjeljko Babić	HSSČKŠ	3.014	0,16
nevažećih listića		22.218	1,17
ukupno		1.903.861	100
registriranih birača/izlaznost		3.719.532	51,19

U drugi su krug izbora 6. siječnja 2020. godine ušli dvoje najbolje rangiranih kandidata. Rezultati izbora su u tablici.

kandidat	stranka	broj glasova	%
Zoran Milanović	SDP	1.034.389	52,67
Kolinda Grabar-Kitarović	Nezavisna	929.488	47,33
nevažećih listića		89.415	4,55
ukupno		2.053.292	100
registriranih birača/izlaznost		3.734.115	55,00

Zadatak 5.: Razmotrite mogućnost da je trećeplasirani kandidat Miroslav Škoro pozvao svoje birače da daju svoj glas Kolinda Grabar-Kitarović. Bi li njegov poziv utjecao na ukupni rezultat izbora? Što mislite o takvoj odluci/pozivu biračima?

Zadatak 6.: Na temelju kojeg broja glasova su postotci u ovoj tablici izračunani

a) ukupnog broja,

b) broja glasova bez nevažećih listića?

Zadatak 7.: Analizirajte podatke izbora predsjednika RH 2024. godine.

3.4. Analiza izbora u gradu Zagrebu 2021. godine

Gradska skupština grada Zagreba

Gradska skupština Grada Zagreba predstavničko je tijelo građana Grada Zagreba koje donosi akte u okviru samoupravnog djelokruga Grada Zagreba te obavlja druge poslove u skladu sa zakonom i Statutom. Gradska skupština ima 47 zastupnika. Plus 1 zastupnik nacionalne manjine.

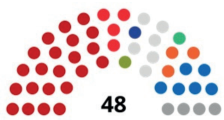
Na službenoj stranici grada Zagreba nalaze se podatci o članovima skupštine. Na zamolbu da nam napišu tko je iz koje četvrti odgovorilo nam je samo 13 skupštinara.

Istraživanje: Istražite samostalno (prema javnim podatcima) koliko ih je iz koje gradske četvrti izabrano u gradsku skupštinu. Ti podatci poslužit će u analizi o fer zastupljenosti gradskih četvrti u skupštini.

Prijedlog za pomoć u istraživanju: Samostalno odredite, iz službeno objavljenih adresa stanovanja članova skupštine (te se adrese nalaze na kandidacijskim listama prije izbora), tko u kojoj gradskoj četvrti stanuje. Ili im napišite e-pismo na službenim adresama sa zamolbom da odgovore na pitanje u kojoj gradskoj četvrti stanuju/žive.

gradska četvrt	br. stanovnika godina 2011.	iz popisa godina 2021.	br. stanovnika godina 2021.
Brezovica	12 030	12 224	12 109
Črnomerec	38 546	38 466	38 131
Donja Dubrava	36 363	34 120	33 746
Donji Grad	37 024	31 564	31 148
Gornja Dubrava	61 841	58 908	58 474
Gor. Gr. - Medveščak	30 962	26 692	26 325
Maksimir	48 902	47 989	47 533
Novi Zagreb - istok	59 055	56 302	55 969
Novi Zagreb - zapad	58 103	65 192	64 512
Pešćenica - Žitnjak	56 487	53 706	53 216
Podsljeme	19 165	19 212	19 033
Podsused - Vrapče	45 759	45 403	45 010
Sesvete	70 009	72 117	71 216
Stenjevec	51 390	54 474	54 088
Trešnjevka - jug	66 674	66 141	65 615
Trešnjevka - sjever	55 425	53 334	52 836
Trnje	42 282	41 339	40 983
ukupno			769 944

`Napomena`: Za potrebe analize izbora u ovom poglavlju gradska je administrativna služba odbila odgovoriti na upit koliko je (brojčano) članova skupštine iz koje gradske četvrti.



U Zagrebu je ukupan broj stanovnika po popisu stanovništva 2021. godine 769 944 osoba, a prema popisu iz 2011. godine, u Zagrebu je živjelo 790 017 stanovnika.

Evo tablice koju je kreirao statistički zavod s podatcima iz 2011. i 2021. godine za grad Zagreb. Uočimo da ti podatci odstupaju u nekim segmentima i o izvoru iz kojeg su uzeti.

(Učenici bi trebali razmotriti koje činjenice dovode do uočenih nepreciznosti.)

Zadatak 8.: Razmotrite izbore u gradu Zagrebu i dodjelu mandata s ukupno 693 645 glasača zagrebačkih četvrti.

Zadatak 9.: Objasnite!

a) Zašto podatak iz popisa stanovništva nije dobar za izborne odluke?

b) Zašto je podatak iz broja birača "bolji" za izborne odluke?

gradska četvrt	broj birača
Brezovica	10 256
Črnomerec	34 028
Donja Dubrava	31 256
Donji Grad	32 604
Gornja Dubrava	53 225
Gornji Grad - Medveščak	25 615
Maksimir	41 937
Novi Zagreb - istok	50 413
Novi Zagreb - zapad	55 787
Pešćenica - Žitnjak	48 572
Podsljeme	16 646
Podsused - Vrapče	39 495
Sesvete	65 763
Stenjevec	46 709
Trešnjevka - jug	56 858
Trešnjevka - sjever	47 604
Trnje	47 604
ukupno: 17	693 645

Zadatak 10.: Povijesno gledano, pretpostavimo da je u gradu Zagrebu bilo 693 645 građana i da ima točno 47 vijećničkih mjesta u skupštini. Predstavnik nacionalne manjine biran je na drugi način i ne ulazi u ovu analizu. Podijelite mjesta prema naznačenoj metodi:

a) Adamsovom planu,

b) Jeffersonovom planu.

c) Hamiltonovom planu,

d) Websterovom planu,

e) Hill-Huntingtonovom planu[2].

Zadatak 11.: Koja od ovih metoda daje iste, a koja odstupa od razdiobe mandata u objavljenoj službenoj podjeli mandata (koji se nalaze na kraju zadatka)?

Evo podataka iz izbora 2021. godine.

Broj birača na obrađenim biračkim mjestima	693 670	
Pristupilo glasovanju	326 680	47,09 %
Glasovalo birača (prema glasačkim listićima)	326 410	47,06 %
Važećih listića	320 403	98,16 %
Nevažećih listića	6 007	1,84 %

Pojedine kandidacijske liste dobile su sljedeći broj glasova:

[2] to je metoda jednakih razmjera (omjera)

stranka	broj glasova	postotak
Možemo!	130.850	40,83 %
HDZ	36.232	11,30 %
DP	33.943	10,59 %
Bandić Milan 365	28.996	9,04 %
SDP	28.456	8,88 %
Most	19.872	6,20 %
Ožbolt-NL	14.247	4,44 %
Fokus	7.302	2,27 %
Suverenisti i dr.	3.130	0,97 %
Ostalih 13 stranaka	17.375	*
UKUPNO	320.403	

`*: Svaka od ostalih 13 stranaka je dobila pojedinačno postotak` $< 0,90\,\%$.

U Gradsku skupštinu Grada Zagreba po kandidacijskim listama izabrani su:

stranka	broj mjesta
Možemo!	23
HDZ	6
DP	5
Bandić Milan 365	5
SDP	5
Most	3
srpska manjina	1
Ukupno	48

Zadatak 12.: Analizirajte službene rezultate. Obrazložite!

a) Koliko skupštinskih mandata bi trebalo pripadati pojedinoj gradskoj četvrti prema kvoti broja birača?

b) Koliko skupštinskih mandata pripada pojedinoj stranci prema metodama iz prethodnog zadatka?

c) Koja od metoda daje iste ili skoro iste rezultate službenim rezultatima?

d) Koje četvrti trebaju imati više ili manje skupštinskih mandata?

Zadatak 13.: Izračunajte Banzhafov indeks glasačke moći političkih stranaka/koalicija na razini grada Zagreba.

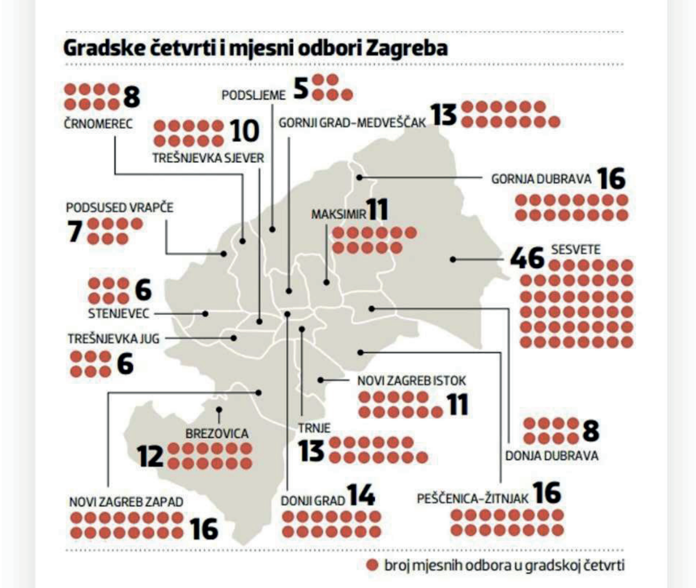
Uputa: Pogledajte tekstove *Banzhafova metoda* na stranici 111. i *Banzhafovi indeksi političkih stranaka* na stranici 112.

*****

Gradske četvrti i mjesni odbori

Gradska četvrt, uz mjesne odbore, oblik je mjesne samouprave u Gradu Zagrebu putem kojeg građani sudjeluju u odlučivanju o poslovima iz samoupravnog djelokruga Grada i lokalnim poslovima koji neposredno i svakodnevno utječu na njihov život i rad. Gradska četvrt osniva se za područje koje predstavlja gradsku, gospodarsku i društvenu cjelinu, a koje je povezano zajedničkim interesima građana. Sadašnja podjela na sedamnaest gradskih četvrti ustanovljena je Statutom Grada Zagreba 14. prosinca 1999. godine. Gradska četvrt je pravna osoba koja ima svoja tijela.

U Gradu Zagrebu mjesni odbori su osnovani za pojedini dio gradske četvrti, pojedino naselje ili više međusobno povezanih manjih naselja, ili dio većeg naselja koji u odnosu na ostale dijelove čini zasebnu cjelinu. Od ukupno 218 mjesnih odbora, njih 147 osnovano je za pojedine dijelove naselja Zagreb, a 12 za dijelove područja naselja Sesvete. Na područjima preostalih 68 službenih naselja (mjesta) u sastavu Grada Zagreba osnovano je ukupno 59 mjesnih odbora.



Zadatak 14.: Analizirajte službene podatke koji se nalaze na slici gore.

Ovdje navodimo razdiobu članova skupštine prema njihovim adresama stanovanja, tj. pripadnosti četvrtima.[3]

gradska četvrt	broj birača	broj članova u skupštini
Brezovica	10 256	1
Črnomerec	34 028	5
Donja Dubrava	31 256	2
Donji Grad	32 604	5
Gornja Dubrava	53 225	0
Gornji Grad - Medveščak	25 615	3
Maksimir	41 937	4
Novi Zagreb - istok	50 413	1
Novi Zagreb - zapad	55 787	1
Pešćenica - Žitnjak	48 572	3
Podsljeme	16 646	2
Podsused - Vrapče	39 495	1
Sesvete	65 763	2
Stenjevec	46 709	3
Trešnjevka - jug	56 858	8
Trešnjevka - sjever	47 604	4
Trnje	36 607	3
ukupno: 17	693 645	48

[3] Na našu zamolbu da nam dostavi službene podatke gradska administracija nije odgovorila. Iz posrednih smo izvora pronašli koliko je članova u skupštini i iz koje gradske četvrti.

a) Koliko skupštinskih mandata bi trebalo pripadati pojedinoj gradskoj četvrti prema standardnoj ili idealnoj kvoti?

b) Koliko skupštinskih mandata pripada pojedinoj stranci prema metodama iz prethodnog zadatka?

c) Koja od metoda daje iste ili skoro iste rezultate službenim rezultatima?

d) Koje četvrti trebaju imati više ili manje skupštinskih mandata?

Mislite li da bi izbornim pravilima trebalo definirati koliko koja gradska četvrt ima zastupnika u skupštini? Obrazložite svoje tvrdnje!

Zadatak 15.: Analizirajte službene podatke sa stranice 129. koji su prikazani tablicom.

gradska četvrt	broj birača	broj članova Vijeća GČ	broj mjesnih odbora
Brezovica	10 526	11	12
Črnomerec	34 028	15	8
Donja Dubrava	31 256	15	8
Donji Grad	32 604	15	14
Gornja Dubrava	53 225	19	16
Gornji Grad - Medveščak	25 615	15	13
Maksimir	41 937	15	11
Novi Zagreb - istok	50 413	19	11
Novi Zagreb - zapad	55 787	19	16
Pešćenica - Žitnjak	48 572	19	16
Podsljeme	16 646	11	5
Podsused - Vrapče	39 495	15	7
Sesvete	65 763	19	46
Stenjevec	46 709	19	6
Trešnjevka - jug	56 858	19	6
Trešnjevka - sjever	47 604	19	10
Trnje	36 607	15	13
ukupno: 17	693 645	279	218

a) Koliko bi članova Vijeća trebalo biti u pojedinoj gradskoj četvrti prema kvoti birača? Kolika je standardna ili idealna kvota?

b) Koliko mjesnih odbora bi trebalo biti u pojedinoj gradskoj četvrti prema kvoti birača? Kolika je standardna ili idealna kvota?

c) Ima li mjesni odbor u svakoj gradskoj četvrti jednaki broj birača?

d) Kojima četvrtima treba promijeniti (povećati ili smanjiti) broj mjesnih odbora? Zašto?

e) Jesu li postojeći brojevi članova Vijeća gradskih četvrti i brojevi mjesnih odbora fer razdioba za gradske četvrti prema standardnoj ili idealnoj kvoti birača?

f) U kojim je gradskim četvrtima i mjesnim odborima odstupanje od standardne kvote veće ili manje od 5%?

Obrazložite svoje tvrdnje!

*****

Gradonačelnik grada Zagreba (prvi krug glasanja)

Za potrebe ove analize nisu nam potrebna imena kandidata. U tablicu ćemo staviti ime stranke koja ih je kandidirala. Bilo je 10 kandidata.

Broj birača na obrađenim biračkim mjestima	693 645	
Pristupilo glasovanju	326 975	47,14 %
Glasovalo birača (prema glasačkim listićima)	326 765	47,14 %
Važećih listića	322 176	98,60 %
Nevažećih listića	4 589	1,40 %

Pojedine kandidacijske liste dobile su sljedeći broj glasova za gradonačelnika:

stranka	broj glasova	postotak
Možemo!	147 631	45,15 %
HDZ	32 151	9,83 %
DP	39 789	12,16 %
Bandić Milan 365	36 309	11,10 %
SDP	25 601	7,82 %
Most	13 480	4,12 %
Ožbolt-NL	16 682	5,10 %
Fokus	6 492	1,98 %
Glas	2 743	0,83 %
Grupa birača	1 298	0,39 %

U drugi krug izbora idu kandidati Tomislav Tomašević iz stranke Možemo! i Miroslav Škoro iz stranke DP.

Gradonačelnik grada Zagreba (drugi krug glasanja)

Evo podataka iz izbora.

Broj birača na obrađenim biračkim mjestima	693 509	
Pristupilo glasovanju	312 534	45,07 %
Glasovalo birača (prema glasačkim listićima)	312 386	45,04 %
Važećih listića	305 930	97,93 %
Nevažećih listića	6 456	2,07 %

U drugom krugu glasanja za gradonačelnika, Tomislav Tomašević dobio je 199 630 glasova, a Miroslav Škoro 106 300.

3.5. Istraživanje učenika: Što bi bilo kad bi bilo u Hrvatskoj

Ovdje ćemo razmotriti zadatke ili projekte ili istraživanja u kojima se predlažu primjene izbornih metoda koje su elaborirane u prethodnim poglavljima i na podatcima različitih izbora u RH.

Računat će se kvote i raspodjele mandata sukladno metodama izbora kad se otkloni/zanemari odluka da u svim izbornim jedinicama imamo 14 fiksnih mandata za Sabor RH.

Izračunavat će se koliko tada glasova treba imati za mandat u Sabor RH, tj. koliko je potreban broj birača/glasača kako bi mandati bili "jednakovrijedni".

Također će se razmotriti i biranje članova i broj mandata u prijedlogu dvodomnog Sabora poštujući jednakovrijednost mandata.

Ovaj prijedlog o dvodomnom Saboru je pokušaj ukazivanja na problem te rješavanje sadašnjeg problema s XI. i XII. izbornom jedinicom koje ne poštuju jednakovrijednost mandata. Nekada smo imali dvodomni Sabor sa Županijskim domom. Ovaj je prijedlog i na tragu izbora Senata i Zastupničkog doma u SAD-u koji efikasno reguliraju takavu odluku.

Prezentirat će se koje bi izborne jedinice (od 1. do 10. izborne jedinice) povećale broj mandata, a koje bi smanjile (na podatcima koje su sada poznati za svaku izbornu jedinicu) kako bi se ostalo na ozakonjenom broju od 10 x 14 = 140 mandata. I zašto trebaju promjene ili ne trebaju promjene broja mandata? Uz prijedlog za smanjenjem ili povećanjem broja ukupnog broja mandata u prvom domu Sabora RH, a koliko u drugom domu.

Naravno da su ovakve odluke stvar političkih odluka, ali ova učenička istraživanja daju matematičke argumente za takve političke odluke. Kao što su to i činili američki političari u povijesnim rješavanjima svojih izbornih odluka i aktivnostima elaboriranima u ovoj knjizi.

Ova su istraživanja bitan argument za poučavanje naših učenika o građanskim pravima i transparentnim odlukama te kao takva su srž **Građanskog odgoja**.

Dakle, matematika i analiziranje primjene pojedinih izbornih metoda daju transparentne argumente za političke odluke političarima, ali i biračima. U ovom slučaju učenicima - budućim biračima.

Razmotrit će se i odluka o mogućoj promjeni ukupnog broja mandata za Sabor RH ili lokalnu gradsku/županijsku skupštinu: na 120 (10 x 12=120) mandata ili 100 (10 x 10= 100) mandata ili manje za Sabor.

Što takva odluka čini velikim, a što malim strankama i/ili koalicijama u broju mandata.

Također treba istražiti koji je utjecaj na broj mandata kad se promijeni na viši ili manji postotak izborni prag od 5%.

I što se događa ako se ukine izborni prag. I je li on fer prema biračima. Koga on "štiti": sustav i stranke? Ili onemogućuje volju određenog broja birača i njihovih glasova "prelijevajući" njihove glasove politikama za koje oni ne glasaju?

Zadatak 16.: U ovom ćemo zadatku istražiti slučaj sa službenim postojećim brojem birača i glasova po izbornim jedinicama na izborima za Sabor RH 2024. godine sukladno Hamiltonovoj metodi i izračunatim kvotama. Ukupan broj mandata je za Sabor RH 140 + 3 + 8=151.

Izračun će ukazati na to *što bi bilo kad bi bilo*, odnosno je li odluka o 14 mandata za svaku izbornu jedinicu fer i treba li nekim izbornim jedinicama dodati ili smanjiti neki mandat.

Ispunite li ovu tablicu dobit ćete odgovor na postavljeno pitanje o broju mandata u izbornim jedinicama.

Rezultati popisa iz 2024. godine

izborna jedinica	**broj birača**	**broj glasova**	**idealna kvota**	**predstavnika (cijeli dio)**	**broj dodatnih na temelju (najvećeg ostatka)**	**ukupan broj predstavnika Hamiltonove metode**
I.	341 706	230 550				
II.	347 454	202 854				
III.	350 748	211 710				
IV.	357 899	202 567				
V.	343 587	177 190				
VI.	352 575	236 121				
VII.	346 074	194 831				
VIII:	359 915	205 518				
IX.	352 988	202 706				
X.	358 152	216 320				
XI.		40.412				
XII.						
	3 511 098	ukupno 2 120 779		cjelobrojni zbroj	ukupni broj dodatnih predstavnika	ukupni broj predstavnika

a) U tablici popisa iz 2024. godine ispunite stupac s oznakom ”Idealna kvota”.

b) U stupac s oznakom ”Broj predstavnika (cijeli dio)” upišite cijeli dio svake idealne kvote. Izračunajte ili odredite zbroj unosa u stupcu. Jeste li ovim procesom popunili svih 140 mjesta u Saboru RH?

c) Da biste popunili preostala mjesta (ako ih ima), pronađite izbornu jedinicu s najvećim ostatatkom i dajte joj još jednog predstavnika. Nastavite s dodjelom dodatnih mjesta na temelju silaznog redoslijeda decimalnog dijela idealnih kvota dok ne napunite Sabor RH.

d) Čini li vam se da je ova metoda fer način raspodjele mjesta u Saboru RH?

e) U kojim izbornim jedinicama bi birači mogli biti zadovoljni ovom metodom? Obrazložite!

Kad se ispuni tablica i riješi zadatak postaje očigledno da se dvije izborne jedinice X. i XI. ne uklapaju u fer izbore i da bi ih trebalo na drukčiji način ozakoniti.

Istražimo utjecaj drugih metoda raspodjele mandata na podatcima 2024. godine.

Zadatak 17.: Rapodjelite mandate koristeći postojeće brojeve birača iz tablice s izbornim jedinicama na izborima 2024. godine pomoću:

a) Jeffersonove raspodjele,

b) Websterove raspodjele,

c) Adamsove raspodjele,

d) Hillove raspodjele.

Odgovorite na sljedeća pitanja:

1. Što možete uočiti?
2. Utječu li ove raspodjele na broj dosadašnjih ozakonjenih 14 mandata po izbornoj jedinici?

Istražimo utjecaj drugih metoda raspodjele mandata na podatcima 2024. godine ako se razmatra promjena broja mandata.

Zadatak 18.: Razmotrite službene podatke iz 2024. godine tako da Sabor RH ima ukupno 100 mjesta. Rapodjelite mandate koristeći postojeće brojeve birača iz tablice s izbornim jedinicama na izborima 2024. godine pomoću:

a) Jeffersonove raspodjele,

b) Websterove raspodjele,

c) Adamsove raspodjele,

d) Hillove raspodjele,

e) Hamiltonove raspodjele.

Odgovorite na sljedeća pitanja:

1. Što možete uočiti?
2. Koliko svaka izborna jedinica ima mandata sukladno ovim raspodjelama?
3. Koja izborna jedinica dobiva ili gubi neki mandat?

4. Čini li vam se da su ove metode fer način raspodjele mjesta u Saboru RH?
5. U kojim izbornim jedinicama mislite da bi birači bili zadovoljni nekom od ovih metoda raspodjele?

Zadatak 19.: Razmotrite službene podatke iz 2024. godine tako da promijenite izborni prag na 7% i na 3%.

a) Koje stranke i s kojim izbornim pragom imaju koristi ili "štete" od promjene te granice?
b) Koliko bi mandata dobile ili izgubile stranke u pojedinim izbornim jedinicama u ozakonjenom broju od 14 mandata?
c) Kako promjena izbornog praga utječe na svaku od pet spomenutih raspodjela mandata?

Zadatak 20.: Razmotrite mogućnost izbora po županijama kao izbornim jedinicama.

Zadatak 21.: Razmotrite mogućnost izbora u četiri regije koje uvjetno nazovimo Istok, Zapad, Sjever i Jug kao izbornim jedinicama.

4. N. Radović, P. Mladinić: Primjeri i zadatci

Navest ćemo niz primjera i zadataka koji se rješavaju uporabom činjenica, poučaka, primjera i formula elaboriranim u ranijim poglavljima ove knjige.

Neki su zadatci označeni s razinom rješavanja problema koje je Pólya razvio u svojoj metodi.

Godine je 1945. **George Pólya** (1887.-1985.) u izdanju izdavačke kuće *Princenton University Press, Stanford* objavio knjigu *How to Solve It*, a godine 1966. je *Školska knjiga, Zagreb* objavila prijevod te knjige [18.] u kojoj se mogu vidjeti razrađene njegove ideje kako rješavati probleme.

U knjizi *Matematičko otkriće* [19.] koju je 2003. godine izdao *HMD* Pólya je detaljno razradio ideje na kojima počiva matematičko otkriće i poučavanje.

Posebice citiramo njegovih 10 zapovijedi za učitelje (str. 287. u knjizi):

1. *Zanimaj se za svoj predmet.*
2. *Znaj svoj predmet.*
3. *Znaj kojim se putem može naučiti ono što je nužno: najbolji način učenja je - otkrij sam.*
4. *Nauči čitati s lica svojih učenika. Nastoj saznati što oni od tebe očekuju i pokušaj razumijeti njihove poteškoće. Pokušaj se staviti na njihovo mjesto.*
5. *Nemoj učenicima pružati samo informaciju, pomozi im razviti sposobnost korištenja prikupljenih znanja i naviku sustavnog rada.*
6. *Nastoj ih naučiti naslućivati.*
7. *Nastoj ih naučiti dokazivati.*
8. *Istići u svojem zadatku ono što može biti korisno pri rješavanju drugih zadataka, a za danu konkretnu situaciju nastoj otkriti opću metodu.*
9. *Ne odaj svoju tajnu odmah, neka učenici pokušaju pogoditi rješenje. Predloži učenicima da sami pronađu što više.*
10. *Savjetuj, no ne nameći nasilno svoje mišljenje.*

Pólyeva ideja je poticati odgovornost učenika za vlastiti uspjeh i napredovanje u matematici. Eksperimentalan rad ima važno mjesto u poučavanju matematike jer je povezan s heurističkim strategijama i idejama.

Heuristička metoda se odnosi na vođenje, poticanje i usmjeravanje učeničkih ideja na pronalaženje rješenja problema i otkrivanje novih sadržaja. Nastavnikovo vođenje i usmjeravanje se uglavnom ostvaruje kroz razgovor, osim spomenutih metodičkih rješenja komuniciranja i vođenja učenika tijekom nastavnog sata do korištenja svih novih komunikacijskih medija.

Elaborirao je da se **algoritam za rješavanje** matematičkih zadataka sastoji od **četiri koraka**, a to su:

a) Razumijevanje zadatka,

b) Stvaranje plana,

c) Izvršavanje plana,

d) Pogled natrag i provjera.

a) Prvi korak je razumjeti problem:

Često prilikom rješavanja zadataka učenici i ne razumiju postavljeni zadatak. George Pólya je ponudio određeni broj pitanja i savjeta kako bi se provjerilo razumijevanje zadatka: *Što je nepoznato? Što je zadano? Kako glasi uvjet? Je li moguće zadovoljiti uvjet? Je li uvjet dovoljan za* *određivanje nepoznice? Ili nije dovoljan? Ili preodređen? Ili kontradiktoran? Nacrtajte sliku! Unesite prepoznatljive oznake! Analizirajte razne dijelove uvjeta! Možete li ih napisati?*

b) Drugi korak je izrada plana:

U ovom dijelu potrebno je potražiti vezu između zadanog i nepoznatog. Ako nije moguće naći neposrednu vezu, onda se moraju razmotriti i neki drugi pomoćni zadatci koji su vezani za zadatak odnosno nepoznate veličine.

U svrhu toga služe slijedeća pitanja i savjeti: *Jeste li zadatak već vidjeli? Ili ste isti zadatak vidjeli u nešto drukčijem obliku? Znadete li neki srodni zadatak? Znadete li neki poučak koji bi mogao pomoći? Sjetite se zadatka koji je sličan vašem, a već je riješen! Možete li ga uporabiti? Možete li primijeniti metodu kojom je zadatak riješen? Je li moguće izraziti problem na još neki drugi način? Vratite se na definicije!*

Na kraju treba napraviti plan rješavanja zadatka.

c) Treći korak je izvršavanje plana:

Učenici trebaju realizirati naznačne etape iz plana. *Kada koristite plan rješavanja, kontrolirate li svaki korak? Možete li jasno vidjeti je li korak ispravan? Možete li pokazati da je ispravan?*

d) Četvrti je korak pogled natrag i provjera:

Kada je zadatak riješen treba se osvrnuti na zadatak odnosno na postupak rješavanja zadatka, provjeriti i raspraviti rješenje zadatka. *Možete li provjeriti rezultat? Možete li provjeriti dokaz? Možete li rješenje ostvariti na drugi način? Možete li zadatak ili rezultat uporabiti u nekom drugom zadatku?*

Predložio je i **tri razine** u rješavanju zadataka.

Prva razina: To su mehanički problemi i problemi s uvježbavanjem i izravno su povezani s primjerima u knjizi.

Druga razina: Problemi zahtijevaju razumijevanje koncepata i povezani su s primjerima u knjizi.

Treća razina: Problemi su proširenja primjera.

Zadatci su uglavnom strukturirani sukladno podjeli prva četiri podpoglavlja iz 4. poglavlja ove knjige te dodatno u dva podpoglavlja.

4.1. Glasanje

Prva razina

Zadatak 1.

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	10	6	5	0	4	7
	A	A	B	B	C	C
	B	C	A	C	A	B
	C	B	C	A	B	A

Koristite ove rezultate glasanja i odgovorite na pitanja od 1. - 6.

1. Koliki je ukupan broj glasova?
2. Koliko je glasova potrebno za apsolutnu većinu?
3. a) Što znači stupac CAB?

b) Što znači "7" iznad CBA?

4. a) Što znači stupac ACB?

   b) Što znači "6" iznad ACB?

5. a) Ako osoba rangira A kao svoj prvi izbor, B kao svoj drugi izbor izbor i C kao zadnji, kako bi ovo bilo napisano?

   b) Koliko glasača ima ovu preferenciju?

6. a) Što znači stupac BCA?

   b) Što znači "0" u stupcu BCA?

Zadatak 2.
Rezultati glasanja o kandidatima A, B, C i D dani su tablicom.

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	10	7	5	3	4
	A	D	B	B	D
	D	A	A	D	C
	B	C	D	C	A
	C	B	C	A	B

Koristite rezultate i odgovorite na pitanja od 7. - 12.

7. Koliki je ukupan broj glasova?

8. Koliko je glasova potrebno za apsolutnu većinu?

9. a) Što znači stupac DACB?

   b) Što znači "7" iznad DACB?

10. 1. Što znači stupac ADBC?

    2. Što znači "10" iznad ADBC?

11. 1. Ako osoba rangira B kao svoj prvi izbor, C kao svoj drugi izbor izbor, D kao treći izbor, a A kao zadnji, kako bi to trebalo napisati?

    2. Koliko glasača ima ovu preferenciju?

12. 1. Koliko ima mogućnosti za preferencije birača s četiri kandidata?

    2. Navedite one mogućnosti koje imaju 0 preferencija glasača.

Zadatak 3.

1. Na koliko različitih načina birač može rangirati 3 kandidata?

2. Na koliko različitih načina birač može rangirati 4 kandidata?

3. Na koliko različitih načina birač može rangirati 5 kandidata?

Druga razina

Zadatak 4.

1. Za 20 birača i 4 kandidata odredite ukupan broj bodova u Bordinom brojenju.
2. Za 10 birača i 5 kandidata odredite ukupan broj bodova u Bordinom brojenju.
3. Za 200 birača i 3 kandidata odredite ukupan broj bodova u Bordinom brojenju.

Zadatak 5.
Na koliko različitih načina birač može rangirati n kandidata?
Zadatak 6.
Može se pokazati da vrijedi

$$1 + 2 + 3 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}, m \in \mathbf{N}.$$

Koristite ovu formulu kako biste odredili koliko ukupno bodova ima u Bordinom brojenju s n birača i m kandidata.
Zadatak 7. Glasanje o tri kandidata dalo je rezultat:

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	10	6	5	0	4	7
	A	A	B	B	C	C
	B	C	A	C	A	B
	C	B	C	A	B	A

Odredite pobjednika korištenjem metoda glasanja u pitanjima od a) - f). Metode su:

a) Pravilo izbora apsolutnom većinom.

b) Metoda izbora relativnom većinom.

c) Bordina metoda brojenja.

d) Metoda Hareove eliminacije.

`Napomena:` Još se naziva u tekstu ove knjige kao Hareova sekvencijalna metoda užeg izbora, tj. metoda alternativnoga prenosivog glasa.

e) Metoda usporedbe parova. (Na str. 175. definirana je ova metoda usporedbe parova.)

f) Metoda Condorcetovog pobjednika (tj. Condorcetov izborni postupak odlučivanja).

Zadatak 8.
Dvanaest članova odbora glasa o aktivnostima nakon sastanka. Traži se da označe sve ono što bi im se svidjelo od predloženog.
Evo ishoda njihovih izbora:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
grickalice	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
piće	x	x		x	x	x		x	x	x		
putni plan						x		x	x			
gost predavač	x	x		x	x		x	x	x		x	x

Koji je ishod provedenog glasanja?

Zadatak 9.

Dvanaest članova odbora glasa o prijemu dva nova člana Odbora. Intervjuiraju 5 kandidata i glasaju "x" za prihvatljivog kandidata i nijedan glas za neprihvatljivog kandidat. Evo ishoda njihovih izbora:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	
B	x	x	x	x		x	x	x		x	x	x
C	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x
D	x	x			x		x	x	x	x	x	x
E	x	x	x				x	x	x		x	x

Koji je ishod provedenog glasanja?

Zadatak 10.

Sedamnaest ljudi radi u odboru. Razmatraju se tri mogućnosti: A, B i C. Evo njihovog izbora:

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	1	3	4	3	5	1
	A	A	B	B	C	C
	B	C	A	C	A	B
	C	B	C	A	B	A

Odredite pobjednika korištenjem različitih metoda glasanja u pitanjima od a) - f).

a) Pravilom izbora apsolutnom većinom.

b) Metodom izbora relativnom većinom.

c) Bordinom metodom brojenja.

d) Metoda Hareove eliminacije.

`Napomena:` Još se naziva u tekstu ove knjige kao Hareova sekvencijalna metoda užeg izbora, tj. kao metoda alternativnoga prenosivog glasa.

e) Metodom usporedbe parova.

f) Metoda Condorcetovog pobjednika (tj. Condorcetov izborni postupak odlučivanja).

Treća razina

Zadatak 11.

Prijepis svjedodžbe nekog učenika pokazuju sljedeću distribuciju ocjena:

izvrstan (5):	4
vrlo dobar (4):	3
dobar (3):	5
dovoljan (2):	2
nedovoljan (1):	0

Odgovorite na slijedeća dva pitanja (vezana na ocjene iz svjedodžbe):

a) Koja je ocjena najčešća?

b) Kolika je srednja ocjena?

Zadatak 12.

Prijepis nekih svjedodžbi pokazuje sljedeću distribuciju ocjena:

izvrstan (5):	15
vrlo dobar (4):	22
dobar (3):	36
dovoljan (2):	6
nedovoljan (1):	3

Upotrijebite ove podatke za odgovoriti na sljedaća pitanja:

a) Koja je ocjena najčešća?

b) Kolika je srednja ocjena?

Zadatak 13.

Politička stranka održava nacionalnu konvenciju s 1 100 delegata. Na konvenciji je pet osoba (nazovimo ih primjerice A, B, C, D i E) nominirano za predsjedničkog kandidata stranke. Nakon govora i rasprave, od delegata se traži da rangiraju ovih pet kandidata. Međutim, prije glasanja, klubovi su suzili izbore na šest različitih mogućnosti. Rezultati glasačkih listića prikazani su tablicom:

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	360	240	200	180	80	40
	A	B	C	D	E	E
	D	E	B	C	C	B
	E	D	E	E	D	D
	B	C	D	B	B	C
	C	A	A	A	A	A

Odgovorite na sljedeća pitanja i navedite razloge.

a) Koliko je mogućih rangiranja?

b) Postoji li apsolutni većinski pobjednik? Ako postoji, tko je to?

c) Postoji li relativni većinski pobjednik? Ako postoji, tko je to?

d) Tko bi pobijedio u užim izborima/drugom krugu izbora po principu eliminacije kandidata s najmanje prvoplasiranih glasova?

e) Tko bi pobijedio u užem izboru/drugom krugu izbora po principu eliminacija kandidata s najviše zadnjeplasiranih glasova?

f) Koliki je Bordin izračun za svaku osobu? Tko je pobjednik Bordinog brojenja?

g) Koga treba proglasiti pobjednikom razmatrajući odgovore na pitanja od b) - g)?

4.2. Dvojbe pri glasanju

Prva razina

Zadatak 1.

Udruga fakulteta koristi Hareov način glasanja za svog predstavnika u kolektivnom pregovaranju. Njihov izbor je Udruga fakulteta (A), Udruga studenata (B) i Udruga nastavnika (C). Rezultati glasanja su prikazani tablicom:

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	15	5	8	10	7	11
	A	A	B	B	C	C
	B	C	A	C	A	B
	C	B	C	A	B	A

a) Koja je organizacija odabrana za kolektivno pregovaranje koristeći Hareovu metodu?

b) Krši li izbor djelomično kriterij apsolutne većine?

Zadatak 2.
Rezultati izbora s tri kandidata prikazana su tablicom:

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	10	9	8
	A	B	C
	B	C	B
	C	A	A

a) Postoji li apsolutna većina? Ako ne, tko pobjeđuje relativnom većinom glasova?

b) Tko pobjeđuje koristeći Bordinu metodu brojenja?

c) Krši li Bordina metoda apsolutni većinski kriterij?

Zadatak 3.
Udruga fakulteta koristi Bordinu metodu prebrojavanja glasova u kolektivnom pregovaranju. Njihov izbor je (A), (B) i (C). Evo rezultata glasanja:

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	16	0	0	5	0	9
	A	A	B	B	C	C
	B	C	A	C	A	B
	C	B	C	A	B	A

a) Postoji li apsolutna većina? Ako ne postoji, tko pobjeđuje relativnom većinom glasova?

b) Tko pobjeđuje koristeći Bordinu metodu brojenja?

c) Krši li Bordina metoda neki fer kriterij?

Zadatak 4.
Razmotrite sljedeći rezultat glasanja:

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	5	0	0	5	4	0
	A	A	B	B	C	C
	B	C	A	C	A	B
	C	B	C	A	B	A

a) Tko bi pobijedio u drugom krugu izbora odbacivanjem izbora s najmanje glasova za prvo mjesto?

b) Tko bi pobijedio ako se B povuče prije izbora?

c) Krši li to neki fer kriterij?

Zadatak 5.

Odsjek za filozofiju bira predstojnika. Kandidati su Alić (A), Brkić (B) i Cvitan (C). Evo preferencije odjela s 35 članova:

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	10	7	10	8
	A	B	B	C
	B	C	A	A
	C	A	C	B

a) Ako postoji Condorcetov pobjednik tko je to?

b) Postoji li apsolutni većinski pobjednik? Ako ne postoji, tko pobjeđuje u relativnom većinskom glasanju? Krši li to Condorcetov kriterij?

c) Tko pobjeđuje prema metodi Bordinog brojenja? Krši li ovo Condorcetov kriterij?

Druga razina

Zadatak 6.

Učenici viših razreda srednje škole glasaju gdje će ići na izlet. Odlučuju se za (A), (B), (C) ili (D).

Rezultati njihovih izbora mjesta za izlet su:

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	80	45	30	10	50
	D	A	B	C	C
	A	B	C	B	B
	B	C	A	D	A
	C	D	D	A	D

Odgovorite na sljedeća pitanja od a) - e).

a) postoji li Condercetov pobjednik?

b) Postoji li apsolutni većinski pobjednik? Ako ne postoji, postoji li relativni većinski pobjednik? Krši li to Condorcetov kriterij?

c) Koje mjesto pobjeđuje u Bordinom brojenju? Krši li to Condorcetov kriterij?

d) Koje mjesto pobjeđuje koristeći Hareovu metodu? Krši li to Condorcetov kriterij?

e) Koje mjesto pobjeđuje metodom usporedbe parova? Krši li ovo Condorcetov kriterij?

Zadatak 7.

Fokusna skupina od 33 osobe na HRT-u zamoljena je rangirati prioritete državne potrošnje za obrazovanje (O), vojne potrošnje (V), zdravstvene skrbi (Z), imigracije (I) i smanjivanje poreza (P).

Evo preferencija:

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	15	6	6	6
	O	V	Z	P
	I	I	V	V
	Z	O	O	O
	P	Z	P	I
	V	P	I	Z

Iskoristite ove informacije da odgovorite na sljedeća pitanja:

a) Tko je pobjednik metodom usporedbe parova?

b) Tko je pobjednik koristeći Bordino brojenje?

c) Pretpostavimo da se pitanja zdravstvene zaštite i snižavanje poreza uklanjaju iz podataka. Tko je sada pobjednik koristeći metodu usporedbe parova? Krši li se kriterij irelevantne alternative?[1]

   `Napomena:` Kriterij nevažne/irelevantne alternative - Ako je neki kandidat pobjednik na izborima i ako u drugom mogućem izboru jedan ili više kandidata bude uklonjeno, tada prethodni pobjednik treba i dalje biti pobjednik.

   - tzv. svojstvo neovisnosti o irelevantnim alternativama (eng. independence of irrelevant alternatives) se u određenoj literaturi definira na drugačiji način ...

d) Pretpostavimo da se pitanja zdravstvene zaštite i snižavanje poreza uklanjaju iz podataka. Tko je sada pobjednik korištenjem metode Bordinog brojenja? Krši li se time kriterij irelevantne alternative?

e) Pretpostavimo da su pitanja zdravstvene zaštite, snižavanje poreza i imigracije uklonjeni iz podataka. Tko je sada pobjednik metodom usporedbe parova? Narušava li metoda usporedbe u parovima kriterij irelevantne alternative?

f) Pretpostavimo da su pitanja zdravstvene zaštite, smanjenje poreza i imigracije uklonjeni iz podataka. Tko je sada pobjednik koristeći metodu Bordinog brojenja? Krši li metoda Bordinog brojenja kriterij irelevantne alternative?

Zadatak 8.

Godine 1988. je 94. Međunarodni olimpijski odbor (MOK) u Seulu odabirao mjesta održavanja Zimskih olimpijskih igara 1994. Gradovi koji su se kandidirali bili su Anchorage (A), Lillehammer (L), Ostersund (T) i Sofija (S). Razmotrite sljedeći izmišljeni izvještaj kako se glasanje moglo provesti. Glasovanje traje na istom mjestu u razdoblju od dva dana koristeći metodu Hareove eliminacije. Prvi je dan kada 93 člana MOO-a glasaju neobvezujuće, a zatim drugi dan glasaju obvezujuće.

a) Prvog dana poredak izbora članova MOO-a bio je:

[1] Na kontroverznim predsjedničkim izborima 2000. godine u SAD-u konačni rezultati izbora bili su glavna tema mnogih rasprava. Pretpostavimo da je predsjednik izabran narodnim glasanjem (a ne elektorskim kolegijem). Za izbore kakvi su bili, ako upotrijebimo narodne brojeve, vidimo da bi pobjednik bio Al Gore. Sada, pretpostavimo da su održani drugi izbori. Ovaj put Ralph Nader je odustao prije glasanja. Budući da Nader stvarno nije imao šanse za pobjedu, možemo zaključiti da novonastala situacije ne bi trebala imati nikakvog utjecaja na ishod. Ali se možete vidjeti iz brojeva narodnih glasova da to nije slučaj. Glasači Nadera mogli su "zaljuljati" izbore. Ovo se može smatrati glasačkom dilemom jer bi prekršilo kriterij nazvan kriterij irelevantne alternative. Podatci se nalaze u tablici u Zadatku 10. str. 147.

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	31	35	20	4	3
	T	L	A	A	S
	L	A	S	S	T
	S	T	L	T	L
	A	S	T	L	A

Kakvi su rezultati izbora metodom Hareove eliminacije za prvi (neobvezujući) dan glasanja?

b) Navečer prvog dana glasanja predstavnici iz Ostersunda razgovaraju sa 7 članova s najnižim brojem glasova. Mogli su uvjeriti tih sedam članova MOO-a da premjeste Lillehammer na vrh njihove liste. Također, jedan od (TLSA) glasača promijenio je izbor u (LTSA). Drugog dana rangiranja odbora MOK-a dalo je sljedeći rezultat:

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	31	1	35	20	4	3
	T	L	L	A	L	L
	L	T	A	S	A	S
	S	S	T	L	S	T
	A	A	S	T	T	A

Kakvi su rezultati izbora metodom Hareove eliminacije za drugi (obvezujući) dan glasanja? Narušava li ovo prebrojavanje glasova kriterij monotonosti (kriterij monotonosti je definiran - opisan na str. 173.)?

Zadatak 9.

Godine 1993. sastao se 101. Međunarodni olimpijski odbor u Monaku za odabrati mjesto održavanja Zimskih olimpijskih igara 2000. Gradovi kandidati bili su Peking (P), Berlin (B), Istanbul (I), Manchester (M) i Sydney (S). Pogledajmo preferencije glasanja:

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	32	3	5	8	6	30	2	3
	P	B	I	M	B	S	I	M
	B	P	P	S	S	P	M	P
	I	S	B	P	P	B	S	S
	M	I	S	B	I	M	P	B
	S	M	M	I	M	I	B	I

Koristite ove podatke da odgovorite na sljedeća pitanja:

a) a) Postoji li apsolutni većinski pobjednik? Ako ne postoji, koja država pobjeđuje u relativnom većinskom glasanju?

b) Odredite rezultate izbora koristeći metodu Hareove eliminacije. Odmah nakon glasanja, jedan od članova odbora glasajući za Manchester optužen je za varanje i bio je diskvalificiran. Zbog tog skandala jedan član je priznao da je glasao neiskreno te je promijenio svoj glas/izbor s Manchestera na Sydney. Kakav je rezultat korištenja Hareove metode?

c) Narušavaju li rezultati iz a) i b) bilo koji od pravila fer kriterija?

d) Odredite rezultat izbora koristeći Bordino brojenje.

e) Koristeći rezultat iz a) odredite je li bilo koji od fer kriterija povrijeđen.

Zadatak 10.

Predsjednik SAD-a biran je glasovima elektorskog kolegija. Kakva je odluka ako je glasanje provedeno korištenjem metode Hareove eliminacije?

kandidat	stranka	glasovi	postotak	glasovi elektorskog kolegija
Harry Browne	libertarijanac	386 024	00,37	0
Pat Buchanan	reformist	448 750	00,42	0
George W. Bush	republikanac	50 456 167	47,88	271
Al Gore	demokrat	50 996 277	48,39	267
Ralph Nader	zeleni	2 864 810	02,72	0
14 ostalih		238 300	00,23	0
ukupno		105 390 115		538

Koristite podatke iz tablice uz pretpostavku da je drugi izbor Browneovih glasača Al Gore, a drugi izbor Buchananovih glasača Bush. Pretpostavimo da je drugi izbor Al Gore za 80 % Naderovih glasača a za 20 % njih drugi izbor je Bush. Konačno, pretpostavimo da su se ostali birači podijelili u drugom izboru 50 %-50 % između Gorea i Busha. Tko je pobjednik ovih izbora?

Zadatak 11. Jedan članak francuskog ustava kaže: *Predsjednik Republike bira se apsolutnom većinom glasova. Ako se to ne dobije u prvom glasanju, mora se održati drugi krug glasanja koji će se održati dva tjedna kasnije. Na izborima se mogu kandidirati samo dva kandidata u drugom glasanju koja su dobila najveći broj glasova u prvom krugu.*

Na francuskim predsjedničkim izborima 2002. godine Jacques Chirac (politička stranka desnog centra) i Jean-Marie Le Pen (Partije nacionalnog fronta) bili su u drugom krugu. Evo rezultata prvog kruga glasanja (zaokruženo na najbliži postotak):

Jacques Chirac: 20 %
Jean-Marie Le Pen: 17 %
Lionel Jospin: 16 %
Ostali: 47 %

Ovo su postotci danih glasova. Procijenjeno je da je 28 % birača bilo suzdržano.

a) Tko su dva kandidata u drugom krugu izbora?

b) Glasovi u drugom krugu izbora bili su:

   Jacques Chirac: 82 %
   Jean-Marie Le Pen: 18 %

   Procjenjuje se da je 19 % birača bilo suzdržano u drugom krugu. Navedite barem jednu moguću promjenu u glasanju u računanju glasova u prvom i u drugom krugu.

Zadatak 12.

Studentsko bratstvo ΣΔΓ bira nacionalnog predsjednika. Četiri su kandidata: Alberto (A), Boris (B), Cvjetko (C) i Drago (D). Preferencije glasača su:

broj glasova s ovim rasporedom preferencija	110	125	105	150
	B	B	C	A
	D	D	D	D
	C	A	A	C
	A	C	B	B

Koristite ove informacije da odgovorite na sljedeća pitanja:

a) Koliko je bilo glasača?

b) Postoji li apsolutna većina? Ako ne postoji, tko pobjeđuje relativnom većinom glasova?

c) Postoji li Condorcetov pobjednik?

d) Tko pobjeđuje koristeći Bordinu metodu brojenja? Krši li ovo neki od fer kriterija?

e) Tko pobjeđuje na izborima Hareovom metodom? Krši li ovo neki od fer kriterija?

f) Tko je pobjednik korištenjem metode usporedbe parova? Krši li to neki od fer kriterija?

Treća razina

Zadatak 13.

Pretpostavimo da su Jana, Lucija, Ana i Marija članice odbora ženske plesne udruge. Jana, Lucija i Ana više vole novo pravilo koje kaže da će se vrijeme sastanka promijeniti u večernji termin.

Jana je predložila novo pravilo. Ona ne može doći na sastanak ako nije navečer. Luciji je to draže jer će je Jana pokupiti i dovesti na sastanak. No, mogla bi i sama voziti ako Jana nije u mogućnosti voziti.

Ana, s druge strane, kaže da će poći s njom ako to ne ometa njezinu aktivnost srijedom na jutarnjem satu aerobika.

Marija tvrdi da ako usvoje novo pravilo morat će promijeniti statut kluba. To zahtijeva proceduru izmjene statuta, pa se ona protivi novom pravilu.

Možete li predložiti amandman koji bi Marija mogla ponuditi da iznudi glasanje u svoju korist?

Imajte na umu da bi se usvojilo novo pravilo, potrebna su tri glasa, a pri jednakom broju glasova - dva prema dva, staro pravilo vrijedi i dalje.

4.3. Raspodjela

Prva razina

Zadatak 1.

Izračunajte standardni djelitelj (na dvije decimale) za dano stanovništvo i broj zastupničkih mjesta u primjerima od a) - h).

broj stanovnika	broj mjesta	broj stanovnika	broj mjesta
a) 52 000	8	b) 135 000	8
c) 630	5	d) 540	7
e) 1 450 000	12	f) 8 920 000	12
g) 23 000 000	125	h) 62 300 000	225

Zadatak 2.

Za dane godine izračunajte standardne kvote za gradske četvrti New Yorka koje su dane u tablici u problemima a) - f). Pretpostavite da ima 8 vijećničkih mjesta.

Tablica stanovništva (u tisućama) gradskih četvrti New Yorka

godina	ukupno	Manhattan	Bronx	Brooklyn	Queens	Staten Island
1790.	49	32	2	5	6	4
1800.	81	61	2	6	7	5
1840.	697	516	8	139	19	15
1900.	3 438	1 850	201	1 167	153	67
1940.	7 454	1 890	1 395	2 698	1 297	174
1990.	7 324	1 488	1 204	2 301	1 952	379
2000.	8 007	1 537	1 333	2 465	2 229	443

a) 1800. godine	b) 1900. godine	c) 1990. godine
d) 1840. godine	e) 1940. godine	f) 2000. godine

Zadatak 3.

Razmotrite zahtjeve u pitanjima od 1.) - 4.) te rasporedite predloženi broj mandata stanovništva u pitanjima od a) - d):

1.) Odredite standardni djelitelj.

2.) Izračunajte standardnu kvotu za svaki okrug.

3.) Ukupno, zaokružujući standardne kvote prema dolje.

4.) Izračunajte modificirani djelitelj koji će dati modificirane kvote i dati željeni broj mjesta/mandata.

a) 10 mandata

stanovništvo	
1. okrug	35 000
2. okrug	21 000
3. okrug	12 000
4. okrug	48 000
ukupno	116 000

b) 12 mandata

stanovništvo	
1. okrug	35 000
2. okrug	21 000
3. okrug	12 000
4. okrug	48 000
ukupno	116 000

c) 10 mandata

stanovništvo	
1. okrug	135 000
2. okrug	231 000
3. okrug	118 000
4. okrug	316 000
ukupno	800 000

d) 12 mandata

stanovništvo	
1. okrug	135 000
2. okrug	231 000
3. okrug	118 000
4. okrug	316 000
ukupno	800 000

Druga razina

Zadatak 4.

U raspodjeli za Zastupnički dom, na popisu stanovništva 1790. godine, postoji 15 država. Tada se Maine smatrao dijelom Massachusettsa. Ako bi Maine bio zasebna država imao bi svoja mjesta u raspodjeli mjesta u Domu. U Mainea je 1790. godine bilo 96 643 stanovnika. Oduzmite ovaj broj od broja stanovnika Massachusettsa. Odgovorite na pitanja od a) - d) na temelju 16 država.

a) Koje su standardne kvote za 16 država?

b) Koliki je zbroj kvota zaokružen na najbliži broj?

c) Koliki je zbroj donjih kvota?

d) Koliki je zbroj gornjih kvota?

Zadatak 5.

Razmotrite sljedeći problem raspodjele za gradske četvrti:
Sjever: 8 700
Jug: 5 600
Istok: 7 200
Zapad: 3 500

Pretpostavimo da svaki član vijeća predstavlja približno 2 500 građana. Uporabite plan raspodjele zatražen u pitanjima od a) - e) pod pretpostavkom da treba biti 10 predstavnika.

a) Adamsov plan,

b) Jeffersonov plan,

c) Hamiltonov plan,

d) Websterov plan,

e) Hill-Huntingtonov plan.

Zadatak 6.

Razmotrite sljedeći problem raspodjele za gradske četvrti:
Sjever: 18 200
Jug: 12 900
Istok: 17 600
Zapad: 13 300

Uporabite plan raspodjele zatražen u pitanjima od a) - e) pod pretpostavkom da mora biti 26 predstavnika.

a) Adamsov plan,

b) Jeffersonov plan,

c) Hamiltonov plan,

d) Websterov plan,

e) Hill-Huntingtonov plan.

Treća razina

Zadatak 7.

Razmotrite sljedeći problem raspodjele područja neke države:

Sjever:	1 820 000
Sjeveroistok:	2 950 000
Istok:	1 760 000
Jugoistok:	1 980 000
Jug:	1 200 000
Jugozapad:	2 480 000
Zapad:	3 300 000
Sjeverozapad:	1 140 000

Ako treba biti 475 predstavnika, uporabite plan raspodjele zatražen u pitanjima a) - e).

a) Adamsov plan,

b) Jeffersonov plan,

c) Hamiltonov plan,

d) Websterov plan,

e) Hill-Huntingtonov plan.

4.4. Paradoksi raspodjele

Prva razina

Zadatak 1.

Uporabite Adamsov plan u problemima a) i b). Pokažite da je pravilo kvote prekršeno.

a)

država:	A	B	C	D
stanovništvo:	68 500	34 700	16 000	9 500

100 je broj mandata

b)

država:	A	B	C	D
stanovništvo:	685	347	160	95

100 je broj mandata

Zadatak 2.

Koristite Jeffersonov plan u problemima od a) - d). Pokažite da je pravilo kvote prekršeno.

a)

država:	A	B	C	D
stanovništvo:	68 500	34 700	14 800	9 500

100 je broj mandata

b)

država:	A	B	C	D
stanovništvo:	17 170	7 500	49 400	5 824

132 je broj mandata

c)

država:	A	B	C	D	E
stanovništvo:	1 100	1 100	1 515	4 590	2 010

200 je broj mandata

d)

država:	A	B	C	D	E
stanovništvo:	1 700	3 300	7 000	24 190	8 810

150 je broj mandata

Zadatak 3.

U zadatcima od a) - d) upotrijebite Hamiltonov plan za raspodjelu novog mjesta u predloženim državama. Zatim povećajte broj mandata za jedan i odlučite hoće li se dogoditi paradoks Alabame. Pretpostavite da su brojevi populacije u tisućama.

a)

država:	A	B	C	D
Stanovništvo:	181	246	812	1 485

246 je broj mandata

b)

država:	A	B	C	D
stanovništvo:	235	318	564	938

45 je broj mandata

c)

država:	A	B	C	D	E
stanovništvo:	300	301	340	630	505

50 je broj mandata

d)

država:	A	B	C	D	E
stanovništvo:	300	700	800	800	701

82 je broj mandata

Zadatak 4.

U zadatcima od a) - d) rasporedite navedeni broj predstavnika za A, B i C koristeći Hamiltonov plan. Zatim, upotrijebite revidirane populacije za reproporciju predstavnika. Odlučite događa li se populacijski paradoks.

a)

država:	A	B	C
stanovništvo:	55 200	124 900	190 000
revidirano stanovništvo:	61 100	148 100	215 000

11 je broj mandata

b)

država:	A	B	C
stanovništvo:	90 000	124 800	226 000
revidirano stanovništvo:	98 000	144 900	247 100

13 je broj mandata

c)

država:	A	B	C
stanovništvo:	89 950	124 800	226 000
revidirano stanovništvo:	97 950	144 900	247 100

13 je broj mandata

d)

država:	A	B	C
stanovništvo:	7 510	20 5000	72 000
revidirano stanovništvo:	7 650	20 800	72 000

100 je broj mandata

Zadatak 5.

U zadatcima od a) - d) rasporedite navedeni broj predstavnika u dvije države, A i B, koristeći Hamiltonov plan. Nakon toga, preračunajte razdiobu koristeći Hamiltonov plan za tri države: dvije izvorne države i državu C. Odlučite hoće li doći do paradoksa novih država.

a)

država:	A	B	C
stanovništvo:	144 899	59 000	38 240

broj izvornih mandata je 12
broj dodatnih mandata je 2

b)

država:	A	B	C
stanovništvo:	394 990	753 950	138 550

broj izvornih mandata je 16
broj dodatnih mandata je 1

c)

država:	A	B	C
stanovništvo:	7 000 500	9 290 500	1 450 000

broj izvornih mandata je 50
broj dodatnih mandata je 4

d)

država:	A	B	C
stanovništvo:	265 000	104 000	69 000

broj izvornih mandata je 16
broj dodatnih mandata je 2

Druga razina

Zadatak 6.

Tvornica proizvodi opremu za testiranje na četiri lokacije. Zaposlila je 300 novih djelatnika. Ti se zaposlenici trebaju raspodijeliti prema razinama proizvodnje na četiri lokacije prema Jeffersonovom planu. Lokacije i proizvodnja su sljedeće:

Zagreb:	12 520
Split:	4 555
Rijeka:	812
Osijek:	947

a) Koliki je standardni djelitelj?

b) Kolike su standardne kvote?

c) Kolike su donje i gornje kvote?

d) Pronađite modificirani djelitelj koji će proizvesti odgovarajuće izmijenjene kvote za ukupno 300 novih zaposlenika.

e) Krši li to pravilo kvote?

Zadatak 7.

Općina je podijeljena na dvije četvrti: gornji dio grada (16 980 stanovnika) i središte grada (3 350 stanovnika). Općinom upravlja 100 članova vijeća.

a) Koliki je standardni djelitelj?

b) Kolike su standardne kvote?

c) Kako bi mandati trebali biti raspoređeni pomoću Hamiltonovog plana?

d) Pretpostavimo da se općini pripoji susjedna općina (2 500 stanovnika) kao treća četvrt. Koristeći standardni djelitelj iz a) složili su se da nova četvrt treba dobiti 12 novih mjesta. Provedite ovu novu općinsku raspodjelu mandata koristeći Hamiltonov plan.

e) Ilustrira li ovaj primjer paradoks novih država?

Zadatak 8.

Pretpostavimo da su godišnje plaće trojice zaposlenika

Zaposlenik ♯ 1.: 43 100 €
Zaposlenik ♯ 2.: 42 150 €
Zaposlenik ♯ 3.: 20 000 € (za pola radnog vremena)

a) Kolike su im plaće ako im se dade 5% povišice i zatim se rezultat zaokružuje na najbližih 1 000 € pomoću Hamiltonovog plana s ograničenjem ukupnih plaća 111 000 €?

b) Pretpostavimo da će povećanje plaće biti 6% s ograničenjem od 111 000 €. Kolike su plaće ako se zaokružuju na najbližih 1 000 € koristeći Hamiltonov plan?

c) Ako usporedite dijelove a) i b) jesu li to ilustracije nekih od paradoksa?

Rješavanje problema

Zadatak 1.

U fer raspodjeli preostalog komada kolača, između dvoje djece, treba dopustiti djetetu ♯ 1. prerezati tortu na dva komada, a zatim dopustiti djetetu ♯ 2. odabrati koji komad želi.

Razmotrite sljedeću raspodjelu dijeljenja preostalog komada torte između troje djece. Neka prvo dijete razreže kolač na dva dijela. Zatim drugo dijeta izreže jedan od tih dijelova na dva dijela. Dijete ♯ 3. može odabrati bilo koji dio, nakon njega odabire dijete ♯ 2. jedan od preostalih dijelova, nakon čega slijedi dijete ♯ 1. koji dobije preostali dio.

Je li ovakva podjela fer ako je cilj svakog djeteta maksimalno povećati veličinu svog komada torte?

Zadatak 2.

Umrla je vlasnica ergele konja i ostavila ih trojici sinova. Svojih 17 konja oporučno je podijelila na sljedeći način:

$\frac{1}{2}$ ergele najstarijem, $\frac{1}{3}$ drugom djetetu i $\frac{1}{9}$ najmlađem.

Koliko konja je dobio koji sin? Može li se ostvariti posljednja majčina volja?

Zadatak 3.

Nasljednici iz zadatka 2. su odlučili pozvati odvjetnika koji će im pomoći u raspodjeli jer se konji mogu samo cjelobrojno dijeliti .

Odvjetnik je stigao sa svojim konjem. On je privremeno pribrojio svog konja onima koji pripadaju elgeli. Zatim je zatražio da svaki sin odabere konje između 18 u omjerima određenim oporukom (ali nije dopustio da se izabere njegov konj).

Prvi sin uzeo je devet konja, drugi je uzeo šest, a treći dva.

17 konja je bilo tako podijeljeno među sinovima. Odvjetnik je uzeo svog konja natrag. I uzeo priličan veliki novčani honorar za svoju uslugu.

Najmlađi sin se žalio na to da je najstariji sin dobio 9 konja (ali je imao pravo na samo $\dfrac{17}{2} = 8,5$ konja). Odvjetnika su pitali o tome, a on je faksirao nasljednicima sljedeću poruku:

Vi ste svaki dobili više nego što ste zaslužili. Najstariji sin je dobio $\frac{1}{2}$ *'dodatka' konja, srednji je dobio* $\frac{1}{3}$ *više, a najmlađi* $\frac{1}{9}$ *konja 'extra'.*

Podijelite konje prema Adamsovu, Jeffersonovom i Webstersovom planu.

Koji plan daje odgovarajuću raspodjelu konja prema važećoj oporuci?

Zadatak 4.

Nasljednici iz zadatka 2. odlučili su pozvati ponovno odvjetnika za pomoć u raspodjeli konja.

Obavijestili su odvjetnika da 17 konja nisu jednake vrijednosti. Složili su poredak 17 konja tako da je konj $\sharp$ 1. najbolji, a konj $\sharp$ 17. najlošiji.

Tražili su od odvjetnika da pravedno podijeli konje kako bi svaki nasljednik dobio ne samo točan broj konjâ prema oporuci, nego i konjâ čija bi prosječna vrijednost također bila prema oporuci. Na primjer, ako je sin dobio konje $\sharp$ 1. i $\sharp$ 17., broj konja je dva, a prosječna vrijednost je $\frac{1+17}{2} = 9$.

Kako je odvjetnik podijelio konje?

4.5. Drugi primjeri, zadatci i projekti

Problemi grupnog istraživanja

Rad u malim grupama tipičan je za većinu radnih okruženja. Učenje i rad s drugima na prenošenju specificnih ideja važna je vještina.

1. Istražite predsjedničke izbore u RH 2024. godine i izbore ranijih godina. Istražite učinak ostalih kandidata koji su imali na ishod izbora.

2. Napišite povijest raspodjele u Saboru RH. Obratite posebnu pozornost na paradokse raspodjele.

3. Istražite nešto što zanima vašu grupu. Moglo bi se predvidjeti ishod nadolazećih izbora ili svoje omiljene pjesme ili filma.

   Vaša grupa treba napraviti popis od 5 ili 6 izbora: na primjer, mogli biste istraživati koja je najbolja tv serija. Napišite glasački listić i zamolite najmanje 50 ljudi da rangiraju stavke na vašem popisu. Rezimirajte ishod vaše ankete. Je li bilo apsolutno većinskog pobjednika? Pobjednika relativne većine? Tko pobjeđuje prema Bordinoj ili Hareovoj metodi? A prema metodi usporedbe u paru? Predstavite sažetak svojih rezultata.

Individualni problemi istraživanja

Naučite koristiti izvore izvan vaše učionice i udžbenika. To je važna vještina.

Ovdje su neke ideje koje daleko proširuju neke od ideja u ovoj knjizi.

4. Istražite kako se provodi glasanje za sljedeće događaje. Koristite terminologiju iz ove knjige.

a) Trofej najboljeg športaša u pojedinim granama u nekoliko posljednjih godina u RH.

b) Odabir grada domaćina Olimpijskih igara ili svjetskog prvenstva u nekom športu.

c) Nagrade učenicima u RH.

d) Odabir grada domaćina mediteranskih igara.

e) Odabir grada domaćina europskog prvenstva u nekom športu.

5. Ante je toliko oduševljen izbornim postupkom pa predlaže da njegova obitelj glasa kako bi odlučili koji će film gledati iz njegovog prijedloga popisa. Antini roditelji se slažu i glasaju između četiri filma: *Zaštitnik, Mama mia, Igra novca* i *Čudo*. Njihov raspored preferencija je sljedeći:

Ante	Majka	Otac
Zaštitnik	Mama mia	Čudo
Čudo	Zaštitnik	Igra novca
Igra novca	Čudo	Mama mia
Mama mia	Igra novca	Zaštitnik

- Postoji li pobjednik metodom relativne većine?
- Postoji li pobjednik koristeći standardnu proceduru drugog kruga? Ako je tako, zašto je tako? Ako nije, zašto nije?
- Postoji li pobjednik koristeći postupak Hareove eliminacije? Ako je tako, zašto je tako? Ako nije, zašto nije?

6. Ante i njegovi roditelji odlučuju pokušati koristiti sekvencijalni postupak užeg izbora u paru. Redom izvlače iz šešira imena filmova *Zaštitnik*, zatim *Igra novca*, pa *Mama mia* i konačno *Čudo*. Koji film pobjeđuje?

7. Antina majka se pita je li bitan redoslijed kojim su filmovi odabrani? Pokušavaju ponoviti izvlačenje. Ovaj put prvo iz šešira izvlače film *Igra novca*, zatim *Mama mia*, pa *Čudo* i na kraju *Zaštitnik*. Koji film pobjeđuje? Je li bitan redoslijed?

8. Redoslijed sparivanja i glasanja između kandidata naziva se dnevni red.

- Možete li pronaći redoslijed koji rezultira pobjedom filma *Mama mia*?
- Možete li pronaći plan koji vodi do pobjede filma *Igra novca*?

9. Razred je odlučio koristiti Condorcetov izborni postupak za određivanje rezultata njihovog glasanja o izletu. Njihovo glasanje prikazano je u tablici.

broj učenika s rasporedom preferencija	**6**	**3**	**7**	**5**	**4**
	Plitvička jezera	Sjeverni Velebit	Kopački rit	Kopački rit	Plitvička jezera
	Sjeverni Velebit	Plitvička jezera	Sjeverni Velebit	Plitvička jezera	Kopački rit
	Kopački rit	Kopački rit	Plitvička jezera	Sjeverni Velebit	Sjeverni Velebit

- Koristeći Condorcetov postupak, koja će opcija biti pobjednička?
- Koristite digraf za prikaz rezultata glasanja. Napravite tablicu koja će pokazati koliko pobjeda ima svaki izbor.
- Neki od učenika žele isprobati postupak Hareove eliminacije. Koja će opcija biti pobjednik koristeći ovaj izborni postupak?
- Koju biste proceduru preporučili razredu za izbor? Zašto?

10. U jednoj školi su odlučili organizirati turnir u stolnom tenisu. U ovoj vrsti turnira, svaki igrač igra protiv svakog drugog igrača jednom.

- Ako u razredu ima 26 učenika, koliko bi mečeva morali odigrati?
- Koliko rundi bi morali odigrati s ukupno a) 50 učenika, b) s n učenika?

11. Učenici jednog razreda odlučili su isprobati Bordin postupak na izboru pizze. Njihovi izbori su bili između četiri vrste. Za svaku preferenciju raspoređena prvoplasirana pizza dobiva 3 boda, drugoplasirana pizza 2 i trećeplasirana pizza 1. Posljednjeplasirana pizza dobiva 0 bodova.

    Koja je pizza izabrana?

broj učenika s ovim rasporedom preferencija	7	4	6	8
3	margarita	sa sirom	dalmatinska	slavonska
2	sa sirom	dalmatinska	sa sirom	sa sirom
1	dalmatinska	slavonska	slavonska	dalmatinska
0	slavonska	margarita	margarita	margarita

12. Nabavni odjel firme pokušava se odlučiti između tri različita dobavljača robe. Dobavljači se razlikuju po cijeni i kvaliteti njihovih proizvoda. Odjel je odlučio da je iz financijskih razloga važno držati se jednog dobavljača.

Tri dobavljača su dobavljač A, dobavljač B i dobavljač C. Peteročlani odbor koji je razmatrao ponude odlučio je tajno glasati glasačkim listićima. Rezultati njihova glasanja su prikazani u tablici.

3	2
dobavljač A	dobavljač B
dobavljač B	dobavljač C
dobavljač C	dobavljač A

- Uporabite raspored preferencija kako biste odredili pobjednika koristeći Condorcetov postupak.
- Uporabite rasporede preferencija za određivanje pobjednika koristeći Bordin postupak.
- Usporedite rezultate Condorcetovog i Bordinog postupka. Koji biste postupak savjetovali odboru?

13. Školski sportski klub odlučio je izabrati boju majice između 5 boja u kojoj trebaju svi natjecatelji nastupati. Odlučeno je da članovi kluba glasaju o boji majice. Klub je prikupio glasačke listiće i tabelirao ih. Rezultati su prikazani u rasporedima preferencija u tablici.

23	17	13	10	28	25
bijela	bijela	siva	ljubičasta	žuta	crvena
ljubičasta	žuta	ljubičasta	siva	ljubičasta	žuta
siva	ljubičasta	crvena	žuta	siva	bijela
crvena	siva	bijela	bijela	crvena	ljubičasta
žuta	crvena	žuta	crvena	bijela	siva

- Odredite pobjednika izbora metodom relativne većine. Da biste to učinili, razmotrite samo prvoplasirane glasove.
- Koliki je postotak glasova prvoplasiranih dobio pobjednik?
- Koristite Blackovu metodu za određivanje pobjedničke boje majice. Postoji li Condorcetov pobjednik?

- Koristite Bordinu eliminaciju za određivanje pobjedničke boje majice.

14. Zagrebački gimnazijski učenici suočili su se s problemom kada su zamoljeni za pomoć kako osmisliti predstavničko tijelo nekoliko škola koje će činiti učenici svake odabrane gimnazije u Zagrebu.

    Učenici gimnazija smatraju da vijeće učenika treba predstavljati učenike prema broju upisanih učenika kako bi svaki učenik u gimnaziji bio jednako zastupljen.

    Učenici 3. gimnazije nisu se složili. Smatrali su da treba biti isti broj predstavnika svake škole u odabranom vijeću učenika kako bi škole bile jednako zastupljene. Broj učenika svake odabrane škole (izmišljen je zbog potreba ovog zadatka) naveden je u tablici.

aktivnost	**broj učenika**
1. gimnazija	864
2. gimnazija	782
3. gimnazija	584
4. gimnazija	642
5. gimnazija	988
15. gimnazija	1422

a) U kojoj od škola mislite da će učenici preferirati sustav zastupljenosti na temelju određenog broja predstavnika po školi? U kojim školama će učenici vjerojatno preferirati sustav zastupljenosti temeljen na učeničkoj populaciji?

b) Što biste preporučili kao sustav predstavljanja za učenike ovog vijeća? Postoji li način da se svima ugodi?

   Odlučeno je da u vijeću učenika broj predstavnika iz svake škole treba biti proporcionalan broju učenika u školi. Sljedeći problem koji oni trebaju riješiti je kako odrediti broj predstavnika iz svake škole koji bi trebao biti u vijeću.

   Gradski je ured za školstvo odredio da u vijeću treba biti 30 ili manje učenika.

   Neka svaka grupa u vašem razredu predstavlja odbor za raspodjelu za drugu školu u vijeću. Kao člana odbora za raspodjelu, vaš je posao odlučiti kako ćete raspodijeliti članstvo u odabranom gradskom učeničkom vijeću i pripremiti izvješće koje opravdava vašu metodu raspodjele.

c) Opišite svoju metodu raspodjele u odabranom gimnazijskom vijeću učenika.

d) Objasnite zašto mislite da je vaša metoda raspodjele fer. Hoće li sve škole biti zadovoljne? Objasnite!

e) Predstavite svoje rezultate razredu i usporedite ih s rezultatima drugih grupa. Predlažu li sve grupe istu metodu raspodjele?

15. Izračunajte idealnu kvotu za svaku školu. Da biste to učinili, pomnožite omjer broja učenika u školi prema ukupnoj učeničkoj populaciji s brojem učenika članova vijeća.

škola	školska populacija	idealna kvota	broj predstavnika (cijeli dio)	dodatni predstavnici	ukupan broj predstavnika na temelju Hamiltonove metode
škola A	4 464				
škola B	3 782				
škola C	3 284				
škola D	1 842				
škola E	1 288				
škola F	422				
	ukupno		cjelobrojni zbroj	ukupni broj dodatnih predstavnika	ukupni broj predstavnika

16. Učenici su odlučili razmotriti da ako se školi G dopusti pridruživanje, kako bi se rasporedili predstavnici učenika u vijeću. Koristite Hamiltonovu metodu za ostvariti novu raspodjelu.

škola	školska populacija	idealna kvota	broj predstavnika (cijeli dio)	dodatni predstavnici	ukupan broj predstavnika na temelju Hamiltonove metode
škola A	4 464				
škola B	3 782				
škola C	3 284				
škola D	1 842				
škola E	1 288				
škola F	422				
škola G	2 478				
	ukupno		cjelobrojni zbroj	dodatni predstavnici	sve u svemu ukupno

a) Na koje škole najviše utječe pridruživanje škole G?

b) Mislite li da će učenici u svakoj školi biti zadovoljni rezultatima nove raspodjele?

17. Vaša grupa je odbor za raspodjelu u jednom odjelu tvrtke *Mi mislimo na Vas* tvornice specijalizirane za računalne proizvode koji se uporabljuju u školama. *Mi mislimo na Vas* je u vlasništvu svojih zaposlenika. Svaki zaposlenik ima jednak udio u tvrtki i stoga mora biti ravnopravno zastupljen u vodstvu poduzeća. *Mi mislimo na Vas* se sastoji od četiri odjela: proizvodnje, razvoja, prodaje i servisa. Svaki odjel bira predstavnike u upravni odbor.

odjel	broj zaposlenika	raspodjela
razvoj	1241	
proizvodnja	1673	
prodaja	1368	
servis	173	

Formulirajte prijedlog za raspodjelu upravnog odbora *Mi mislimo na Vas*. Koristite pitanja u nastavku kao vodič za formuliranje svojeg prijedloga.

- Koliko članova bi trebao imati upravni odbor? Zašto?
- Koju metodu raspodjele preporučujete? Zašto? Hoćete li zahtijevati da vaša metoda zadovolji kvotu? Jeste li spremni tolerirati paradokse?

- Kako bi trebalo postupati s dodavanjem novih odjela?
- Kako bi trebalo postupati s rastom populacije odjela?
- Usporedite predloženu raspodjelu jednog odjela s onima drugih odjela. Mogu li se svi odjeli složiti oko metode raspodjele?

18. U predbilježbi za izbornu nastavu u Srednjoj umjetničkoj školi upisao se 21 učenik za slikarstvo, 10 za kiparstvo i 9 za klesanje. U tablici prikažite raspodjelu pomoću Hamiltonove metode.

tečaj	**broj učenika**	**idealna kvota**	**raspodjela**	**prosjek tečaja**
slikarstvo	21			
kiparstvo	10			
klesarstvo	9			

Kad su tečajevi započeli, stvarni upis u tri skupine popeo se na 27 učenika za slikarstvo, 17 za kiparstvo, a 15 za klesanje. Prikažite u tablici novu raspodjelu pomoću Hamiltonove metode.

tečaj	**broj učenika**	**idealna kvota**	**raspodjela**	**prosjek tečaja**
slikarstvo	27			
kiparstvo	17			
klesarstvo	11			

Usporedite i analizirajte rezultate dviju raspodjela i opišite vlastitim riječima problem koji se javlja s promjenom upisa. Čini li vam se da je ovo ozbiljan problem?

19. Viša škola ima tri odjela. Svaki odjel ima broj studenata prikazan u tablici.

podjela	**broj studenata**
umjetnost	590
znanost	235
poslovanje	175
ukupno	1000

- Kako biste rasporedili na tri odjela pet mjesta u studentskom vijeću?
- Kad bi se sljedeće godine nakon diplomiranja i novog upisa broj studenata na odjelima promijenio na 555, 465 i 480, kako biste podijelili pet mjesta?
- Hoće li podjela s više ili manje studenata dobiti ili izgubiti zastupljenost zbog promjena u populaciji?

20. Upotrijebite Hillovu metodu da raspodijelite odbor *Mi mislimo na Vas* na upravni odbor sa šest članova.

odjel	**broj zaposlenika**	**kvocijent** ($d = 265$)	**geometrijska sredina**	**broj predstavnika**
razvoj	241			
proizvodnja	673			
prodaja	368			
servis	173			
ukupno	1455			

Jeste li zadovoljni rezultatima raspodjele uprave *Mi mislimo na Vas*? Objasnite!

21. Podijelite 23 člana bolničkog vijeća nekog grada koristeći Hillovu metodu i Websterovu metodu.

bolnica	**broj bolesničkih postelja**	**Hillova raspodjela** ($d = 203$)	**Websterova raspodjela** ($d = 200$)
bolnica A	1318		
bolnica B	1105		
bolnica C	765		
bolnica D	599		
bolnica E	296		
bolnica F	210		
ukupno			

Kako se rezultati Hillovom metodom mogu usporediti s rezultatima Websterovom metodom? Koja je metoda po vama pravednija?

22. Građani grada *Nedođije* održavaju izbore svake četiri godine kako bi odabrali peteročlani odbor. Građani se dijele na tri stranke: stranka A, stranka B i stranka C. Koristite Hamiltonovu metodu za raspodjelu rezultata ovogodišnjih i prošlih izbora. Usporedite rezultate raspodjele s idealnim kvotama. Što primjećujete?

stranka	**glasovi na prošlim izborima**	**idealna kvota**	**raspodjela**
stranka A	3 500		
stranka B	9 000		
stranka C	7 500		

stranka	**glasovi na izborima ove godine**	**idealna kvota**	**raspodjela**
stranka A	5 000		
stranka B	9 000		
stranka C	6 000		

23. Učenici su toliko oduševljen ponovnim izbornim postupkom pa predlažu da njihovi razredi glasuju kako bi odlučili na koji će izlet ići iz popisa predloženih mjesta. Učenici tri razreda A, B i C se slažu i glasuju između četiri mjesta: *Plitvice, Kornati, Vučedol* i *Kopački rit*. Njihov raspored preferencija prikazani su u nastavku.

razred A	**razred B**	**razred C**
Plitvice	Vučedol	Kornati
Kornati	Plitvice	Kopački rit
Kopački rit	Kornati	Vučedol
Vučedol	Kopački rit	Plitvice

- Postoji li pobjednik metodom relativne većine?
- Postoji li pobjednik koristeći standardnu proceduru drugog kruga? Objasnite!
- Postoji li pobjednik koristeći postupak Hareove eliminacije? Objasnite!

24. Razred A odlučio je koristiti Condorcetov izborni postupak za određivanje rezultata njihovog glasanja o izletu. Njihovo glasanje prikazano je u tablici.

broj učenika s rasporedom preferencija	**7**	**5**	**8**	**3**	**2**
	Plitvička jezera	Kopački rit	Kornatski otoci	Kornatski otoci	Plitvička jezera
	Kopački rit	Plitvička jezera	Kopački rit	Plitvička jezera	Kornatski otoci
	Kornatski otoci	Kornatski otoci	Plitvička jezera	Kopački rit	Kopački rit

- Koja će opcija biti pobjednička ako se koristi Condorcetov postupak?
- Koristite digraf za prikaz rezultata glasanja. Napravite tablicu koja će pokazati koliko pobjeda svaki izbor ima.
- Neki od učenika žele isprobati postupak Hareove eliminacije. Koji bi nacionalni park bio izabran koristeći ovaj izborni postupak?
- Koju biste proceduru za izbor preporučili razredu? Zašto? Objasnite!

25. Uporabite tablicu i Jeffersonov plan te Adamsov plan za raspodjelu 200 knjiga za nagradu u pet školskih grupa na temelju broja učenika u tim grupama.

Tablica: Školska statistika za 5 školskih grupa

grupe	broj učenika u školi	broj učenika u nekoj grupi
matematička		72
sportska		131
kazališna		243
informatička		95
zbor		71
ukupno:	1 025	612

Rješenje. Standardni djelitelj je $d = \dfrac{612}{200} = 3,06$.

Standardne i donje kvote su

	grupa	*standardna kvota, q*	*donja kvota*
matematička	72	$72/d \approx 23,53$	23
sportska	131	$131/d \approx 42,81$	42
kazališna	243	$243/d \approx 79,41$	79
informatička	95	$95/d \approx 31,04$	31
zbor	71	$71/d \approx 23,20$	23
UKUPNO:	612		198

Pretpostavimo da promijenimo $d = 3,06$ na $D = 3,01$ (ovo je modificirani djelitelj). Sada su izmijenjene i donje kvote:

	izmijenjena kvota, Q	*Jeffersonov plan*
matematička	$72/D \approx 23,23$	23
sportska	$131/D \approx 43,52$	43
kazališna	$243/D \approx 80,73$	80
informatička	$95/D \approx 31,56$	31
zbor	$71/D \approx 23,59$	23
UKUPNO:		200

Nalazimo da je modificirani djelitelj D vrijednosti promjenom d doveo da za zbroj donjih kvota dobijemo 200. Pretpostavimo da pomijenimo $d = 3,06$ na $D = 3,1$. Sada su izmijenjene kvote

	izmijenjena kvota, Q	*Adamsov plan*
matematička	$72/D \approx 23,23$	24
sportska	$131/D \approx 42,26$	43
kazališna	$243/D \approx 78,39$	79
informatička	$95/D \approx 30,65$	31
zbor	$71/D \approx 22,90$	23
UKUPNO:		200

26. Uporabite tablicu iz zadatka 25. i Hamiltonov plan za raspodjelu 200 knjiga za nagradu u pet školskih grupa na temelju broja učenika u tim grupama.

Rješenje. Standardni djelitelj je $d = \dfrac{612}{200} = 3,06$.
Prikazane su standardne i donje kvote, zajedno s Hamiltonovim planom:

	standardna kvota,q	*donja kvota*	*Hamiltonov plan*
matematička	$72/d \approx 23,53$	23	24 $(0,53)$
sportska	$131/d \approx 42,81$	42	43 $(0,81)$
kazališna	$243/d \approx 79,41$	79	79
informatička	$95/d \approx 31,04$	31	31
zbor	$71/d \approx 23,20$	23	23
UKUPNO:		198	200

27. U nekoliko zagrebačkih hotela je sljedeći broj soba:

Dubrovnik,	214 soba
Westin,	340 soba
Internacional,	207 soba
Esplanada,	208 soba
Palace,	119 soba

Svaki hotel treba osigurati određeni broj parkirnih mjesta za goste.
Ako gosti prijave rezervaciju za 100 automobila, koliko bi parkirnih mjesta bilo potrebno osigurati svakom hotelu ako su dodijeljeni prema broju soba i prema planu Hill-Huntington?

4.6. Problemi istraživanja naših svakodnevnih proizvoda

U ovim ćemo zadatcima istražiti na koji način učenici, primjerice, Bordinom metodom mogu saznati što njihov razred ili anketa većeg broja ljudi preferira između nekih svakodnevnih proizvoda. Ove ćemo zadatke riješiti tako da učenici uoče kako se metode i aktivnosti koje se u prethodnim poglavljima elaborirane mogu primijeniti u našoj svakodnevici.

U Primjerima 1. - 4. mijenjaju se proizvodi, ali ostavljamo iste "izmišljene" brojeve kako bismo ukazali na Bordinu metodu koja u svim tim primjerima "proizvodi" slični zaključak. Na ovaj se način unosom stvarnih podataka iz realiziranih anketiranja dobivaju stvarni zaključci.

Primjer 1. *Konzum* je poduzeće koje objedinjuje razvoj, proizvodnju, marketing i prodaju instant napitaka, čajeva i ostalih proizvoda namijenjenih zdravoj prehrani.

U razredu od 26 učenika odlučeno je isprobati **Bordin postupak** na izbor 4 pića. Učenici su se odlučili analizirati četiri pića, tako da je za svaku preferenciju prvoplasirano piće dobilo 3 boda, drugoplasirano 2 boda, trećeplasirano 1 bod, a posljednje plasirano 0 bodova.

Pića kojima je testirana prihvatljivost su:
Vitamin immuno ... A, *Vitamin happy* ... B, *Vitamin antiox* ... C i *Vitamin refresh* ... D.

Evo rezultata anketiranja učenika.

broj učenika s ovim rasporedom preferencija	8	5	6	7
3	A	B	C	D
2	B	C	B	B
1	C	D	D	C
0	D	A	A	A

Koje je piće najpopularnije u razredu?

Rješenje: Vitamin immuno je bio prvi izbor za osam učenika i svaki je dobio po 3 boda. Bio je to četvrti izbor za pet učenika s jednim željenim rasporedom, četvrti izbor za šest učenika s drugačijim rasporedom preferencija, a četvrti izbor za još sedam učenika s još jednim preferiranim rasporedom. Prema tome, *Vitamin immuno* ima ukupno 24 boda.

Broj glasova za *Vitamin immuno*: $8 \cdot 3 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 24$

Ostala tri pića dobivaju bodove istim postupkom:

Broj glasova za *Vitamin happy*: $8 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 2 = 57$

Broj glasova za *Vitamin antiox*: $8 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = 43$

Broj glasova za *Vitamin refresh*: $8 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 3 = 32$

Budući da *Vitamin happy ...* B ima najviše bodova na satu je proglašen pobjednikom. *Vitamin antiox* je drugoplasiran, *Vitamin refresh* je trećeplasiran, a *Vitamin immuno* je najmanje omiljeno piće.

Ovaj smo primjer mogli riješiti i pomoću kalkulatora ili softvera koji mogu koristiti matrične operacije.

Evo tog matričnog računa.

Zapišimo Bordine bodove rasporeda u (prvu) matricu M i učestalost svakog rasporeda u (drugu) matricu N. Svaki vodoravni red u matrici M predstavlja bodovnu vrijednost za jednu vrstu pića, a podatci u matrici N predstavljaju učestalost svake preferencije učenika. .

$$\begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 57 \\ 43 \\ 32 \end{bmatrix}$$

Umnožak ovih dviju matrica jednak je jednostupčastoj matrici u kojoj se nalaze odgovori za piće A, B, C i D.

Na sličan način možemo riješiti sljedeći primjer s većim brojem anketiranih kupaca.

Primjer 2. Imamo četiri *Konzumova pića*: *Jana ledeni čaj breskva, Jamnica Sensation Tonic, Toco Loco naranča* i *Jana ledeni čaj šumsko voće.*

Za svaku preferenciju pića prvoplasirano dobiva 3 boda, drugoplasirano 2 boda, trećeplasirano 1 bod, a posljednje plasirano 0 bodova.

Neka su pića redom označene A, B, C i D. Anketirano je 1608 kupaca. Evo rezultata anketiranja kupaca.

broj kupaca s rasporedom preferencija	417	74	121	365	285	346
3	A	B	C	A	D	B
2	B	C	D	C	A	D
1	C	D	B	B	B	A
0	D	A	A	D	C	C

Koje je piće najpopularnije u anketiranih kupaca?

Rješenje: Matrični račun daje sljedeći rezultat.

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 417 \\ 74 \\ 121 \\ 365 \\ 285 \\ 346 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3262 \\ 2865 \\ 1658 \\ 1863 \end{bmatrix}$$

Račun nam daje odgovor da je *Jana ledeni čaj breskva* najpopularnija u ovoj anketi. Drugoplasirano piće je *Jamnica Sensation Tonic*, trećeplasirano *Jana ledeni čaj šumsko voće* i četveroplasirano je *Toco Loco naranča.*

Primjer 3. *Podravka* je poduzeće koje objedinjuje razvoj, proizvodnju, marketing i prodaju juha i drugih proizvoda namijenjenih prehrani.

U razredu od 25 učenika odlučeno je isprobati **Bordin postupak** na izboru 4 juhe. Učenici su se odlučili analizirati četiri juhe, tako da je za svaku preferenciju prvoplasirana juha dobila 3 boda, drugoplasirana 2 boda, trećeplasirana 1 bod, a posljednje plasirana 0 bodova.

Juhe kojima je testirana prihvatljivost su:
Dalmatinska juha ... A, *Mamina juha* ... B, *Bečka juha* ... C i *Krem juha od rajčica* ... D.

Evo rezultata anketiranja učenika.

broj učenika s ovim rasporedom preferencija	2	12	6	5
3	A	B	C	D
2	B	C	B	B
1	C	D	D	C
0	D	A	A	A

Koja je juha najpopularnija u razredu?

Rješenje: Dalmatinska juha su bili prvi izbor za 2 učenika i svaki je dobio po 3 boda. Bio je to četvrti izbor za 5 učenika s jednim željenim rasporedom, četvrti izbor za 6 učenika s drugačijim rasporedom preferencija, a četvrti izbor za još 12 učenika s još jednim preferiranim rasporedom. Prema tome, *Dalmatinska juha* ima ukupno 6 bodova.

Broj glasova za *Dalmatinska juha*: $2 \cdot 3 + 12 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 6$

Ostala tri juhe dobivaju bodove istim postupkom:

Broj glasova za *Maminu juhu*: $2 \cdot 2 + 12 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 62$

Broj glasova za *Bečku juhu*: $2 \cdot 1 + 12 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 49$

Broj glasova za *Krem juhu od rajčica*: $2 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 33$

Budući da *Mamina juha* ... B ima najviše bodova na satu je proglašena pobjednikom. *Bečka juha* je drugoplasirana, *Krem juha od rajčica* je trećeplasiran, a *Dalmatinska juha* je najmanje omiljena juha.

Ovaj smo primjer mogli riješiti i pomoću kalkulatora ili softvera koji mogu koristiti matrične operacije, kao u Primjeru 1. i Primjeru 2.

Evo tog matričnog računa.

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 62 \\ 49 \\ 33 \end{bmatrix}$$

Umnožak ovih dviju matrica jednak je jednostupčastoj matrici u kojoj se nalaze odgovori za juhe A, B, C i D.

Na sličan način možemo riješiti sljedeći primjer s *Podravkinim* paštetama.

Primjer 4. Imamo četiri *Podravka* paštete: *pileću, čajnu, kokošju* i *jetrenu*.

Za svaku preferenciju paštete prvoplasirana dobiva 3 boda, drugoplasirana 2 boda, trećeplasirana 1 bod, a posljednje plasirana 0 bodova.

Neka su paštete redom označene A, B, C i D. Anketirano je 1631 kupaca. Evo rezultata anketiranja kupaca.

broj kupaca s rasporedom preferencija	400	174	221	565	185	86
3	A	B	C	A	D	B
2	B	C	D	C	A	D
1	C	D	B	B	B	A
0	D	A	A	D	C	C

Koja je pašteta najpopularnije u anketiranih kupaca?

Rješenje: Matrični račun daje sljedeći rezultat koji trebate završiti.

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 400 \\ 174 \\ 221 \\ 565 \\ 185 \\ 86 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$$

Račun nam daje odgovor koja je *Podravkina* pašteta najpopularnija u ovoj anketi.

Primjer 5. *Kraš* je poduzeće koje objedinjuje razvoj, proizvodnju, marketing i prodaju konditorskih proizvoda namijenjenih prehrani.

U razredu od 30 učenika odlučno je isprobati **Bordin postupak** na izboru 4 Kraševa bezglutenska proizvoda. Učenici su se odlučili analizirati četiri proizvoda, tako da je za svaku preferenciju prvoplasirani proizvod dobio 3 boda, drugoplasirani 2 boda, trećeplasirani 1 bod, a posljednje plasirani 0 bodova.

Proizvodi bez glutena kojima su testirana prihvatljivost su:
Kraš 1911 marcipan . . . A, *Bajadera* . . . B, *Kiki voćna karamela* . . . C i *Bronhi* . . . D.

Evo rezultata anketiranja učenika.

broj učenika s ovim rasporedom preferencija	12	5	3	10
3	A	B	C	D
2	B	C	B	B
1	C	D	D	C
0	D	A	A	A

Koji je proizvod najpopularniji u razredu?

Rješenje: Kraš 1911 marcipan su bili prvi izbor za 12 učenika i svaki je dobio po 3 boda. Bio je to četvrti izbor za 5 učenika s jednim željenim rasporedom, četvrti izbor za 3 učenika s drugačijim rasporedom preferencija, a četvrti izbor za još 10 učenika s još jednim preferiranim rasporedom. Prema tome, *Kraš 1911 marcipan* ima ukupno $\boxed{?}$ boda.

Broj glasova za *Kraš 1911 marcipan*: $\boxed{?} \cdot 3 + \boxed{?} \cdot 0 + \boxed{?} \cdot 0 + \boxed{?} \cdot 0 = \boxed{?}$

Ostala tri proizvoda dobivaju bodove istim postupkom:

Broj glasova za *Bajadera*: $\boxed{?} \cdot 2 + \boxed{?} \cdot 3 + \boxed{?} \cdot 2 + \boxed{?} \cdot 2 = \boxed{?}$

Broj glasova za *Kiki voćna karamela*: $\boxed{?} \cdot 1 + \boxed{?} \cdot 2 + \boxed{?} \cdot 3 + \boxed{?} \cdot 1 = \boxed{?}$

Broj glasova za *Bronhi*: $\boxed{?} \cdot 0 + \boxed{?} \cdot 1 + \boxed{?} \cdot 1 + \boxed{?} \cdot 3 = \boxed{?}$

Popunite mjesta označena s $\boxed{?}$ i izračunajte tko je pobjednik te koji je redoslijed.

Ovaj smo primjer mogli riješiti i pomoću kalkulatora ili softvera koji mogu koristiti matrične operacije.

Za vježbu realizirajte taj matrični račun.

Na sličan način možemo riješiti sljedeći primjer s *Kraševim* keksima.

Primjer 6. Imamo četiri *Kraševe* vrste keksa: *Prekrašni, Domaćica, Napolitanke* i *Jadro.*

Za svaku preferenciju keksa prvoplasirana vrsta dobiva 3 boda, drugoplasirana 2 boda, trećeplasirana 1 bod, a posljednje plasirana 0 bodova.

Neka su keksi redom označeni s A, B, C i D. Anketirano je 1000 kupaca. Evo rezultata anketiranja kupaca.

broj kupaca s rasporedom preferencija	400	70	120	300	50	60
3	A	B	C	A	D	B
2	B	C	D	C	A	D
1	C	D	B	B	B	A
0	D	A	A	D	C	C

Koji su keksi najpopularniji u anketiranih kupaca?

Rješenje: Matrični račun daje sljedeći rezultat.

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \end{bmatrix}$$

Popunite mjesta označena s $\boxed{?}$ i izračunajte tko je pobjednik te koji je redoslijed. Račun nam daje odgovor koji je keks najpopularniji u ovoj anketi.

Primjer 7. *Gavrilović* je poduzeće koje objedinjuje razvoj, proizvodnju, marketing i prodaju mesnih proizvoda namijenjenih prehrani.

Na razredu od 24 učenika odlučno je isprobati **Bordin postupak** na izboru 4 Gavrilovićeve paštete. Učenici su se odlučili analizirati četiri paštete, tako da je za svaku preferenciju prvoplasirana pašteta dobila 3 boda, drugoplasirana 2 boda, trećeplasirana 1 bod, a posljednje plasirana 0 bodova.

Paštete kojima su testirana prihvatljivost su:

Jetrena ... A, *Čajna* ... B, *Pileća* ... C i *Kokošja* ... D.

Za vježbu unesite svoje podatke u $\boxed{?}$ kao moguće podatke anketiranja učenika.

broj učenika s ovim rasporedom preferencija	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$
3	A	B	C	D
2	B	C	B	B
1	C	D	D	C
0	D	A	A	A

Koja je pašteta najpopularnija u razredu?

Ovaj smo primjer mogli riješiti i pomoću kalkulatora ili softvera koji mogu koristiti matrične operacije.

Evo tog matričnog računa.

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \end{bmatrix}$$

Umnožak ovih dviju matrica jednak je jednostupčajnoj matrici u kojoj se nalaze odgovori za proizvode A, B, C i D.

Na sličan način možemo riješiti sljedeći primjer s *Gavrilovićevim* narescima.

Primjer 8. Imamo četiri *Gavrilovićeva* nareska: *Kulenova seka, Goveđa kobasica, Mediteranska kobasica* i *Farmer šunka.*

Za svaku preferenciju nareska prvoplasirani narezak dobiva 3 boda, drugoplasirani 2 boda, trećeplasirani 1 bod, a posljednji plasirani 0 bodova.

Neka su naresci redom označeni s A, B, C i D. Anketirano je $\boxed{?}$ kupaca. Evo rezultata anketiranja kupaca.

broj kupaca s rasporedom preferencija	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$	$\boxed{?}$
3	A	B	C	A	D	B
2	B	C	D	C	A	D
1	C	D	B	B	B	A
0	D	A	A	D	C	C

Koji su naresci najpopularniji u anketiranih kupaca?

Rješenje: Matrični račun daje sljedeći rezultat.

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \\ \boxed{?} \end{bmatrix}$$

Račun nam daje odgovor što je najpopularnije u ovoj anketi.

Matematika koju koristite za pronalaženje ukupnih bodova vrlo je slična matematici koja se koristi u raznim situacijama.

Zadatak 1. Upravitelj trgovine odjećom ima inventar od 25 komada košulja classic, 40 košulja slim i 50 košulja regular. Slim košulja košta u trgovini 59,90 €, classic 46,13 €, a regular košta 65,90 €. Pronađite ukupnu cijenu zaliha u trgovini i objasnite zašto je izračun sličan izračunu ukupnih bodova.

Zadatak 2. Osmislite nekoliko zadataka iz svakodnevice i razredu prezentirajte svoje istraživanje.

4.7. Ponavljanje - 4 metode: nekoliko primjera i zadataka

Glasanje je jedan od temeljnih koncepata demokratskog društva. Koristi se za izbor čelnika, donošenje amandmana ili odabir planova.

Često se možete čuti izjava: "vlada većina". Međutim, to nije uvijek slučaj o čemu svjedoče predsjednički izbori u SAD-u 1992. i 2000. godine. Tada su predsjednici birani s manjinskom prednošću (tj. manje od 50%) glasova birača.

Najjednostavnija metoda glasanja je odabir između dva kandidata, amandmana ili akcijskih planova.

Svi se glasovi računaju jednako i uzimaju se u obzir. Birač može glasati za bilo koju od opcija. Pobjednik je opcija s najviše glasova. Jedan od problema u ovoj situaciji je da ako je broj glasača paran, onda vjerojatnost jednakog broja glasova postoji.

Kada postoje tri ili više mogućih opcija, kao što je slučaj s dodjelom Oscara, postupak glasanja postaje složeniji.

Tijekom godina ljudi su predlagali različite metode glasovanja za odabir pobjednika. U ovom odjeljku ćemo razmotriti samo neke primjere i zadatke iz četiriju najčešćih metoda glasanja. To su:

a) Metoda relativne većine,

b) Bordina metoda,

c) Metoda Hareove eliminacije (tj. metoda alternativnoga prenosivog glasa),

d) Metoda usporedbe parova.

Uočit ćemo da postoji barem jedan nedostatak svojstven svakoj metodi.

Dakle, koja je najbolja metoda?

1950-ih godina Kenneth Arrow dokazao je da je metoda glasanja za izbor jedne od tri ili više mogućnosti nemoguća, a da bi uvijek bila fer. Njegov se poučak naziva Arrowljev poučak o nemogućnosti.

a) Metoda relativne većine

Umjesto da glasate za jedinog kandidata po vašem izboru, od vas se traži da rangirate kandidata prema redoslijedu preferencija. Ova vrsta glasanja naziva se preferiranim glasanjem. No, primjenom metode relativne većine uzimaju se u obzir samo glasovi za prvoplasirane kandidate u preferiranom glasanju.

Primjer 1. Pretpostavimo da se tri kandidata natječu za predsjednika vijeća učenika, nazovimo ih A, B i C.

Pretpostavimo da je 20 učenika glasalo na sljedeći način:

1. opcija	A	B	A	A	A	A	A	B	A	A	B	A	A	A	A	C	C	A	A	B
2. opcija	B	C	B	C	B	C	B	C	B	B	C	B	C	C	C	B	B	B	B	C
3. opcija	C	A	C	B	C	B	C	A	C	C	A	C	B	B	B	A	A	C	C	A

Na ovim izborima 9 učenika dalo je svoje glasove za kandidate prema redoslijedu preferencija ABC, 5 učenika su glasali za ACB, 4 učenika za BCA, a 2 učenika za CBA.

Napišimo tablicu preferencija u kojoj će biti navedeni rezultati i broj glasača

Tablica preferencija

broj glasača	9	5	4	2
1. opcija	A	A	B	C
2. opcija	B	C	C	B
3. opcija	C	B	A	A

Zbroj brojeva u gornjem redu označava ukupan broj glasača. Vidimo da je 9+5 ili 14 učenika izabralo kandidata A kao svoj prvi izbor, 4 učenika izabralo B kao svoj prvi izbor, te 2 učenika C kao svoj prvi izbor. Za metodu relativne većine uzimaju se u obzir samo prvoplasirana mjesta kod danih glasova. Stoga, kandidat A je pobjednik metodom relativne većine, jer ima najviše glasova na prvom mjestu (14) od svih kandidata.

Zadatak 1.

Četiri kandidata X, Y, Z i W kandidiraju se za predsjednika udruge. Članovi su zamoljeni da ocijene sve kandidate prema redoslijedu izbora. Rezultatima izbora navedeni su u tablici preferencija.

broj članova	86	42	19	13	40
1. izbor	X	W	Y	X	Y
2. izbor	W	Z	Z	Z	X
3. izbor	Y	X	X	W	Z
4. izbor	Z	Y	W	Y	W

a) Koliko je članova udruge glasalo?

b) Koliko je ljudi glasalo za kandidate redom Y, Z, X, W?

c) koliko je ljudi izabralo kandidata Y za prvog kandidata?

d) Koliko je članova izabralo W kao svog prvog kandidata?

e) Tko je relativni većinski pobjednik izbora?

f) Prikažite tablicu preferencija pomoću postotaka.

Rješenje.

a) Da biste odredili ukupan broj glasača, izračunajte zbroj brojeva u gornjem retku, tj. 86 + 42 + 19 + 13 + 40 = 200.

b) Kako biste odredili broj birača koji su odabrali Y, Z, X, W pogledajte broj iznad 3. stupca koji je 19. Zato je 19 članova glasalo za Y, Z, X, W u ovom redoslijedu preferencija.

c) Kako biste odredili broj birača koji su izabrali kandidata Y kao svog prvog kandidata, odredite zbroj brojeva u stupcima 3. i 5. Dakle, vrijedi 19+40=59.

d) Kako biste odredili broj članova koji su izabrali kandidata W kao svoj prvi izbor, pronađite stupac s W kao prvim izborom. U ovom slučaju to je 2. stupac. Dakle, 42 glasača izabralo je kandidata W kao svoj prvi izbor.

e) Kandidat X je dobio 86+13 = 99 glasova, odnosno 43 % + 6,50 % = 49,50 % glasova i on je relativni većinski pobjednik.

f)

postotak članova	43 %	21 %	9,50 %	6,50 %	20 %
1. izbor	X	W	Y	X	Y
2. izbor	W	Z	Z	Z	X
3. izbor	Y	X	X	W	Z
4. izbor	Z	Y	W	Y	W

Zadatak 2. Učenici matematike profesora Mate Magičara zamoljeni su da glasaju o vremenu početka njihovog ispit. Predloženi termini su 8:00 . . . A , 10:00 . . . B , 12:00 . . . C ili 14:00 . . . D sati. Rezultati glasanja navedeni su u tablici preferencija.

broj glasova	8	12	5	3	2	2
1. izbor	A	B	C	D	B	A
2. izbor	B	A	D	C	C	D
3. izbor	C	D	B	A	A	B
4. izbor	D	C	A	B	D	C

a) Koliko je učenika glasalo?

b) Kada treba započeti ispit?

c) U koje je vrijeme održan ispit ako je za određivanje pobjednika korištena metoda relativne većine?

b) Bordina metoda

Bordina metoda brojanja glasova

Ova metoda glasanja u kojoj postoje tri ili više mogućnosti naziva se Bordina metoda brojanja glasova. Ovu je metodu razvio francuski pomorski kapetan i matematičar Jean-Charles de Borda.

Ovdje je riječ o ekvivalentnoj inačici metode Bordinog izračuna, gdje se kod Bordine metode brojanja (brojenja) glasova dodjeljuje po jedan bod više svakom kandidatu u svakoj preferenciji.

Dakle, sada birač ocjenjuje svakog kandidata od najpovoljnijeg do najnepovoljnijeg i dodjeljuje 1 bod posljednjem plasiranom, 2 boda pretposljednjem kandidatu, 3 boda trećem kandidatu od posljednjeg itd. po 1 više bod sve do prvoplasiranog. Bodovi za svakog kandidata zbrajaju se zasebno. Kandidat s najviše bodova pobjeđuje na izborima.

Kriterij apsolutne većine kaže da ako prvoplasirani kandidat dobije apsolutnu većinu glasova, onda taj kandidat mora biti pobjednik izbora.

Primjer 2. Razmotrite rezultate izbora prikazane u danoj tablici preferencija. Ispitajte je li Bordin pobjednik i apsolutni većinski pobjednik.

broj glasova	15	8	3	2
1. izbor	B	A	C	A
2. izbor	A	C	A	B
3. izbor	C	B	B	C

Rješenje.
Odredite pobjednika Bordinom metodom brojanja.
Kandidat A: $15 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 66$.
Kandidat B: $15 \cdot 3 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 60$.
Kandidat C: $15 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 42$.
Matrični račun daje:

$$\begin{array}{r} \textit{kandidat A} \\ \textit{kandidat B} \\ \textit{kandidat C} \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 15 \\ 8 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 \\ 60 \\ 42 \end{bmatrix}$$

Prema Bordinoj metodi brojanja glasova kandidat A je pobjednik. No, kandidat B dobio je 15 prvoplasiranih glasova što je apsolutna većina od ukupno 28 glasača. Stoga, u ovom slučaju nije ispunjeno pravilo o apsolutnom većinskom kriteriju.

Zadatak 3. Na školskom automatu za pića ponuđene su 4 mogućnosti: mlijeko (M), voda (V), ledeni čaj (Č) i sok (S). U tablici su preferencijski rezultati razrednog izbora.

postotak članova	8	6	5	3	2
1. izbor	S	M	V	Č	V
2. izbor	V	V	Č	S	S
3. izbor	Č	Č	S	V	M
4. izbor	M	S	M	M	Č

a) Odredite Bordinog pobjednika u razrednom izboru pića u školi.

b) Odredite većinskog pobjednika. Jesu li Bordin i većinski pobjednik isti?

c) Metoda Hareove eliminacije (metoda alternativnoga prenosivog glasa)

Metoda relativne većine s eliminacijom glasova (tj. metoda alternativnoga prenosivog glasa, odnosno metoda Hareove eliminacije) jedna je od najprikladnijih za glasanja ako nema kandidata s apsolutnom većinom glasova.

Ako nema kandidata s apsolutnom većinom prvoplasiranih glasova, onda se kandidat (ili kandidati) s najmanje prvoplasiranih glasova eliminira iz izborne procedure.

Ovakav postupak eliminacije kandidata se nastavlja tj. ponavlja sve dok se ne dobije kandidat s apsolutnom većinom prvoplasiranih glasova.

Taj se kandidat proglašava izbornim pobjednikom i proces je završen.

Sljedeći primjer pokazuje kako koristiti metodu Hareove eliminacije.

Primjer 3. Uporabite metodu Hareove eliminacije kako biste odredili pobjednika prikazanih izbora u tablici rezultata.

broj glasova	6	27	17	9
1. izbor	A	B	C	D
2. izbor	D	A	D	B
3. izbor	C	C	B	C
4. izbor	B	D	A	A

Rješenje.

1. korak: Glasovalo je ukupno 59 osoba. Nitko nije dobio apsolutnu većinu glasova, tj. 30 ili više glasova. Kandidat A se eliminira jer je dobio najmanje prvoplasiranih glasova, tj. samo 6 glasova. Prekrižimo kandidata A kako bismo ga eliminirali i dobili novu tablicu bez njega.

broj glasova	6	27	17	9
1. izbor	~~A~~	B	C	D
2. izbor	D	~~A~~	D	B
3. izbor	C	C	B	C
4. izbor	B	D	~~A~~	~~A~~

2. korak: Eliminacijom kandidata A dobivamo sljedeću tablicu u kojoj prekrižimo kandidata D jer samo ima ukupno 6+9=15 prvoplasiranih glasova, tj. najmanje prvoplasiranih glasova.

broj glasova	6	27	17	9
1. izbor	~~D~~	B	C	~~D~~
2. izbor	C	C	~~D~~	B
3. izbor	B	~~D~~	B	C

3. korak: Eliminacijom kandidata D dobivamo sljedeću tablicu samo s kandidatima B i C.

broj glasova	6	27	17	9
1. izbor	C	B	C	B
2. izbor	B	C	B	C

Sada kandidat B ima 36 prvoplasiranih glasova, tj. 27+9=36 glasova. Kandidat C ima 23 prvoplasiranih glasova, tj. 6+17=23 glasa.

Dakle, kandidat B je pobjednik uporabom ove metode.

Metoda Hareove eliminacije, kao i druge dvije metode, također ima neke nedostatke. Jedan od nedostataka je taj što ponekad ne ispunjava *kriterij pravednosti* poznat kao *kriterij monotonosti*.

`Kriterij monotonosti kaže da ako kandidat pobijedi na izborima a održe se ponovljeni izbori na kojima se događaju pojedine promjene u glasanju u korist izvornog pobjedničkog kandidata, tada taj kandidat mora pobijediti na ponovljenim izborima.`

Razmotrimo sljedeći primjer izbora:

broj glasova	7	13	11	10
1. izbor	X	Z	Y	X
2. izbor	Z	X	Z	Y
3. izbor	Y	Y	X	Z

Kada koristimo metodu Hareove eliminacije, kandidat Y ispada nakon prvog koraka eliminacije. Tablica preferencija sada ovako izgleda.

broj glasova	7	13	11	10
1. izbor	X	Z	Z	X
2. izbor	Z	X	X	Z

Kandidat Z pobjeđuje s 24 prvoplasirani glasova.

Sada pretpostavimo da su prvi izbori iz nekog razloga proglašeni ništavnima, a na ponovljenim izborima glasači u 1. stupcu mijenjaju svoje glasačke listiće u korist kandidata Z i glasaju umjesto za X za kandidata Z.

Tablica preferencija izgledat će ovako

broj glasova	7	13	11	10
1. izbor	Z	Z	Y	X
2. izbor	X	X	Z	Y
3. izbor	Y	Y	X	Z

Sada je kandidat X eliminiran jer ima samo 10 prvoplasiranih glasova.

Nakon toga tablica preferencija izgledat će ovako

broj glasova	7	13	11	10
1. izbor	Z	Z	Y	Y
2. izbor	Y	Y	Z	Z

Pobjednik je Y s 21 glasom u usporedbi s 20 glasova za Z.

U ovom slučaju,metoda Hareove eliminacije ne zadovoljava kriterij monotonosti.

Odnosno, na ponovljenim izborima, unatoč tome što je kandidat Z dobio sedam glasova više nego u prvom koraku izgubio je izbore. Nakon što je drugi put pokazao najbolje rezultate, kandidat Y je pobijedio.

Zadatak 4. Učenici matematike profesora Mate Magičara zamoljeni su da glasaju o vremenu početka njihovog ispita. Predloženi termini su A . . . 8:00, B . . . 10:00, C . . . 12:00 ili D . . . 14:00 sati. Rezultati glasanja navedeni su u tablici preferencija.

broj glasova	8	12	5	3	2	2
1. izbor	A	B	C	D	B	A
2. izbor	B	A	D	C	C	D
3. izbor	C	D	B	A	A	B
4. izbor	D	C	A	B	D	C

a) Odredite pobjednika uporabom metode Hareove eliminacije (tj. metode alternativnoga prenosivog glasa).

b) Je li pobjednik isti kao pobjednik određen korištenjem metode relativne većine (v. zadatak 2. str. 171.)?

c) Utvrdite krše li izbori prikazani u zadatku kriterij monotonosti ako nema slobodnih mjesta u 8:00 ujutro.

Zadatak 5. Odjel za engleski jezik na fakultetu bira novog voditelja katedre. Tri su kandidati prof. Grujić (G), prof. Vidić (V) i prof. Dujmović (D).

Rezultati izbora prikazani su u tablici preferencija.

broj glasova	4	3	2
1. izbor	D	V	G
2. izbor	V	G	D
3. izbor	G	D	V

a) Koristeći metodu Hareove eliminacije odredite pobjednika.

b) Utvrdite krše li izbori prikazani u zadatku kriterij monotonosti ako profesor Grujić ne može služiti.

d) Metoda usporedbe parova

Metoda usporedbe parova[2] koristi tablicu preferencija za međusobnu usporedbu svih parova kandidata.

Na primjer, ako na izborima sudjeluju četiri kandidata A, B, C i D, tada će se napraviti šest usporedbi kao što je prikazano.

A se uspoređuje s B,	B se uspoređuje s C,
A se uspoređuje s C,	B se uspoređuje s D,
A se uspoređuje s D,	C se uspoređuje s D.

Općenito, broj uparenih usporedbi kada se izvodi s n kandidata jednak je

$$\frac{n(n-1)}{2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

U našem slučaju imamo 4 kandidata, tj. $n = 4$ pa je broj uparivanja jednak $\dfrac{4(4-1)}{2} = 6$.

Metoda usporedbe parova u glasanju zahtijeva da se svi kandidati rangiraju prema odlukama birača.

Svaki se kandidat osobnim rezultatom uspoređuje sa svakim drugim kandidatom.

Za svaku usporedbu "jedan na jedan" kandidat koji dobije veći broj glasačkih listića dobiva 1 bod.

U slučaju jednakog broja glasova u usporedbi parova, svaki kandidat dobiva po $\dfrac{1}{2}$ boda.

Nakon realizacije svih mogućih usporedbi između dva kandidata zbrajaju se bodovi za svakog kandidata. Kandidat koji je postigao najviše bodova pobjeđuje na izborima.

Pokažimo kako se koristi metoda usporedbe parova.

Primjer 4. Uporabimo metodu usporedbe parova 3 kandidata A, B i C kako bismo odredili pobjednika izbora.

Rezultati preferencija su prikazani u sljedećoj tablici.

broj glasova	14	13	16	15
1. izbor	B	A	C	B
2. izbor	C	C	A	A
3. izbor	A	B	B	C

Rješenje. Trebat će provesti tri pripadajuće usporedbe: A s B, A s C i B s C.

Prvo usporedimo A s B. U tablici označimo kandidate s $\boxed{\text{A}}$ i s $\boxed{\text{B}}$.

broj glasova	14	13	16	15
1. izbor	$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{A}}$	C	$\boxed{\text{B}}$
2. izbor	C	C	$\boxed{\text{A}}$	$\boxed{\text{A}}$
3. izbor	$\boxed{\text{A}}$	$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{B}}$	C

[2] Na ovom mjestu se u čitavom tekstu knjige prvi puta definira - opisuje postupak metode usporedbe parova, odakle se vidi da metoda usporedbe parova nije ekvivalentna (nije jednaka) metodi Condorcetovog pobjednika; (u obje ove metode provode se usporedbe po svim parovima).

U stupcima 2. i 3. A se nalazi iznad B. Zbroj brojeva za A u stupacima 2. i 3. daje $13 + 16 = 29$ glasova.

U stupcima 1. i 4. B je rangiran iznad A tako da je ima zbroj $14 + 15 = 29$ glasova. U ovom je slučaju jednaki broj glasova, pa je njihov rezultat svakome po $\frac{1}{2}$ boda.

Zatim usporedimo A s C. U tablici označimo kandidate s $\boxed{\text{A}}$ i s $\boxed{\text{C}}$.

broj glasova	14	13	16	15
1. izbor	B	$\boxed{\text{A}}$	$\boxed{\text{C}}$	B
2. izbor	$\boxed{\text{C}}$	$\boxed{\text{C}}$	$\boxed{\text{A}}$	$\boxed{\text{A}}$
3. izbor	$\boxed{\text{A}}$	B	B	$\boxed{\text{C}}$

U stupcima 2. i 4. A je rangiran iznad C tako da A ima zbroj $13 + 15 = 28$ glasova.
U stupcima 1. i 3. C je rangiran iznad A tako da C ima zbroj $14 + 16 = 30$ glasova.
U ovom slučaju C ima veći broj glasova, pa dobiva 1 bod.

Na kraju usporedimo B s C:

broj glasova	14	13	16	15
1. izbor	$\boxed{\text{B}}$	A	$\boxed{\text{C}}$	$\boxed{\text{B}}$
2. izbor	$\boxed{\text{C}}$	$\boxed{\text{C}}$	A	A
3. izbor	A	$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{C}}$

U stupcima 1. i 4. B je rangiran iznad C tako da je ima zbroj $14 + 15 = 29$ glasova.
U stupcima 2. i 3. C je rangiran iznad B tako da je ima zbroj $13 + 16 = 29$ glasova.
U ovom je slučaju jednaki broj glasova, pa je njihov rezultat B $\frac{1}{2}$ boda i C $\frac{1}{2}$ boda.

Dakle, kandidati imaju sljedeće bodove:

		ukupno bodova
kandidat A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
kandidat B	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$	1
kandidat C	$1+\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$

Dakle, pobjednik je kandidat C.

Zadatak 6. U školi u razrednom klubu ljubitelja knjige učenici žele odlučiti koja će se knjiga čitati i raspravljati na sljedećem sastanku. U obzir za raspravu predlažu roman (R), biografiju (B) ili znanstveno-fantastičnu knjigu (Z). Tablica preferencija je:

broj glasova	8	5	4	2
1. izbor	Z	R	R	B
2. izbor	B	Z	B	R
3. izbor	R	B	Z	Z

a) Odredite pobjednika metodom usporedbe parova.

b) Usporedite pobjednika s Bordinim pobjednikom.

Zadatak 7. Međunarodni rukometni savez (IHF) je nakon svjetskog prvenstva 2025. godine objavio ljestvicu najboljih 14 reprezentacija. Njihov kriterij za ljestvicu koju su službeno objavili može se "otkriti" analizom same ljestvice.

1. Francuska - 6 zlata, 2 srebra, 5 bronci
2. Švedska - 4 zlata, 4 srebra, 5 bronci
3. Danska - 4 zlata, 3 srebra, 1 bronca
4. Rumunjska - 4 zlata, 2 bronce
5. Njemačka - 2 zlata, 2 srebra, 1 bronca
6. Rusija - 2 zlata, 1 srebro
7. Španjolska - 2 zlata, 3 bronce
8. HRVATSKA - 1 zlato, 4 srebra, 1 bronca
9. Norveška - 2 srebra
10. Poljska - 1 srebro, 3 bronce
11. Austrija - 1 srebro
12. Mađarska - 1 srebro
13. Katar - 1 srebro
14. Slovenija - 1 bronca

Analizirajte ovu ljestvicu sukladno Bordinoj metodi (zlatna medalja 3 boda, srebrna 2 boda i brončana 1 bod) i dobit ćete poredak koji je nešto drukčiji.

Bordina metoda daje sljedeće bodove reprezentacijama.

1. Francuska - 6 zlata, 2 srebra, 5 bronci dobiva $6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 27$ bodova.
2. Švedska - $4 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 25$ bodova.
3. Danska - $4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 19$ bodova.
4. Rumunjska - $4 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 14$ bodova.
5. HRVATSKA - $1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 12$ bodova.
6. Njemačka - $2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 11$ bodova.
7. Španjolska - $2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 9$ bodova.
8. Rusija - $2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 8$ bodova.
9. Poljska - $0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 5$ bodova.
10. Norveška - $0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 4$ boda.
11. Austrija - $0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2$ boda.
12. Mađarska - $0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2$ boda.
13. Katar - $0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 2$ boda.
14. Slovenija - $0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1$ bod.

Dakle, Bordina metoda u ovom slučaju stavlja Hrvatsku na 5. mjesto, Rusiju na 8. i Norvešku na 10.

Napišite ljestvicu ako uobičajene Bordine bodove promijenimo u a) i b):

a) zlatna medalja . . . 4 boda, srebrna . . . 2 boda i brončana . . . 1 bod,

b) zlatna medalja . . . 5 boda, srebrna . . . 3 boda i brončana . . . 1 bod.

c) Istražite koje Bordino bodovanje može dati isti poredak u objavljenoj IHF-ovoj ljestvici?

Za koju biste ljestvicu mogli reći da je fer? Obrazložite svoje argumente!

Dodatak: Matematika izbornih sustava

Matematički sažetak

Započeli smo ovu knjigu razmatranjem matematičkog procesa za izbor pobjednika izbora. Metoda relativne većine, koja se često se koristi u SAD-u i u drugim državama, ponekad proizvodi i nepoželjan rezultat da je pobjednički kandidat ocijenjen najgorim izborom apsolutne većine glasača.

Kad matematika koja se koristi za rješavanje problema daje neadekvatna rješenja, ljudi traže nove načine korištenja matematike kako bi postigli bolje rezultate rješenja. Kad ste započeli potragu za boljim načinom određivanja pobjednika izbora, naučili ste nove matematičke prikaze koji su pomogli razumjeti preferencije birača i rezultate izbora. Među njima su postotci, dijagrami preferencija i dijagrami užeg izbora. Također kalkulatori i računala mogu biti pomoćni alati u primjeni novih izbornih metoda.

Potraga za boljom izbornom metodom dovela je do ispitivanja metode užeg izbora. Metoda drugog kruga nikada ne bira pobjednika kojeg je apsolutna većina birača rangirala kao posljednjeg, ali može proizvesti druge probleme. Budući da metoda drugog kruga može izabrati pobjednika koji je pretposljednji na ljestvici apsolutne većine glasova birača, može se smatrati malim napretkom u odnosu na metodu relativne većine, ali svakako nije savršena.

Metode relativne većine i užeg izbora odabiru pobjednike koji nisu nisko rangirani za puno glasača jer se temelje samo na prvom mjestu na ljestvici. Dobar način da se izbjegnu nedostatci ove dvije metode je korištenje metode koja uzima u obzir više od samog poretka. Bodovni sustav čini upravo to.

Iako bodovni sustavi ne biraju pobjednika koji je nisko rangiran mnogim biračima, mogu izazvati druge probleme. Primjerice, birači mogu manipulirati izborima neiskrenim glasanjem, a kandidati mogu zahtijevati usluge od drugih kandidata u zamjenu za povlačenje ili ostanak na izborima. Manipulacija biračima i kandidatima, međutim, ne događa se samo s bodovnim sustavima. Mogu se pojaviti kod većine izbornih metoda.

Može se razmatrati alternativa relativnoj većini, užem izboru ili bodovnoj metodi. To su sekvencijalni uži izbor, Condorcetova metoda ili odobrenje glasovanja koje su nedavno predložili neki politolozi.

Potraga za načinima poboljšanja izbornog procesa je izvrstan primjer načina na koji se matematika koristi za rješavanje problema iz stvarnog svijeta. Rješenja su rijetko savršena, a kada se otkrije da ih nema, matematika se mijenja i pronalaze se nova rješenja. Potraga za novim načinima korištenja matematike za rješavanje stvarnih problema događa se svaki dan u svijetu oko nas.

Pojmovi i formule matematike izbornih sustava

Ovdje navodimo opisno neke važne pojmove u matematici izbornih sustava. Napomenimo da nazivlje u ovom području nije strogo ujednačeno.

APSOLUTNA VEĆINA:

Više od polovice glasova danih na izborima.

BODOVNI SUSTAVI:

Bodovni sustavi koji dodjeljuju određeni broj bodova za prvo mjesto, manje bodova za drugo mjesto, još manje za treće mjesto itd. Pobjednik je kandidat s najvećim ukupnim brojem bodova.

CONDORCETOVA METODA:

Metoda koja daje za pobjednika izbora onog kandidata koji pobjeđuje svakog od ostalih kandidata u utrci jedan na jedan.

DIJAGRAM PREFERENCIJA:

Dijagram koji pokazuje birački rang kandidata. Također prikazuje broj odnosno postotak birača.

DIJAGRAM UŽEG IZBORA:
Dijagram u kojem se točka-vrh koristi za predstavljanje svakog kandidata i strjelica crta od pobjednika do gubitnika svakog užeg izbora.

GLASANJE ODOBRENJEM:
Metoda glasanja u kojoj je biračima dopušteno glasati za onoliko kandidata koliko oni žele. Pobjednik je kandidat s najviše glasova.

GLASANJE U PARU:
Praksa u kojoj birači glasaju odjednom o dva kandidata.

KUMULATIVNO GLASANJE:
Metoda glasanja koja se ponekad koristi za izbor članova odbora ili zakonodavnog tijela. Svakom glasaču je dozvoljeno onoliko glasova koliko ima mjesta koja se treba popuniti. Birač može dati više od jednog glasa za jednog kandidata.

MATRICA:
Tablica sastavljena od horizontalnih redaka i okomitih stupaca.

METODA DVA IZBORNA KRUGA
Varijante ove izborne metode mogu biti da u drugi krug idu samo dva kandidata s najviše glasova u prvom krugu, ili da u drugi krug može ići neki određeni broj kandidata iz prvog kruga, ili da svi kandidati koji su prešli određeni izborni prag u prvom krugu mogu ići u drugi krug.

NEISKRENO GLASANJE:
Praksa u kojoj birači odlučuju glasati različito od načina koje zapravo osjećaju o kandidatima.

PARADOKS:
Iznenađujući rezultat - onaj koji se dobiva u odnosu na osobnu intuiciju.

RELATIVNA VEĆINA:
Metoda izbora kojom je izabran onaj kandidat koji ima najviše glasova.

SEKVENCIJALNA METODA UŽEG IZBORA:
Metoda u kojoj se kandidate eliminira jednog po jednog. Kandidat s najmanje glasova ispada a glasači ponovno glasaju. Proces se nastavlja sve dok kandidat ne dobije apsolutnu većinu.

UŽI IZBORI:
Izborni sustav koji daje pobjednika koji će dobiti apsolutnu većinu glasova. Kad nijedan kandidat ne dobije apsolutnu većinu u prvom krugu izbora, održava se drugi krug izbora s biranjem samo između dva najbolja kandidata iz prvog kruga.

Formule

Aritmetička sredina

Aritmetička sredina A je jedna od središnjih vrijednosti koje se koriste u statistici. Računa se za neki skup brojeva kao kvocijent zbroja članova i broja članova skupa, u matematičkoj notaciji:

$$A = \bar{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, n \in \mathbf{N}$$

Popularno se naziva još i *prosjek*. Aritmetička sredina se dobiva tako što se zbroj vrijednosti promatranog obilježja podijeli s njihovim brojem. Aritmetička sredina, kao prosječna vrijednost obilježja svih jedinica skupa.

Aritmetička sredina A predstavlja veličinu za koju je zbroj kvadrata odstupanja danih podataka od te veličine minimalan, tj. za dane podatke-brojeve $x_1, x_2, ..., x_n$, zbroj kvadrata $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2$ ima minimum u "točki" $x = A$.

Decimalni broj

Decimalni broj je realni broj prikazan *decimalnim zapisom* koji se sastoji od cijeloga dijela (lijevo od zareza), decimalnoga zareza i decimalnoga dijela (desno od zareza).

Decimalni broj = cijeli dio + decimalni dio.

Primjerice, broj $12,34$ se rastavlja na cijeli broj 12 i decimalni dio $0,34$, tj. vrijedi $12,34 = 12 + 0,34$

Decimala je brojevno *mjesto desno od zareza*: prvo brojevno mjesto je *desetinka*, drugo *stotinka*, treće *tisućinka*, itd. Na primjer, u *dekadskome brojevnom sustavu* decimalni zapis sa šest znamenki razdvojenih decimalnim zarezom $321,605$ predočuje broj koji u cijelome dijelu ima tri stotice, dvije desetice i jednu jedinicu, a u decimalnome dijelu šest desetina, nijednu stotninu i pet tisućnina.

Broj prikazan s pomoću *razlomka* može se izraziti u *decimalnom obliku* kad mu se brojnik podijeli s nazivnikom, npr. $\frac{1}{2} = 0,5$ i kao *postotak*, npr. $\frac{2}{8} = 25\%$.

Periodični decimalni broj u decimalnome zapisu ima znamenku ili skupinu znamenaka koje se poslije određenoga decimalnoga mjesta beskonačno ponavljaju. Ponavljanje znamenke može se označiti na više načina, npr. $\frac{7}{3} = 2,\dot{3} = 2,\bar{3} = 2,333333\ldots, \frac{9}{11} = 0,818181818\ldots$

Neperiodični beskonačni decimalni broj u decimalnome zapisu ima beskonačno mnogo decimala kojima se znamenke ne pojavljuju periodično, npr. $\pi = 3,141592653589\ldots.$

Katkad se decimalnim brojem smatra samo broj s konačnim decimalnim zapisom.

U praksi se rezultati mjerenja često zapisuju s određenim brojem znamenaka nakon decimalnoga zareza, kojima se upućuje na granice pogrješke mjerenja. Zapisi 0,050 i 0,05 označavaju isti decimalni broj ukazujući da se radi o različitim mjerenjima.

Faktorijel

U matematici *faktorijel* prirodnog broja n je *umnožak* svih prirodnih brojeva manjih ili jednakih n, tj. za prirodne brojeve vrijedi:

$$1 \cdot 2 \cdot \ \ldots \cdot n = n!$$

Ili

$$\prod_{i=1}^{n} i = n!, \ n \in N.$$

Faktorijel se koristi u kombinatorici, algebri te matematičkoj analizi.

Notaciju $n!$ uveo je Christian Kramp 1808. godine.

Dodatno je definirano:

$$0! = 1$$

Tablica vrijednosti:

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800

Geometrijska sredina

Geometrijska sredina G je statistički pojam koji za neki skup označava n-ti korijen umnoška svih članova skupa. Geometrijska sredina mjera je središnje tendencije, a pretežno se koristi kao mjera prosječne brzine nekih promjena.

U matematičkoj notaciji za skup nenegativnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ geometrijska sredina je

$$G = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{1/n}$$

ili

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}, \ za\ svaki\ a_i \in \mathbf{R}_0^+, i \in \mathbf{N}.$$

Grafovi

Teorija grafova je grana diskretne matematike koja se bavi grafovima, vrstom matematičkih objekata jer njima možemo veoma jednostavno modelirati složene probleme.

U matematici i računarstvu teorija grafova proučava matematičke strukture (grafove) kojima predstavlja odnose između dva elementa određenog skupa.

Teorija grafova počinje od Eulerovog rješenja problema königsberških mostova 1735. godine. Bilo je i bitnih rezultata s grafovima i u 19. stoljeću.

Graf je u gruboj definiciji skup objekata: *vrhova, točaka* ili *čvorova.* Povezuju ih veze *bridovi* odnosno *crte (linije).*

Uz dani skup objekata - vrhova i drugi skup objekata - bridova, definicija grafa je odnos između tih skupova: *svaki brid spaja par vrhova.* Grafove se prikazuju crtanjem točaka za svaki vrh i povlačenjem luka između dvaju vrhova, ako ih povezuje brid.

Kod *usmjerenog grafa*, smjer se navodi crtanjem strijelice. Svakom se bridu može pridružiti realan broj. Tada je graf proširen težinskom funkcijom i to je *težinski graf.* Npr. kada graf predstavlja mrežu cesta, težinska funkcija je npr. duljina svake ceste.

Riječ *graf* ušla je u široku uporabu tek 1936. godine kad je Dénes König objavio monografiju *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Ta se godina uzima kao trenutak osnutka teorije grafova kao samostalne matematičke discipline. 1950-ih teorija dobiva na zamahu i procvatu kad su se razvile komunikacijske, biheviorističke znanosti i tehnologija.

Teorija grafova ima široke primjene u različitim disciplinama te njome razmatramo strukture kojima možemo modelirati mnogo problema iz svakodnevnice. Mnogo se primjenjuje na području računalnih mreža, npr. na područjima algoritma usmjeravanja, traženja puteva kroz mrežu te opisivanju topologije mreže.

Korijen $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ i $\sqrt[n]{x}$

n-ti *korijen* danog realnog broja x (*aritmetički korijen*) je broj koji pomnožen sam sa sobom n puta daje x. Takav se i zapisuje kao $\sqrt[n]{x}$.

Računska operacija kojom nalazimo korijen od nekog broja naziva se *korjenovanje.*

Dakle, primjerice, neka je $y = \sqrt[n]{x}$.

Tada vrijedi i:

$y^n = x$

$y = x^{\frac{1}{n}}$

$\log_y x = n$.

U izrazu $\sqrt[n]{a}$ prirodni broj n se naziva *eksponent* ili *stupanj korijena*, a broj a naziva se *radikand* (lat. *radix* znači korijen).

Najčešće se koristi *kvadratni (drugi) korijen*, koji se obično zapisuje bez eksponenta ($\sqrt[2]{7} = \sqrt{7}$).

Također se često koristi i *kubni (treći) korijen.*

Na skupu realnih brojeva, korijeni s parnim eksponentom (drugi, četvrti, šesti itd.) realni su samo za nulu i pozitivne brojeve. Kod negativnih brojeva određivanje parnog korijena zahtijeva uvođenje imaginarne jedinice i kompleksnih brojeva.

Harmonijska sredina

Harmonijska sredina (znak H) je *srednja vrijednost* koja je recipročna vrijednost *aritmetičke sredine* recipročnih vrijednosti zadanih pozitivnih realnih vrijednosti, za n vrijednosti: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dobiva se prema formuli:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Harmonijska sredina primjenjuje se kad je veličina kojoj se određuje prosječna vrijednost obrnuto razmjerna veličini kojom se određuje prosječna vrijednost, npr. kad se prosječna produktivnost određuje utrošenim vremenom za izradu nekog proizvoda.

Mjerna jedinica harmonijske sredine jednaka je mjernoj jedinici varijable za koju se određuje.

Kombinatorika

Kombinatorika (njem. Kombinatorik, prema kasnolat. combinatio: združivanje), grana matematike koja se bavi problemima rasporeda, svrstavanja i prebrojavanja tj. prebrojavanjem elemenata konačnih skupova i načina da se ti elementi poredaju.

U takvim se problemima prirodno nameću dva pitanja: je li problem uopće rješiv i, ako jest, na koliko načina. U mnogim je problemima egzistencija bar jednoga rješenja trivijalna i interes leži u broju načina (problemi prebrojavanja).

Metode kombinatorike koriste se u elementarnoj *teoriji vjerojatnosti*, a dio kombinatorike našao je primjenu i u *teoriji igara* i *linearnom matematičkom programiranju* (minimalni i maksimalni izbori). Kombinatorici je bliska i *teorija grafova*.

Kompleksije (prema lat. complexio: sveza; zaključak), različiti su načini udruživanja elemenata u kombinatorici.

Varijacije od n elemenata po k (k-toga razreda od n elemenata) kompleksije su koje se razlikuju po elementima ili njihovu rasporedu. Npr. varijacije od triju elemenata a, b, c po 2 su ab, ac, bc, ba, ca, cb. Broj je svih varijacija od n različitih elemenata po k:

$$V_n(k) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutacije od n elemenata kompleksije su koje se međusobno razlikuju samo po rasporedu elemenata. Npr., permutacije od triju elemenata a, b, c su $abc, bca, cab, cba, bac, acb$. Broj je svih permutacija od n različitih elemenata:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n! = V_n^{(n)}.$$

Ako među n elemenata ima jednakih (a se ponavlja α puta, b β puta itd.), onda je broj permutacija

$$P_n = \frac{n!}{\alpha!\beta!\dots}.$$

Kombinacije n elemenata po k (kombinacije k-toga razreda od n elemenata) kompleksije su koje se međusobno razlikuju samo po elementima. Npr. kombinacije triju elemenata a, b, c po 2 su ab, ac, bc. Broj je svih kombinacija od n različitih elemenata po k:

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{P_k} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Za kombinacije vrijedi $C_n^{(k)} = C_n^{(n-k)}, C_n^{(1)} = n, C_n^{(n)} = C_n^{(0)} = 1$.

Binomni koeficijenti u binomnom poučku jednostavno se određuju pomoću Pascalova trokuta ili pomoću formule za izračun broja kombinacija.

Matrica

U matematici je to pravokutna tablica matričnih elemenata, brojeva ili matematičkih objekata, koja sažeto prikazuje informacije o matematičkim sustavima:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Horizontalni niz elemenata u matričnoj tablici naziva se *redak*, a *uspravni* je *stupac*. Matrica je tipa (n, m) kad ima n redaka i m stupaca.

Kvadratna matrica je matrica kojoj je broj redaka jednak broju stupaca, tj. $n = m$.

Redna matrica sadrži samo jedan redak $(1, m)$, a *stupčana matrica* sadrži samo jedan stupac $(n, 1)$. Na primjer:

$$\begin{bmatrix} 8 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Zbrajanje matrica

Samo se matrice istog tipa se mogu zbrajati tako da im se zbrajaju elementi na istim mjestima u matrici.

Množenje matrica

Ulančane matrice se mogu množiti. Množe se elementi redka i stupca i njihovi se umnošci zbrajaju.

Dvije matrice se mogu *množiti* ako su *ulančane*. Tada je broj stupaca prve matrice jednak broju redaka druge matrice. Rezultat je matrica koja ima isti broj redaka prve matrice i broj stupaca druge matrice, tj. za tipove matrica vrijedi $(m, n) \cdot (n, p) = (m, p)$.

Primjer 1. Promotrimo umnožak dviju matrica iz ove knjige (Aktivnost 5. zadatak 5.) str. 28. Matrice su tipa $(4, 4)$ i tipa $(4, 1)$) i ulančane su jer je broj stupaca prve matrice jednak 4, broj redaka druge 4 te nakon množenja dobivamo matricu tipa $(4, 1)$ gdje stupac feferoni, šunka, vege i kobasica ne pripada matrici nego označava vrste pizza kako bismo mogli odgovoriti koje vrijednosti nakon množenja im pripadaju.

$$\begin{array}{r} \text{feferoni} \\ \text{šunka} \\ \text{vege} \\ \text{kobasica} \end{array} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 57 \\ 43 \\ 32 \end{bmatrix}$$

Dakle, vrijednosti su feferoni $= 24$, šunka $= 57$, vege $= 43$ i kobasica $= 32$ zadatka na str. 26.

Primjer 2. Neka je zadana matrica tipa (3,4) koju množimo s ulančanom matricom $(4, 2)$. Dobit ćemo matricu tipa (3,2).

Dakle, prvi element u prvom retku i prvom stupcu u matrici umnoška ovih matrica je
$3 \cdot 8 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 7 = 40$.

Element u prvom retku i drugom stupcu je $3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 7 = 16$.

Element u drugom retku i prvom stupcu je $5 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 7 = 86$.

Element u trećem retku i prvom stupcu je $4 \cdot 8 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 = 82$.

Element u drugom retku i drugom stupcu je $5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 38$.

Element u trećem retku i drugom stupcu je $4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 38$.

Matrica umnoška je

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot 8 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 7 = 40 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 = 16 \\ 5 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 1 \cdot 7 = 86 & 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 38 \\ 4 \cdot 8 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 = 82 & 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 38 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 3 \\ 6 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 16 \\ 86 & 38 \\ 82 & 38 \end{bmatrix}$$

Permutacija

Permutacija je pojam koji se u matematici odnosi na nekoliko različitih značenja u različitim područjima. Za n različitih elemenata, broj njihovih permutacija je

$$n(n-1)(n-2)...1 = n!$$

U teoriji skupova, permutacija nekog skupa S je broj *bijekcija* tog skupa. Ako je S konačni skup s n elemenata, tada je broj njegovih permutacija $n!$.

Koncept niza se razlikuje od koncepta skupa po tome što u skupu nije određen redoslijed elemenata, dok su u nizu točno određeni prvi, drugi, itd. elementi.

Zaokruživanje brojeva

Funkcija INT

Funkcija INT zaokružuje broj na najbliži manji cijeli broj.

Sintaksa INT(number)

Number je realni broj koji želite zaokružiti na cijeli broj.

Primjerice, INT(8,9) zaokružuje 8,9 na niži broj (8), a u slučaju INT(-8,9) zaokružuje -8,9 na niže (-9), tj. vrijedi INT(8,9)=8 i INT(-8,9)=-9.

Danas je funkcija INT(x) funkcija *najveće cijelo* ili $\lfloor x \rfloor$.

Najveće cijelo ili $\lfloor x \rfloor$. Funkcija najveće cijelo od x ili $\lfloor x \rfloor$ (kraće kažemo "pod" od x) svakom realnom broju x pridružuje najveći cijeli broj ne veći od x.

Razlomljeni dio od x ili $\{x\}$

Sada se definirati kao nova funkcija $\{x\}$ koja se zove *razlomljeni dio od* x.

Razlomljeni dio od x ili $\{x\}$ definiramo kao $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$.

U mnogim programskim jezicima ova se funkcija naziva `frac`.

Primjerice, $\lfloor 2,3 \rfloor = 2$ a odavde je $\{2,3\} = 2,3 - 2 = 0,3$.

Funkcija najmanje cijelo ili $\lceil x \rceil$

Ovo je slično funkciji najvećeg cijelog: dok $\lfloor x \rfloor$ zaokružuje na *manje* najmanje cijelo zaokružuje na *veće*.

Najmanje cijelo ili $\lceil x \rceil$ ("strop" od x) je najmanji cijeli broj ne manji od x.

Primjerice, $\lceil 1,2 \rceil = 2$ i $\lceil -1,2 \rceil = -1$.

Funkcija zaokruživanje ili $\langle x \rangle$

Funkcija zaokruživanje definira se kao $\langle x \rangle := \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$. Ovu funkciju još zovemo i *najbliže cijelo* zato što pridružuje realnom broju x njemu najbliži cijeli broj.

Ova funkcija isto je tako česta u programskim jezicima i zove se `round`.

Primjerice, vrijedi $\langle 2,55 \rangle = \lfloor 3,05 \rfloor = 3$ i $\langle -3,45 \rangle = \lfloor -2,95 \rfloor = -3$.

Zbroj prvih n prirodnih brojeva

Zadani su prirodni brojevi $1, 2, 3, \ldots, n$. Zbroje li se ti brojevi dobiva se

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \ n \in N.$$

Ili

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \ n \in N.$$

Djeljitelj d i kvota q Standardni djelitelj d i standardna kvota q se mogu izračunati pomoću

a) i b).

a) Neka su dane sljedeće veličine (oznake):
m = broj mandata,
d = standardni djelitelj,
q = standardna kvota,
q_i = standardna kvota podskupa $i \in \{1, \ldots, n\}$,
B_i = broj stanovnika podskupa $i \in \{1, \ldots, n\}$,
A = ukupni broj stanovnika.

Tada vrijede sljedeće formule za izračunavanje standardnog djelitelja d te standardnih kvota q_i.
b) formule:

$$q_i = \frac{B_i}{d}$$

$$d = \frac{A}{m}$$

$$q_i = \frac{m \cdot B_i}{A}, \; i \in \{1, \ldots, n\}$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} B_i$$

Literatura

1. Adams, J. Q. (1876): *The Memoirs of John Quincy Adams*, ur. C. F. Adams, J. B. Lipponcott & Co., Philadelphia
2. Balinski, M. L., Young, H. P. (1975): *The Quota Method of Apportionment*, The American Mathematical Monthly, Vol. 8, No. 7. (Aug. - Sep., 1975), pp. 701-730
3. Bliss, G. A., Brown, E. W., Eisenhart, L. P., Pearl R. (In House 1929): *Report to the President of the National Academy of Sciences*, Congressional Record, 70th Congress, 2nd Session (1929), 70: 4966-4967
4. Bliss, G. A., Brown, E. W., Eisenhart, L. P., Pearl R. (In House 1940): *Apportionment of Representatives Hearings*, Committee of the Census, 76th Congress, 3rd Session
5. Bluman, A. G. (2005): *Mathematics in Our World*, Publisher McGraw-Hill New York, NY
6. Brams, S. J., Fishburn, P. C. (1988): *Approval Voting*, Publisher Springer New York, NY
7. Colbert, B. (2021): *The Voting Booth*, Disney Hyperion, Los Angeles, New York
8. Čular, G. (2023): *Jesu li biračima važnije stranke ili kandidati? Učinci preferencijskog glasovanja u Hrvatskoj*, Anali hrvatskog politološkog društva, 20 (2023), 1; 9-37. doi: 10.20901/an.20.11
9. Eatwell, J., Muray, J. E., Newman, P. (2018): *The New Palgrave Dictionary of Economics* , Palgrave Macmillan, London
10. Garfunkel, S., Goldbold, L., Pollak, H. (1998): *Mathematics: Modeling Our World*, course 1, W. H. Freeman and Company, New York
11. Gusić, I. (1995): *Matematički rječnik*, Element, Zagreb
12. Hoffman, P. (1988): *Archimedes' Revenge: The Joys and Perils of Mathematics*, Fawcett
13. Igaly, G., Antonić, N., Goldstein, P., Gusić, I., Huzak, M., Matas Ivanković, I., Milin-Šipuš, Ž., Runjaić, S., Škoda, Z. (2015): *Hrvatsko matematičko nazivlje*, Institut za hrvatski jezik i jezikoslovlje, Zagreb
14. Jefferson, T. (1904): *Opinion on the Bill Apportioning Representation*, ed. Paul Leicester Ford, G. P. Putnam's Sons, London, pp.463-464,
15. Kasapović, M. (2003): *Izborni leksikon*, Politička kultura, Zagreb
16. Marošević, T. (2024): *Matematički aspekti izbornih sustava*, Fakultet primijenjene matematike i informatike, Osijek
17. Nielsen, L. J., de Villiers, M. (1997): *Is Democracy Fair?*, Key Curriculum Press, Berkeley
18. Pólya, G. (1966): *Kako riješiti zadatak*, Školska knjiga, Zagreb
19. Pólya, G. (2003): *Matematičko otkriće*, HMD, Zagreb
20. Smith, K. J. (2004): *The Nature of Problem Solving in Algebra*, Thompson - Books/Cole, Belmont
21. Vujović, Z. (2018): *Učinci personalizacije izbornih sustava na političke stranke: sustavi stranačkih lista s preferencijskim glasovanjem*, doktorski rad, Fakultet političkih znanosti, Zagreb
22. Webster, D. (1903): *The Writings and Speeches Daniel Webster*, Nacional Edition, Little, Brown & Co., Boston
23. Weisstein, E. W. (2009): *The CRC encyclopedia of mathematics*, vol. I - III, 3rd ed., Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton
24. Živko, P. (2023): *Mješoviti izborni sustavi*, diplomski rad, Fakultet primijenjene matematike i informatike, Osijek
25. *** URL: `https://www.enciklopedija.hr`, mrežno izdanje, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. - 2024., pristupljeno 29.8.2024.
26. *** URL: `https://hrcak.srce.hr/file/3143` `Najveće cijelo` $\lfloor x \rfloor$ `i njegovi prijelji`, Tadić T.
27. *** URL: `https://www.enciklopedija.hr/clanak/decimalni-broj`, Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. - 2024., pristupljeno 29.8.2024.
28. *** URL: `https://www.enciklopedija.hr/clanak/matrica`, Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2013. - 2024., pristupljeno 29.8.2024.
29. *** URL: `https://www.mathematics-democracy-institute.org/`

Kazalo

V

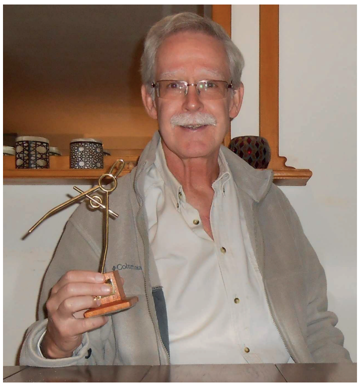
W

Z

Ž

Kazalo imena

Bilješka o autorima



Michael de Villiers diplomirao je B.Sc and HDE godine 1977. i 1978. na University of Stellenbosch. Nakon što je predavao matematiku i prirodoslovlje u Karasburg (Namibia) i Diamantveld (Kimberley), radio je kao istraživač od 1983. do 1990. na Research Unit for Mathematics Education (RUMEUS) na University of Stellenbosch (US).

Za to vrijeme završio je B.Ed (UOFS), M.Ed. (US) and D.Ed. (US), a godinu dana proveo je na odmoru na Cornell University, USA, na stipendijama Rotary Foundation i Harry Crossley .

Od 1991. bio je na University of Durban-Westville, a od 2004. dio University of KwaZulu-Natal (UKZN).

Krajem siječnja 2016. povukao se iz UKZN, ali je imenovan za počasnog profesora matematičkog obrazovanja na University of Stellenbosch.

Objavio je već 9 knjiga i preko 200 recenziranih članaka. U Hrvatskoj mu je objavljen prijevod knjige Dokazivanje i dokazi u nastavi matematike pomoću Sketchpada i drugi tekstovi.

Godine 2019. sudjelovao je na Znanstveno-stručnom skupu s međunarodnim sudjelovanjem: Van Hieleova teorija u matematičkom obrazovanju (Van Hiele Theory in Mathematical Education) u Zadru u okviru projekta Van Hiele Hrvatska 2019. - 2020. koji je organiziralo

Sveučilište u Zadru, Odjel za izobrazbu učitelja i odgojitelja a suorganizator je bio HUNI, Hrvatska udruga nastavnika istraživača.

Između 1988. i 1997. bio je urednik Pythagoras, istraživačkog časopisa Association of Mathematics Education of South Africa (AMESA), a od 1997.-2016. bio je potpredsjednik SA Mathematics Olympiad, a još uvijek služi kao sazivač Odbora za seniorske olimpijade.

Redoviti je predavač na lokalnim i međunarodnim konferencijama o matematici i matematičkom obrazovanju, a pozvan je i kao glavni plenarni predavač na kongresima u Španjolskoj, Hrvatskoj, Portugalu, Taiwanu.

Njegov glavni istraživački interes su Geometry, Mathematical Proof, Applications and Modeling, Problem Solving, Problem-Centered Learning & Teaching i History and Philosophy of Mathematics.

* * * * *

Leslie Nielsen bila je učiteljica matematike i edukatorica učitelja matematike u nekoliko država i Danskoj.
Leslie je diplomirala na koledžu Swarthmore i stekla doktorat iz matematičkog obrazovanja na Sveučilištu Washington.
Trenutno živi u državi Washington gdje je 8 godina bila regionalna koordinatorica za matematiku za regiju Puget Sound.
Sada je direktorica odjela za učenje i poučavanje u Magma Mathu kako bi poduprla nastavnike u usmjeravanju razmišljanja učenika u raspravi u učionici.

Nielsen možete pronaći na Linked Inu: `https://www.linkedin.com/in/leslie-nielsen-phd-82760b10/`.

* * * * *

Nikol Radović rođena je 1963. godine u Sisku. Diplomirala je na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, na smjeru Geometrija i topologija.
Godine 1997. magistrirala je na istome odsjeku s temom Reed-Müllerovi kodovi. Radi kao viša predavačica na Katedri za matematiku i fiziku Zavoda za geometriju Geodetskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.
Područje autoričina znanstvenog i stručnog interesa je primjena matematike u drugim znanostima (kemija, kristolografija, fizika, geodezija i geomagnetizam). U razdoblju od 1992. do 2000. godine surađuje unutar projekta Ministarstva znanosti Studij separacije i analize, te strukture i svojstava materijala (1992. – 1996.) br 1 - 07 071 i Separacija, struktura i sustav metalnih materijala (1997. – 2000.), br. 124003, volonterski, na matematičkoj obradi podataka. Rezultat toga je velik broj objavljenih znanstvenih i stručnih radova u domaćim i stranim časopisima, kao i sudjelovanja na znanstvenim i stručnim skupovima.

Koautorica je udžbenika iz matematike za osnovnu školu (od 5. do 8. razreda) i knjiga Nacrtna geometrija: Perspektiva - Mongeov postupak - Aksonometrija te Komparativna geometrija - poučavanje s uporabom pribora i Geometrija prirode (2017. godine na hrvatskom i engleskom jeziku).

Aktivno sudjeluje u aktivnostima Nastavne sekcije Hrvatskog matematičkog društva u organiziranju i provedbi metodičkih radionica za učenike i nastavnike na popularizaciji matematike kao i primjeni tehnolgije u nastavi matematike te u nizu projekata, primjerice Matematika uz pomoć računala i računalnog programa Sketchpad (2007. – 2010.) u organizaciji Hrvatskog matematičkog društva i CARNET-a kao jedan od koordinatora.

Sudjeluje u projektima Geopotencijal i geodinamika Jadrana (Geo ++Adria) (od 2007.), Joint Croatian - Hungarian Geomagnetic Repeat Station Survey and Joint Geomagnetic Field Model (od 2009.), Dynamic Number u organizaciji National Science Foundation, U.S.A. i KCP Tehnologies (od lipnja 2010.), IPAQ Peta - projekt V. gimnazije i PMF-a u Zagrebu u okviru Further development and implementation of the Croatian Qualifications Framework (od lipnja 2013. do veljače 2015.) te Matematičkim znanstvenim izazovima na Večerima matematike u organizaciji HMD-a (od lipnja 2013.), od rujna 2021. sudjeluje u projektu Matematički edukator.

Sudjelovala je na 13. International Conference Education, Research & Development s radom Space visualization during Covid-19 koja se održavala od 25. - 28. kolovoza 2022. u Burgasu, Bulgaria (Bugarska).

Zajedno s kolegom Petrom Mladinićem sudjelovala je na znanstvenoj konferenciji 5. dani obrazovnih znanosti u sesiji Kako poticati dobrobit u odgojno-obrazovnom okružju u izazovnim vremenima? s radom Procjena koncepta funkcije prema van Hiele-u učenika osnovnih i srednjih škola koja se održala u Zagrebu od 19. - 20. listopada 2022.

Sudjelovala je na 14. International Conference Education, Research & Development s radom The Investigation of the Concept of Function according to van Hiele's Levels koja se održavala od 23. - 26. kolovoza 2023. u Burgasu, Bulgaria (Bugarska).

Zajedno s kolegom Petrom Mladinićem objavila je časopisu Symmetry: Cultureand Science članke: - Neoplasticism is Mathematics, Vol. 34, No. 3, 281 - 316 (2023) - The power of mathematics - visualizing biological changes, Vol. 34, No. 4, 381 - 406 (2023)

Sudjelovala je na 15. International Conference Education, Research & Development s radom Airplane flight or spherical geometry in action koja se održavala od 21. - 24. kolovoza 2024. u Burgasu, Bulgaria (Bugarska).

Sudjelovala je na Međunarodnoj znanstvenoj i umjetničkoj konferenciji Teaching (Today for) Tomorrow Bridging the Gap between the Class room and Realityu sesiji The importance of art education for the cognitive, social an demotional development of children and youths radom Mathematics in neoplasticism, neoplasticism in mathematics koja se održavala od 26. - 27. rujna 2024. u Zagrebu, Hrvatska.

Zajedno s kolegom Petrom Mladinićem sudjelovala je na znanstvenoj konferenciji 6. dani obrazovnih znanosti - Budućnost obrazovanja: novi pravci u istraživanjima i praksi u sesiji Učenje i poučavanje matematike s radom Vežite pojaseve, polijećemo! Ili sferna geometrija na djelu koja se održala u Zagrebu od 16. - 18. listopada 2024.

* * * * *

Petar Mladinić rođen je 1950. godine u Zagrebu, gdje je diplomirao matematiku na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.

Njegov rad ima dugotrajan učinak na poboljšanje odgojne i obrazovne prakse. Kao voditelj Nastavne sekcije Hrvatskoga matematičkog društva pridonosio je razvoju profesionalnih potreba učitelja/nastavnika, učenika i studenata u formalnome i neformalnom svakidašnjem i cjeloživotnom učenju i poučavanju. Organizirao je više od 150 predavanja, mnogobrojne radionice, pokrenuo Ljetnu školu Ruđera Boškovića te Ljetnu školu V. gimnazije i HMD-a.

Za profesionalne potrebe učitelja, učenika i studenata utemeljio je četiri matematička časopisa: Poučak, Matka, Playmath i math.e te inicirao izdavanja knjiga u sklopu Male matematičke biblioteke, Matkine biblioteke i Biblioteke HUNI.

Napisao je stotinjak stručnih članaka, knjiga, gimnazijskih i drugih udžbenika, potaknuo prijevode i preveo nekoliko knjiga te organizirao na desetke radionica za nastavnike i učenike.

Koautor je sljedećih knjiga: udžbenika iz matematike za 2. razred gimnazija, Nacrtna geometrija: Perspektiva - Mongeov postupak - Aksonometrija, Komparativna geometrija - poučavanje s uporabom pribora i Geometrija prirode (2017. godine na hrvatskom i engleskom jeziku).

Posebice se ističu dvije knjige matematičkih zadataka u stripu: Zgode i mozgalice družbe Matkači (2002.) i Čudesni svijet Matke (2018.) koje je realizirao s dvoje vrhunskih umjetnika i strip crtača Zrinkom Ostović iz Senja i Ninoslavom Kuncom iz Zagreba

Njegovim i imenom kolegice Gusić nazvan je poučak iz elementarne geometrije.

Theorem of Gusic & Mladinic:
A quadrilateral is tangential if and only if the incircles of the two triangles formed by a diagonal

are tangential to each other.
This theorem is named after two Croatian colleagues, Jelena Gusic and Petar Mladinic (2001), who as far as I've been able to ascertain, have priority in first publishing the result in 2001 in a journal Poučak. Later publications by Worrall (2004) and Josefsson (2011) also mention and prove the theorem. - napisano je časopisu *Learning and Teaching Mathematics, No. 29, 2020, pp. 39-45*

Pridonio je razvoju sustava obrazovanja u matematičkom području kao član Vijeća za nacionalni kurikulum i član Radne skupine za izradu Nacionalnoga okvirnog kurikuluma za matematiku.

Godine 2011. prijavio je i vodio projekt V. gimnazije IPAQ Peta – afirmativna nastava i inovativno poučavanje u gimnazijama u okviru HKO koji je realiziran s timovima četiriju gimnazija – iz Vukovara, Pakraca, Knina i Metkovića – te Prirodoslovno-matematičkim fakultetom iz Zagreba, uz sudjelovanje 1 200 učenika i 1 000 nastavnika.

Osmislio je i organizirao projekt dvogodišnjih okupljanja učitelja i nastavnika matematike (susreti i kongresi nastavnika matematike) na kojima su izlagali hrvatski nastavnici, kao i najugledniji strani stručnjaci iz područja nastave matematike.

Utemeljio je hrvatski ogranak T^3 (Teacher Teaching Technology).

Utemeljio je i više godina vodio Geometrijske radionice HMD-a.

Kao nastavnik, a posebno kao ravnatelj V. gimnazije, bio je aktivno uključen u zajednicu, osnažujući demokratske procese, toleranciju i solidarnost među mladim ljudima i njihovim roditeljima.

Utemeljio je 2018. godine udrugu Hrvatska udruga nastavnika istraživača HUNI (`www.huni.hr`).

Realizirao je projekt 2019.-2020. van Hieleove razine matematičkih postignuća u RH (zajedničko akcijsko djelovanje nastavnika i učenika) u kojem su sudjelovale škole: I. gimnazija iz Osijeka, XV. gimnazija iz Zagreba, XII. gimnazija iz Zagreba, III. gimnazija iz Splita, Gimnazija Franje Petrića iz Zadra, Gimnazija A. Mohorovičića iz Rijeke, Gimnazija Vukovar, Tehnička škola R. Boškovića, Vinkovci, Gimnazija M.A. Reljkovića iz Vinkovaca, Gimnazija Metković, Gimnazija Pula, Osnovna škola F. K. Frankopana iz Osijeka, Osnovna škola M. Gubeca iz Zagreba, Osnovna škola Skalice iz Splita, Osnovna škola Mejaši iz Splita, Osnovna škola S. Budinića iz Zadra, Osnovna škola Vidikovac iz Pule sa svojim nastavnicima i 1200 učenika.

Godine 2019. organizirao je Znanstveno-stručni skup s međunarodnim sudjelovanjem: *Van Hieleova teorija u matematičkom obrazovanju (Van Hiele Theory in Mathematical Education)* na Sveučilištu u Zadru.

Realizirao je projekt (2021.-2022. godina) *Matematički edukator za osnovne i srednje škole* kao što realizira *Matematički edukator za osnovne i srednje škole 2021.-2026.* U projektu je 100-tinjak hrvatskih škola s 300-tinjak nastavnika i više tisuća učenika.

U slobodnom vremenu bavio se i suđenjem rukometnih utakmica. Prvi je hrvatski međunarodni sudac koji je međunarodnu licencu postigao za Lijepu Našu. Od 1993. do 1999. godine bio je član tzv. elitne liste sudaca IHF-a (International handball federation). Sudio je utakmice na Olimpijadi u Atlanti, na 4 svjetska prvenstva, 3 europska, 2 azijska i na mediteranskim igrama. Sudio je završnu utakmicu japanskog prvenstva, kao i tuniskog. Također je sudio 7 završnih utakmica europskih kupova, utakmice na dva svjetska kupa te prvi europski super kup. Na obilježavanju 100 godina športa u Austriji sudio je utakmicu između ženskih reprezentacija Austrije i Svijeta. Ukupno je sudio na više od 250 međunarodnih utakmica.

Odlikovan je Spomenicom Domovinskog rata 1990.–1992., odličjem Reda hrvatskog pletera i dobitnik je Državne nagrade Ivan Filipović za godinu 2015.

* * * * *