

ISTRAŽIVANJE KONUSNIH PRESJEKA POMOĆU SKETCHPADA



DANIEL SCHER V  
**ISTRAŽIVANJE**

KONUSNIH  
PRESJEKA  
POMOĆU  
**SKETCHPADA**



Naslov originala:

Daniel Scher:  
Istraživanje konusnih presjeka pomoću Sketchpada

Glavni urednik: Petar Mladinić

Urednici: Petar Mladinić & Nikol Radović

Prevoditelji: Nikol Radović & Petar Mladinić

Recenzenti: Željka Šipuš Milin & Jelena Gusić & Sanja Antoliš & Snježana Lukač & Zoran Crljenica  
& Dražena Potočki

Lektorica: Ivana Babić

Korektor: Petar Bonačić

Hrvatska udruga nastavnika istraživača (HUNI), Zagreb

Nakladnik: Hrvatska udruga nastavnika istraživača, Zagreb, 2025.

Ova se knjiga smije umnažati, preslikavati, printati i  
uporabljivati u nastavi, bez pismenog dopuštenja nakladnika.

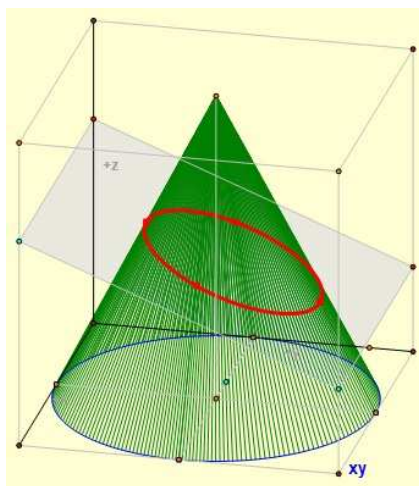
ISBN 978-953-49726-5-6 (PDF) online

[www.huni.hr/nastava-matematike/](http://www.huni.hr/nastava-matematike/)

Slog i prijelom:  $\overset{\heartsuit}{P}ierreM$

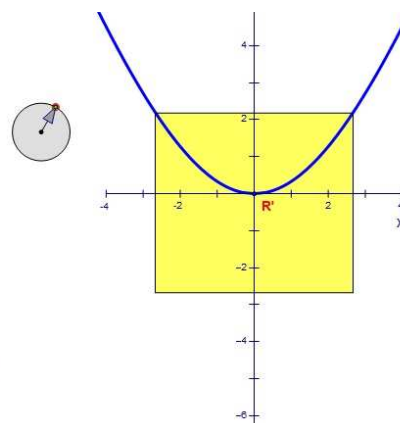
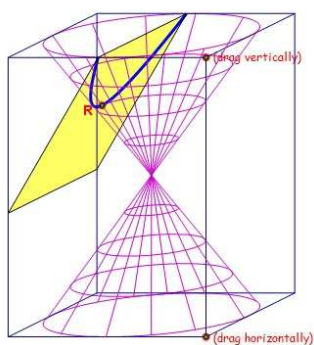
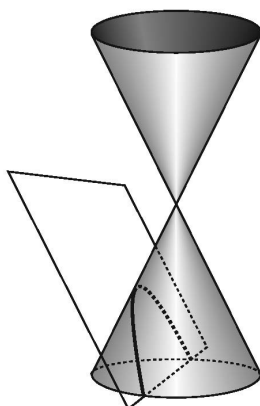
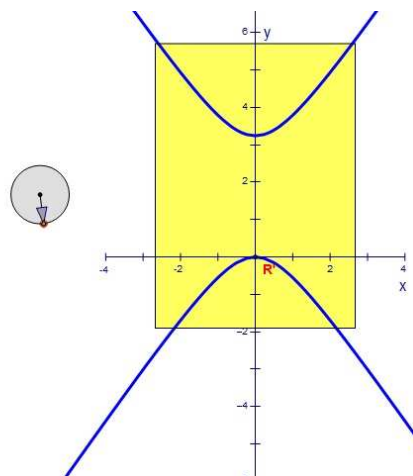
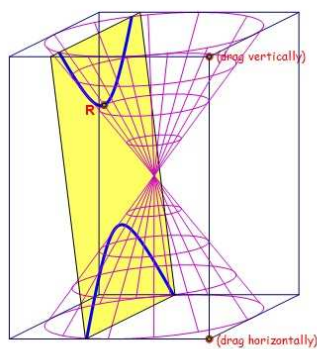
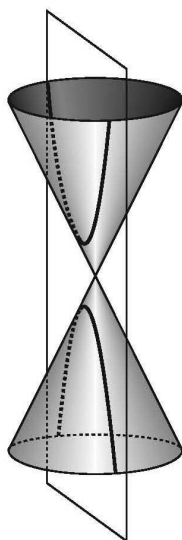
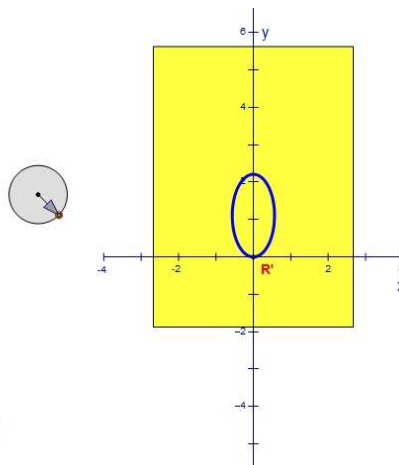
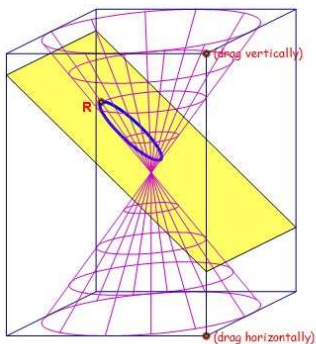
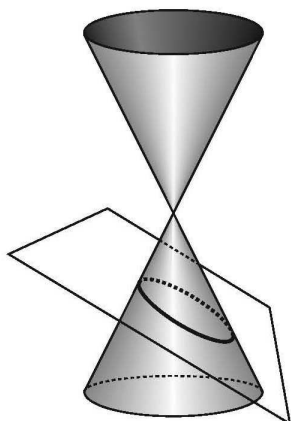
Dizajn naslovnice:  
Iva Risek

# Istraživanje konusnih presjeka pomoću SKETCHPADA



Daniel Scher

HUNI  
Zagreb, 2025.





## Riječ, dvije školnicima i ...

Sadržaj i količina vremena rada u razredu:

| sadržaj i naziv                        | engleska satnica | hrvatska satnica |
|----------------------------------------|------------------|------------------|
|                                        | minute           | minute           |
| Kada kružnica nije kružnica?           | 10               | 10               |
| Konstrukcija pribadačama i konopcem    | 40 - 50          | 35               |
| Konstrukcija koncentričnih kružnica    | 50 60            | 45               |
| Konstrukcija presavijene kružnice      | 70 - 80          | 60               |
| Konstrukcija sukladnih trokuta         | 30 40            | 40               |
| Stolarska konstrukcija                 | 70 - 80          | 45               |
| Dannyjeva elipsa                       | 60 - 70          | 45               |
| Uvod u parabolu                        | 60 - 70          | 45               |
| Konstrukcija presavijenog pravokutnika | 70 - 80          | 45               |
| Konstrukcija kružnice koja se širi     | 40 - 70          | 45               |
| Uvod u hiperbolu                       | 30 - 40          | 45               |
| Konstrukcija koncentričnih kružnica    | 50 - 60          | 45               |
| Problem gorućeg šatora                 | 70 - 80          | 45               |
| Problem bazena                         | 50 - 60          | 45               |

U knjizi Davida Segena iz **1898.** godine: *Geometrija za više razrede srednjih učilišta*, koju je izdala Kraljevska Hrvatsko-Slavonska zemaljska vlada u Zagrebu, a koja je bila službeni udžbenik u Hrvatskoj u dijelu Analitička geometrija (str. 272. - 339.) u trećem i četvrtom poglavlju je naznačeno sljedeće.

### III. O kružnici

73. Jednadžba kružnice

74. Zadaće o kružnici

### IV. O sjekotinama čuna

75. Elipsa

76. Hiperbola

- 77. Parabola
- 78. Zajedničko promatranje elipse, hiperbole i parabole
- 79. Pravac i krivulja
- 80. Tangente i normale krivuljâ
- 81. Zadaće o tangentama i normalama

Godine 2025. iz kurikula srednjih škola su izbačene konike, a u gimnazijskom kurikulu su ostale konike samo ako u trećem razredu učenici imaju 4 i više sati nastave matematike.

Nakon 130 godina poučavanja konika hrvatsko školstvo je šutke odustalo od ovog vrlo važnog matematičkog sadržaja.

Ova knjiga nudi nastavnicima i učenicima suvremeni pristup konikama pomoću uporabe softvera Sketchpad.

[nikol.radovic@geof.unizg.hr](mailto:nikol.radovic@geof.unizg.hr)

[petar.mladinic1@zg.ht.hr](mailto:petar.mladinic1@zg.ht.hr)

## Lista Sketchpadovih dokumenata

Svi dokumenti (sketchevi) Sketchpada za *Istraživanje konusnih presjeka s Geometer's Sketchpadom* dostupni su za preuzimanje na mreži.

- <https://sketchpad.keycurriculum.com/KeyModules/index.html>
- Prijavite se pomoću svog Key Online računa ili stvorite novi račun i prijavite se.
- Unesite ovaj pristupni kod: ECSHS633
- Pojavit će se gumb Preuzmite datoteke. Kliknite za preuzimanje komprimirane (.zip) mape svih sketcha za ovu knjigu.

Mapa za preuzimanje sadrži sve sketcheve koje su vam potrebne za ovu knjigu, organizirane po poglavljima i aktivnostima. Za otvaranje sketcheva potreban je softver [Geometer's Sketchpad verzija 5](#) tj. datoteke ili crteži mogu se otvoriti ako ste u programu, za razliku od doc ili pdf datoteka koje se mogu otvoriti klikanjem na samu datoteku.

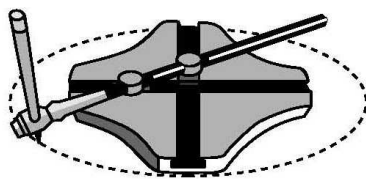
Preuzmite datoteke za Geometer' Sketchpad (**englesku verziju**) na:

<https://dynamicmathematicslearning.com/free-download-sketchpad.html>

Za hrvatske potrebe možete skinuti lokaliziranu **hrvatsku verziju** Sketchpada

[GSP 5.03HR](#) na adresi [www.huni.hr/sketchpad/](http://www.huni.hr/sketchpad/) u 2. redu mape [Sketchpad](#) pod nazivom: [Sketchpad aplikacija na hrvatskom jeziku](#).

Gsp datoteke pod nazivom [Materijali uz knjigu](#) na hrvatskom su jeziku i sastavni su dio ove knjige (i prijevod su engleskih gsp datoteka) nalaze se na [www.huni.hr/knjige/](http://www.huni.hr/knjige/) u mapi **KNJIGE**.



## Uvod

Na početku priznanje: Kao studentu, konike nisu bile na mom popisu omiljenih srednjoškolskih tema.

Standardni udžbenički prikazi elipse, parabole i hiperbole činili su se neinspirativnim. Postojale su neuredne algebarske jednačbe s višestrukim kvadratnim korijenima. Bilo je puno terminologije. Crtanje konike značilo je crtanje nekoliko točaka na milimetarskom papiru i njihovo povezivanje u "klimavu" krivulju.

Konike nisu bile tema mojih razmišljanja sve do trenutka upoznavanja Davida Denisa, tadašnjeg kolegu studenta matematičkog obrazovanja na Sveučilištu Cornell.

David se živo zanimao za podrijetlo uređaja za crtanje krivulja. Jedna povijesna osoba ga je posebno zaintrigirala: Frans van Schooten (1615.-1660.), nizozemski matematičar čiji su prijevod i komentar Descartesove značajne rasprave, *La Géométrie*, doveli do popularizacije Kartezijeve geometrije.

Descartesova knjiga bila je dostupna u knjižarama, ali van Schootenovo djelo, *Exercitationum Mathematicorum, Liber IV, Organica Conicarum Sectionum in Plano Descriptione* (Traktat o uređajima za crtanje konika)<sup>1</sup>, ostalo je skriveno u zbirkama rijetkih knjiga. Srećom, Cornellova Krochova knjižnica imala je primjerak. David je sam otišao u knjižnicu pogledati taj primjerak.

Kad se vratio iz knjižnice, David je jedva suzdržavao svoj entuzijazam. "Idi i sam se uvjeri.", rekao je. "To je stvarno nešto."

Moj posjet knjižnici potvrdio je Davidova otkrića. U van Schootenovoj knjizi nalazili su se crteži uređaja pomoću koji je moguće nacrtati konike. Ilustracije su bile izvrsne, s umjetničkim ukrasima koji su krasili mnoge od njih.

Promatranje van Schootenovih uređaja za crtanje krivulja raspršilo je svaku ideju da su matematičke manipulacije moderni izum. Van Schooten nas je sve preduhitrio prije više od 350 godina.



An illustration from the title page of van Schooten's book

Dok sam prelistavao van Schootenovu knjigu, pitao sam se mogu li njegove ideje

---

<sup>1</sup>Besplatna online verzija van Schootenove knjige dostupna je na web stranici European Cultural Heritage Online i na Universitätsbibliothek der Humboldt-Universität zu Berlin.

pronaći put u današnje učionice matematike. Njegovi modeli, sastoje se od šarki i ravnala s prorezima, nisu uvijek bili jednostavni za izradu. Kako bi ih učenici mogli ponoviti?

Veliki broj odgovora dobiven je primjenom Sketchpada.

Iako ništa ne može zamijeniti iskustvo rada s fizičkim modelom, simulacije modelirane u Sketchpadu su vrlo blizu toga. Zapravo, Sketchpad u nekim aspektima nadmašuje van Schootena, omogućavajući učenicima da mijenjanjem parametara u bilo kojem od modela odmah vide učinak na krivulju.

Sve aktivnosti ove knjige ne potječu od van Schootenovog uređaja, ali svima je zajedničko da je postupak "izrade" (crtanja) krivulje jednako važan kao i sama krivulja.

## Prilagođavanje aktivnosti

Na početku svakog poglavlja dane su smjernice ili upute o tome što je cilj, gdje se primjenjuje, koraci ...

Ako vas ne zanima izrada fizičkih uređaja, prijedite na odgovarajuće Sketchpadove modele. Oni se mogu izraditi od početka ili otvoriti unaprijed pripremljene modele što je opisano na stranici iv. Ako želite razumjeti zašto različiti uređaji za crtanje krivulja funkcioniraju, možete slijediti savjete ili sami precrtati kako biste stvorili originalan dokaz. Možete dovršiti cijeli odjeljak aktivnosti s elipsom ili odabrati skup međusobno povezanih aktivnosti koje obuhvaćaju sve tri konike.

Bilo koji od ovih izbora mogao bi biti razuman izbor za vaše potrebe.

Konike čine središnji dio ove knjige, ali nisu jedina matematika koja se proučava. Pitanja sukladnosti, sličnosti, Pitagorinog poučka, trigonometrije i geometrijske optimizacije prirodno se javljaju tijekom proučavanja elipse, parabole i hiperbole.

Ova knjiga predstavlja spoj manipulacija 17. stoljeća s tehnologijom 21. stoljeća. Uživajte u partnerstvu.

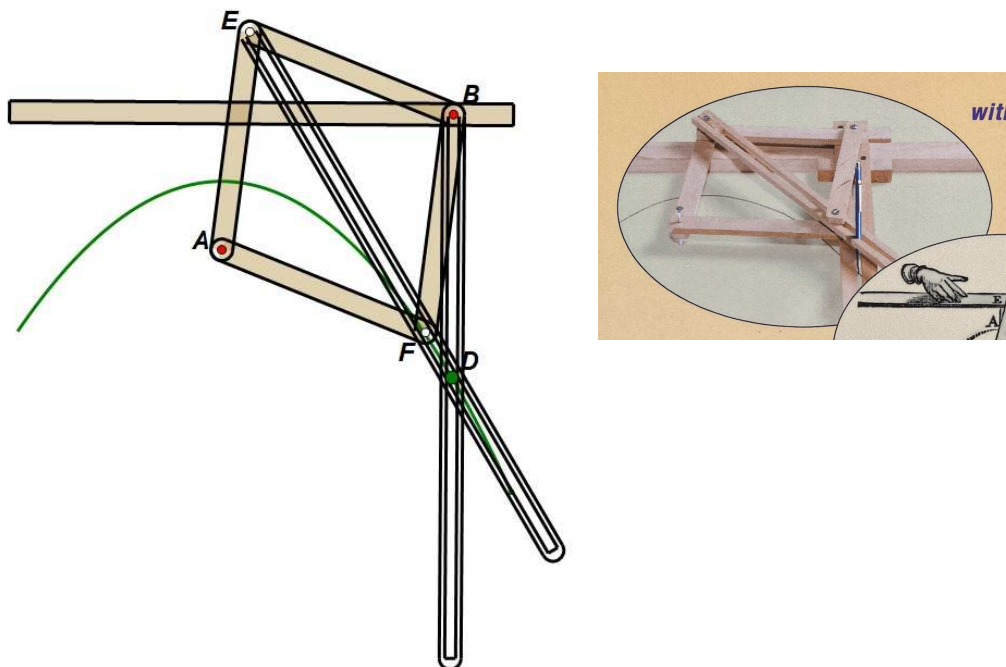
## Zahvale

Iz prethodnog uvoda jasno je da ova knjiga ne bi postojala bez Davida Dennisa. Njegov entuzijazam i poznavanje područja neizmjereno su doprinijeli sadržaju ove knjige.

Al Cuoco i E. Paul Goldenberg iz Education Development Center, Inc. (Centra za razvoj obrazovanja) imali su pametnu ideju koristiti elipse za geometrijsko rješavanje optimizacijskih problema. Optimizacijski materijal u ovoj knjizi crpi se iz njihovog poglavlja "Dynamic Geometry as a Bridge from Euclidean Geometry to Analysis" ("Dinamička geometrija kao most od euklidske geometrije do analize") u knjizi *Geometry Turned On (Geometrija uključena)*, Mathematical Association of America, 1997.

Nick Jackiw predložio je nekoliko sketcheva u ovoj knjizi.

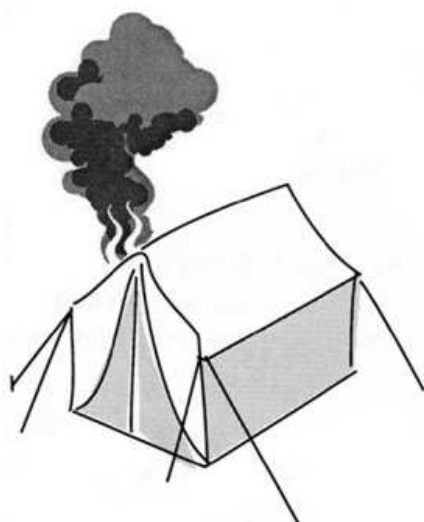
Datoteka **Romb.gsp** je i temelj uređaja koji je Nick Jackiw izgradio za crtanje parabole. Prikazani su na slici.



Bill Finzer bio je moj urednik za prvo izdanje ove knjige. Njegovo stručno vodstvo postavilo je temelje za ovo revidirano i prošireno izdanje. Kao moj novi urednik Steven Chanan pronašao je načine da usmjeri materijal o konikama u novim smjerovima. Ovo je puno bolja knjiga zbog njegovog truda.

Despina Stylianou i Beth Porter dale su vrijedne povratne informacije o početnom nacrtu ovih materijala.

Na kraju, zahvaljujem svojim studentima poslijediplomskog studija Sveučilišta u New Yorku na pomoći u testiranju ovih aktivnosti.



## Naredbe Sketchpada i prečaci

U nastavku su navedene neke uobičajene radnje Sketchpada korištene u ovoj knjizi. S vremenom će vam ove operacije postati poznate, ali isprva ćete možda htjeti imati ovaj popis pri ruci.

### Za izradu novog sketcha

Odaberite Novi sketch u izborniku Datoteka.

### Za zatvaranje sketcha

Odaberite Zatvorite u izborniku Datoteka. Ili kliknite u okvir za zatvaranje u gornjem desnom (Windows) kutu sketcha.

### Za poništavanje ili ponavljanje nedavne radnje

Odaberite Poništite u izborniku Uređivanje. Možete poništiti onoliko koraka koliko želite, sve do stanja u kojem je vaš sketch bio prilikom zadnjeg otvaranja. Za ponavljanje odaberite Ponovite u izborniku Uređivanje.

### Za poništavanje odabira svega

Kliknite na bilo koje prazno područje sketcha alatom sa strjelicom ili pritisnite Esc dok se odabir objekata ne poništi. Učinite to prije odabira potrebnih za naredbu kako ne bi bili uključeni dodatni objekti. Da biste poništili odabir jednog objekta, a pritom zadržali sve ostale objekte odabranima, kliknite na njega alatom sa strjelicom.

### Za prikaz ili skrivanje oznake

Postavite prst iz Alata za tekst iznad objekta i kliknite. Prst će pocrniti kada je ispravno postavljen za prikaz ili skrivanje oznake.

### Za promjenu oznake

Postavite prst iz Alata za tekst iznad oznake i dvaput kliknite. Slovo "A" će se pojaviti u ruci kada je ispravno postavljena.

### Za promjenu širine ili boje objekta

Odaberite objekt i odaberite odgovarajući podizbornik u izborniku Zaslon.

### Za skrivanje objekta

Odaberite objekt i odaberite Sakrijte u izborniku Zaslon.

### Za konstruiranje polovišta dužine

Odaberite dužinu i odaberite Polovište u izborniku Konstrukcije.

### Za konstruiranje usporednog pravca

Odaberite ravni objekt kojem će novi pravac biti usporedan i točku kroz koju će prolaziti. Zatim odaberite Paralela u izborniku Konstrukcije.

### Za konstruiranje okomitog pravca

Odaberite ravni objekt kojem će novi pravac biti okomit i točku kroz koju će prolaziti. Zatim odaberite Okomica u izborniku Konstrukcije.

### Za zrcaliti točku (ili drugi objekt)

Dvaput kliknite na bilo koji ravni objekt ili ga odaberite i odaberite Zrcalite. Zatim

odaberite točku (ili drugi objekt) i odaberite Zrcalite u izborniku Transformacije.

### Za trasiranje objekta

Odaberite objekt i odaberite Trag u izborniku Zaslon. Učinite isto da biste isključili trasiranje. (Ako želite da tragovi blijede, označite Izbljeđivanje tragova vremenski na ploči Boja u Uređivanje u Postavke.)

### Za korištenje kalkulatora

Odaberite Računalo u izborniku Broj. Da biste unijeli mjeru u računalo, kliknite na samu mjeru u sketchu.

### Prečaci na tipkovnici

| Naredba                   | Prečac |
|---------------------------|--------|
| Poništi                   | Ctrl+Z |
| Ponovi                    | Ctrl+R |
| Odaberi sve Svojstva      | Ctrl+A |
| Sakrijte objekte          | Alt+?  |
| Prikažite/Sakrijte oznake | Ctrl+K |
| Tragovi objekata          | Ctrl+T |
| Brisanje tragova          | Ctrl+B |

| Naredba               | Prečac  |
|-----------------------|---------|
| Animirajte/Pauzirajte | Ctrl+   |
| Povećajte brzinu      | Ctrl+ ] |
| Smanjite brzinu       | Ctrl+ [ |
| Polovište             | Alt+M   |
| Presjek               | Ctrl+I  |
| Segment               | Ctrl+L  |
| Unutarnjost poligona  | Ctrl+P  |
| Izračunati            | Ctrl+ = |

| Akcija                                                                                  | Prečac                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| Povlačenje pomicanja                                                                    | Alt+drag                                                         |
| Prikaz kontekstnog izbornika                                                            | right-click                                                      |
| Navigacija Alatnim okvirom                                                              | Shift+arrow keys                                                 |
| Odaberite strjelicu, poništite odabir objekata, zaustavite animacije, izbrišite tragove | Esc (escape key)                                                 |
| premjesti odabrane objekte za 1 piksel                                                  | ←, ↑, →, ↓ keys<br>(držite pritisnuto za kontinuirano pomicanje) |

# Sadržaj

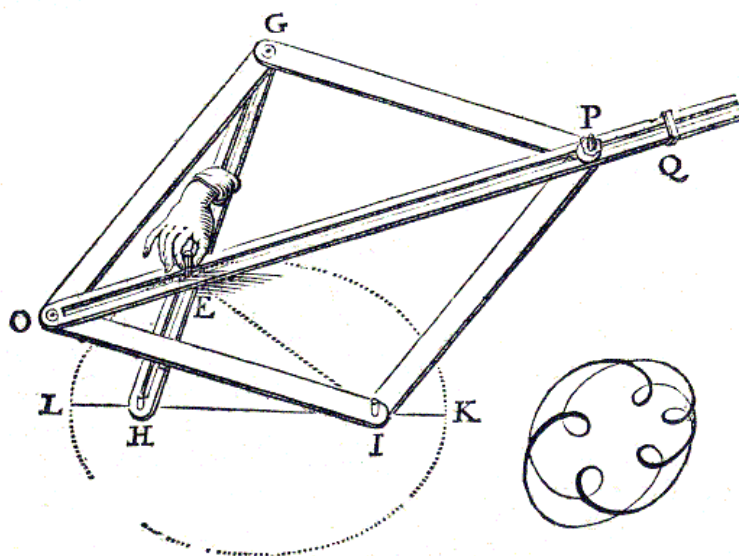
|                                                  |      |
|--------------------------------------------------|------|
| Riječ, dvije . . . . .                           | iii  |
| Lista Sketchpadovih dokumenata . . . . .         | v    |
| Uvod . . . . .                                   | vii  |
| Prilagođavanje aktivnosti . . . . .              | viii |
| Zahvale . . . . .                                | viii |
| Uobičajene naredbe i prečaci . . . . .           | xi   |
| 1. Elipsa . . . . .                              | 3    |
| Pregled poglavlja . . . . .                      | 5    |
| Početak: Kada kružnica nije kružnica? . . . . .  | 7    |
| Konstrukcije s pribadačama i konopcem . . . . .  | 8    |
| Konstrukcije koncentričnih kružnica . . . . .    | 10   |
| Neki odnosi elipse . . . . .                     | 13   |
| Konstrukcija presavijene kružnice . . . . .      | 15   |
| Konstrukcija sukladnih trokuta . . . . .         | 19   |
| Stolarska konstrukcija . . . . .                 | 21   |
| Dannyjeva elipsa . . . . .                       | 27   |
| Projekti elipse . . . . .                        | 30   |
| 2. Parabola . . . . .                            | 33   |
| Pregled poglavlja . . . . .                      | 35   |
| Uvod u parabolu . . . . .                        | 36   |
| Konstrukcije presavijenog pravokutnika . . . . . | 40   |
| Konstrukcije kružnice koja se širi . . . . .     | 44   |
| Projekti parabole . . . . .                      | 47   |
| 3. Hiperbola . . . . .                           | 49   |
| Pregled poglavlja . . . . .                      | 51   |
| Uvod u hiperbolu . . . . .                       | 52   |
| Konstrukcija koncentričnim kružnicama . . . . .  | 54   |
| Projekti s hiperbolom . . . . .                  | 57   |
| 4. Optimizacija . . . . .                        | 59   |
| Pregled poglavlja . . . . .                      | 61   |
| Problem gorućeg šatora . . . . .                 | 62   |
| Problem s bazenom . . . . .                      | 65   |
| Optimizacijski projekt . . . . .                 | 68   |

---

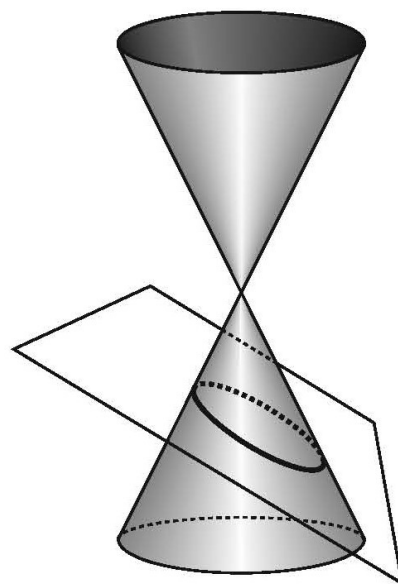
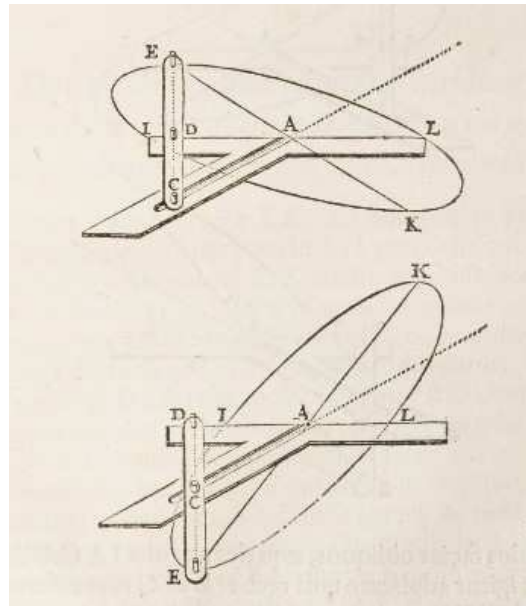
|                                                     |               |
|-----------------------------------------------------|---------------|
| <b>Bilješke o aktivnostima</b> .....                | <b>69</b>     |
| Poglavlje 1.: Elipsa . . . . .                      | 69            |
| Poglavlje 2.: Parabola . . . . .                    | 78            |
| Poglavlje 3.: Hiperbola . . . . .                   | 81            |
| Poglavlje 4.: Optimizacija . . . . .                | 83            |
| <br><b>Dodatak: popis pratećih dokumenata</b> ..... | <br><b>89</b> |
| <br><b>Literatura</b> .....                         | <br><b>93</b> |
| <br><b>Bilješka o autoru</b> .....                  | <br><b>95</b> |



# 1. Elipsa

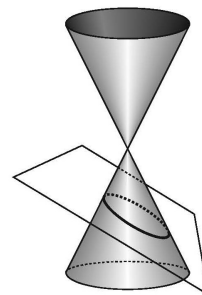


Izvornik crteža je knjiga iz 1656. godine  
Frans van Shooten: *Exercitationum Mathematicorum, Liber IV,*  
*Organica Conicarum Sectionum in Plano Descriptione*  
(Traktat o uređajima za crtanje konika)



## Pregled poglavlja

Od svih konusnih presjeka, elipsa je najčešća. Bilo koja kružnica, gledan pod kutom neke veličine (manji od pravoga), izgleda eliptično. Nagnite čašu i voda duž površine ocrtava elipsu. Postavite loptu na pod i usmjerite pod kutom snop svjetlosti na nju odozgo - lopta će bacati eliptičnu sjenu na pod. Prerežite stožac pod kutom s jedne strane na drugu (siječe konturne izvodnice stošca, kao što je prikazano na slici). Presjek je elipsa. (To objašnjava zašto se elipsa kvalificira kao konusni presjek.) Orbite planeta prate elipse. Kometi u stalnoj orbiti oko Sunca slijede eliptične putanje. Kada ravnina siječe samo jedan od dva stošca koji čine dvostruki stožac, rezultat je kružnica ili elipsa. Ako je rez okomit na os dvostrukog konusa, rezultat je kružnica; inače je to elipsa.



*Kada ravnina siječe samo jedan od dva stošca koji tvore dvostruki stožac, rezultat je kružnica ili elipsa. Ako je rez okomit na os dvostrukog stošca, rezultat je kružnica; inače je to elipsa.*

Materijal u ovom poglavlju mogu se podijeliti u tri opće kategorije:

- Aktivnosti I.-IV. uvode osnovnu terminologiju elipse (žarišne točke, glavne i sporedne osi, ekscentričnost) i uobičajene tehnike konstrukcije elipse (na papiru i pomoću Sketchpada).
- Aktivnosti V. i VI. prikazuju ili daju dvije manje poznate konstrukcije koje se pozivaju na klasičnu definiciju elipsa za svoje dokaze.
- Konstrukcije u aktivnostima VII. i VIII. ističu algebarske dokaze.

Ukupno je u ovom poglavlju dano je trinaest različitih konstrukcija elipse koje možete isprobati u samostalnom crtanju. Otvorite sketch **Ellipse Tour.gsp** za pregled.

### I. Početak rada: Kada kružnica nije kružnica?

Upoznajte se s elipsama dok se središte kružnice u Sketchpadovom modelu dijeli na dvije točke, dva žarišta. Započnite svoja istraživanja elipse ovdje.

### II. Konstrukcije s pribadačama i konopcem

Zamahnite konopcem (doslovno!) da biste nacrtali elipsu. Zatim upotrijebite Sketchpadov model za formuliranje klasične definicije elipse.

### III. Konstrukcija elipse koncentričnim kružnicama

Dvije koncentrične kružnice su temelj ili osnova konstrukcije elipse primjenom Sketchpada.

### IV. Neki odnosi elipse

Istražite unaprijed izgrađeni Sketchpadov model kako biste otkrili algebarske i geometrijske odnose između glavne osi elipse, sporedne osi, žarišne duljine i ekscentričnosti.

### V. Konstrukcija presavijenim kružnicama

Promatrajte nastanak elipse presavijanjem i rasklapanjem papira u obliku kruga. Modelirajte postupak pomoću Sketchpada kako biste otkrili temeljnu matematiku.

### VI. Konstrukcija sukladnih trokuta

Par sukladnih trokuta su temelj ili osnova ove neobične konstrukcije elipse pomoću Sketchpada.

### VII. Stolarska konstrukcija

Zasučite rukave dok gradite stolarski elipsograf s ravnom, a zatim sa Sketchpadom.

### VIII. Dannyjeva elipsa

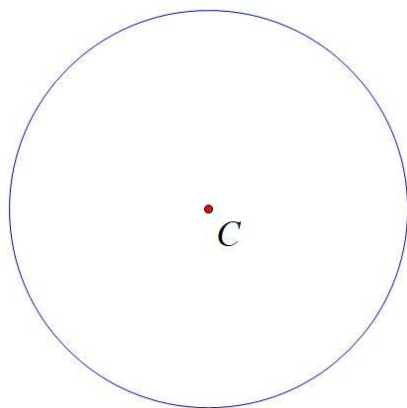
Srednjoškolac Danny Vizcaino znao je da mora postojati bolji način za konstrukciju elipse pomoću Sketchpada. Bio je u pravu. Pročitajte sve o tome!

### IX. Projekti elipse

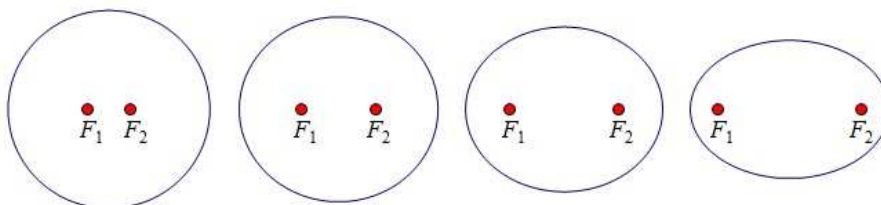
Zaokružite poglavlje s nekoliko primamljivih izleta elipsom.

### Početak: Kada kružnica nije kružnica?

Na slici je kružnica sa središtem u točki  $C$ .



Zamislite da se središte kružnice razdvoji na dvije točke,  $F_1$  i  $F_2$ . Udaljavanjem točaka  $F_1$  i  $F_2$  kružnica se deformira kako bi prilagodila ova dva središta. Kružnica postaje elipsa. Kružnica je sada elipsa.



Točke  $F_1$  i  $F_2$  imaju posebna imena. Zovu se žarišta ili fokusi (jednina: fokus) elipse. Otvorite sketch **Rastezanje.gsp** u mapi **Elipsa - aktivnosti**. Vidjet ćete kružnicu ... ili je to možda? Pomičite središte kružnice i promatrajte što se događa.

Kružnice crtamo pomoću šestara. Ali kako možemo crtati elipse?

Aktivnost s pribadačama i konopcem koja slijedi nudi jednu mogućnost.

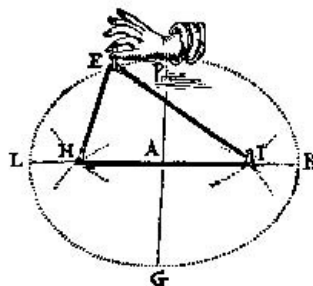


## Konstrukcije s pribadačama i konopcem Ime(na): \_\_\_\_\_

Elipsu je moguće konstruirati/nacrtati na različite načine, ali možda najpoznatija metoda uključuje samo dvije pribadače i komad konopca. Primjenom ovih materijala ručno ćete nacrtati elipsu. U sljedećoj aktivnosti modelirat ćete slični postupak pomoću Sketchpada.

### Izrada fizičkog modela

**Potreban materijal:** Trebat će vam komad konopca, dvije pribadače, ploča od pluta, veliki list papira i olovka.



1. Na ploču od pluta stavite papir i učvrstite ga dvjema pribadačama. Zatim zavežite svaki kraj konopca na pribadaču.

Odaberite bilo koja mjesta za pribadače, ali pazite da ostavite malo labavosti u konopcu. Pribadače će biti žarišne točke elipse.

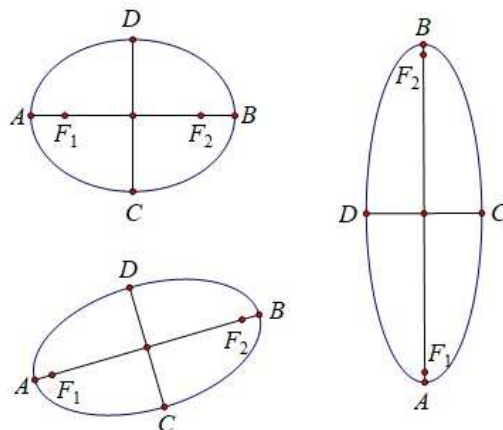
Iz *Sive de Organica Conicarum Sectionum in Plano Descriptione, Tractatus* nizozemskog matematičara Fransa van Schootena, 1646.

2. Zategnite konopac olovkom. Pazite da konopac bude blizu vrha olovke.
3. Držeći konac zategnutim, olovka ostavlja trag, crta oko žarišnih točaka, puštajući da vrh olovke označava njezin put. Možda ćete morati promijeniti položaj olovke kako biste nacrtali cijelu krivulju.

### Pitanja

- P1** Koje simetrije vidite na nacrtanoj elipsi? Nacrtajte sliku kako biste ilustrirali sve osi simetrije.
- P2** Pomaknite krajeve konopca tako da su udaljeni jedan od drugoga. Ponovno nacrtajte elipsu i usporedite njezin oblik s oblikom vaše izvorne krivulje.
- P3** Približite krajeve konopca. Ponovno nacrtajte elipsu i usporedite njezin oblik s oblikom vaše izvorne krivulje.
- P4** Pretpostavimo da pomaknete krajeve konca toliko daleko jedan od drugoga da je konac potpuno ispružen i zategnut. Koju će "krivulju" nacrtati vaša olovka?
- P5** Pretpostavimo da oba kraja konca pričvrstite na istu pribadaču. Koju će krivulju nacrtati vaša olovka?
- P6** Pretpostavimo da prijatelj želi nacrtati elipsu identičnu vašoj. Koje dvije informacije biste trebali dati da bi ih mogao reproducirati?

**P7** Sa svakom elipsom povezana su dva važna elementa: glavna os i sporedna os. U svakoj od sljedećih ilustracija, dužina  $AB$  je glavna os, dužina  $CD$  je sporedna os, a  $F_1$  i  $F_2$  su žarišne točke.



Na temelju ovih slika napišite svoju definiciju glavne i sporedne osi.

**P8** Gledajući ove slike napišite svoju definiciju glavne i sporedne osi elipse izrezane iz papira?

### Otkrijte varalicu

Otvorite sketch **Točke.gsp** u mapi **Elipsa - aktivnosti**. Vidjet ćete dva žarišta,  $F_1$  i  $F_2$ , nevidljive elipse i tri točke,  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Elipsa prolazi kroz točno dvije od ove tri točke. Koje? Koristite Sketchpadove alate za mjerenje i izračun kako biste otkrili varalicu.



**P9** Koja točka ne leži na elipsi? Objasnite kako to možete utvrditi.

**P10** Dovršite ovu rečenicu bez spominjanja pribadača ili užeta:

Elipsa je skup točaka  $P$  takav da je sljedeća vrijednost konstantna za sve položaje točke  $P$ : \_\_\_\_\_

### Istražite više

1. Otvorite sketch **Parametarske elipse.gsp** (mapa **Elipsa - aktivnosti**) da biste vidjeli elipse konstruirane pomoću Sketchpadovog parametarskog bojanja.
2. Evo definicije nove krivulje slične elipsi:

Skup točaka  $P$  takvih da je  $PA+PB+PC$  konstantan za tri fiksne točke,  $A$ ,  $B$  i  $C$ .

Otvorite sketch **Nova krivulja.gsp** (mapa **Elipsa - aktivnosti**) da biste vidjeli kako se takva krivulja može konstruirati pomoću Sketchpadove parametarske značajke bojanja.



## Konstrukcije koncentričnih kružnica

Ime(na): \_\_\_\_\_

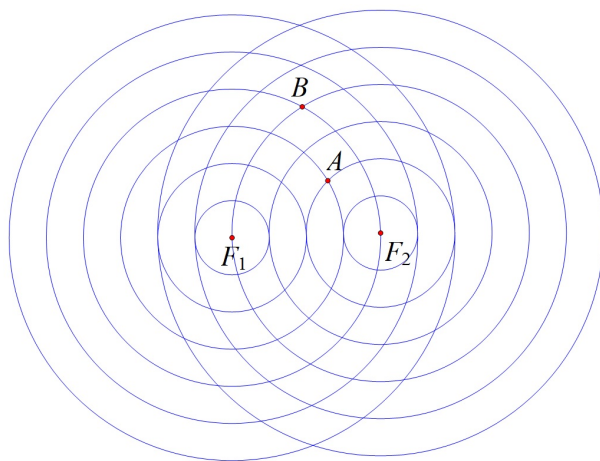
Kružnice koje su koncentrične imaju isto središte. U ovoj aktivnosti koristit ćete dva skupa koncentričnih kružnica za ručno (klasično) crtanje elipse. Zatim ćete prenijeti opisani postupak u Sketchpad kako biste nacrtali elipsu čiji se oblik i veličina mogu prilagoditi jednostavnim pomicanjem točaka.

## Crtanje elipsâ ručno

Na slici su prikazana dva skupa koncentričnih kružnica. Jedan skup kružnica je sa središtem u točki  $F_1$ , a drugi u točki  $F_2$ . Za svaki skup, polumjeri kružnica povećavaju se za 1, od 1 jedinice sve do 6 jedinica.

Točke  $F_1$  i  $F_2$  su žarišta beskonačnog broja elipsâ, ali nas zanimaju samo dvije: ona koja sadrže točku  $A$ , odnosno točku  $B$ .

- P1** Koliko su jedinica udaljene točke  $A$  i  $F_1$ ? Koliko su jedinica udaljene točke  $A$  i  $F_2$ ? Kolika je numerička vrijednost  $AF_1 + AF_2$ ?
- P2** Pronađite i označite barem sedam točaka koje se nalaze na elipsi<sup>1</sup> točkom  $A$ . Objasnite kako ste ih pronašli.
- P3** Pronađite i označite barem sedam novih točaka točkom  $B$ : (Točke označite drugom bojom). (Koristite kemijsku olovku druge boje ako je moguće.) Objasnite kako ste nacrtali.
- P4** Koristeći točke koje ste pronašli kao smjernice, nacrtajte dvije elipse.

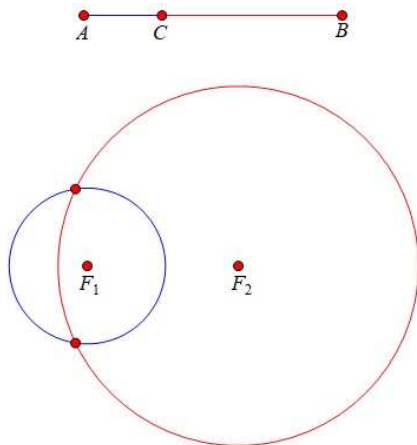


<sup>1</sup>Zapamtite: Elipsa je skup točaka  $P$  takvih da je  $PF_1 + PF_2$  konstantan.

## Konstrukcija modela pomoću Sketchpada

Sada kada ste ručno nacrtali nekoliko elipsa, vrijeme je da konstruirate dinamičku: elipsu koja mijenja oblik kako se pomiču zadani elementi.

Slijedite navedene korake za konstrukciju elipse pomoću Sketchpada. Dok crtate, razmislite o tome kako se ova metoda razlikuje u odnosu na metodu koncentričnih kružnica.



1. Nacrtajte vodoravni pravac blizu vrha zaslona. Sakrijte kontrolne točke odabirom **Sakrijte točke** u izborniku **Zaslon**.
2. Konstruirajte točke  $A$ ,  $B$  i  $C$  na pravcu. Položaj tih točaka nije važan, ali provjerite je li točka  $C$  između točaka  $A$  i  $B$ .
3. Sakrijte pravac. Nacrtajte pojedinačne dužine  $\overline{AC}$  i  $\overline{CB}$ .
4. Nacrtajte točke  $F_1$  i  $F_2$  koje će biti žarišta elipse.
5. Pomoću naredbe **Kružnica: središte+polumjer** iz izbornika **Konstrukcije**, konstruirajte kružnicu sa središtem  $F_1$  i polumjerom  $AC$ . Konstruirajte drugu kružnicu sa središtem  $F_2$  i polumjerom  $CB$ .
6. Konstruirajte točke presjeka kružnica. (U slučaju da se kružnice ne sijeku, prilagodite model tako da se sijeku.)
7. Odaberite točke presjeka i odaberite naredbu **Trag presjeka** u izborniku **Zaslon**.
8. Polako pomičite točku  $C$  naprijed-natrag duž  $\overline{AB}$  i promatrajte trag<sup>2</sup> dviju točaka.
9. Promijenite udaljenost između  $F_1$  i  $F_2$ . Zatim, ako je potrebno, odaberite **Izbrišite tragove** u izborniku **Zaslon** da biste izbrisali prethodnu krivulju.

Nacrtajte nekoliko novih krivulja, svaki put mijenjajući udaljenost između žarišta.

<sup>2</sup>Ako ne želite da vam tragovi izblijede, provjerite je li okvir **Izblijeđivanje tragova vremenski** neoznačen na ploči Boja dijaloškog okvira Postavke.

Za svaki novi položaj točaka  $F_1$  i  $F_2$ , morate ponovno nacrtati novu krivulju. Idealno bi bilo da se vaša elipsa automatski prilagođava dok povlačite bilo koje žarište. Moćna naredba **Lokus** iz izbornika Konstrukcije u Sketchpadu to omogućuje.

10. Isključite trag za dvije točke presjeka tako da ih odaberete i ponovno odaberete **Trag presjeka** u izborniku **Zaslon**.
11. Odaberite jednu od dvije točke presjeka i točku  $C$ . Odaberite naredbu **Lokus** iz izbornika **Konstrukcije**. Ponovite to za drugu točku presjeka i točku  $C$ . Nacrtat ćete cijelu krivulju: mjesto dvije točke presjeka dok se točka  $C$  pomiče duž dužine  $AB$ .

Povucite  $F_1$ ,  $F_2$  ili točku  $B$  da biste promijenili veličinu i oblik elipse.

## Pitanja

- P5 Dok pomičete točku  $C$  duž  $AB$ , polumjeri obje kružnice mijenjaju duljine. Ipak, postoji odnos između duljina dvaju polumjera bez obzira na položaj točke  $C$ . Koji je to?
- P6 Objasnite zašto dvije točke presjeka dviju kružnica crtaju elipsu (jer ostavljaju trag).
- P7 Koliko udaljena mogu biti žarišta prije "nestanka" elipse?
- P8 Odaberite dvije kružnice na zaslonu, odaberite **Trag kružnica** u izborniku **Zaslon**, a zatim povucite točku  $C$  duž segmenta  $AB$ .

Na temelju ovog eksperimenta opišite sličnosti između vaše konstrukcije u Sketchpadu i tehnike koncentričnih kružnica.

## Istražite više

1. Smanjivanjem udaljenosti između točaka  $A$  i  $B$  i pomicanjem točke  $C$  lijevo od  $A$  i desno od  $B$  tako da ne leži između njih, moguće je nacrtati drugačiju vrstu krivulje. Isprobajte i i opišite što ste nacrtali.
2. Razmotrite definiciju *pravokutnika konstantnog opsega*:

*Pravokutnik konstantnog opsega* je pravokutnik konstruiran Sketchpadom čije se dimenzije mogu mijenjati, ali čiji opseg uvijek ostaje fiksna zadana, konstantna vrijednost.

To znači da pravokutnik s konstantnim opsegom od 20 jedinica može imati dimenzije od  $(3 \times 7)$  jedinica,  $(6 \times 4)$  jedinice ili  $(2 \times 8)$  jedinica ali ne  $(5 \times 6)$  jedinica.

Primijenite tehnike koje ste naučili prilikom crtanja elipse pomoću Sketchpada za konstrukciju pravokutnika konstantnog opsega.

## Neki odnosi elipse

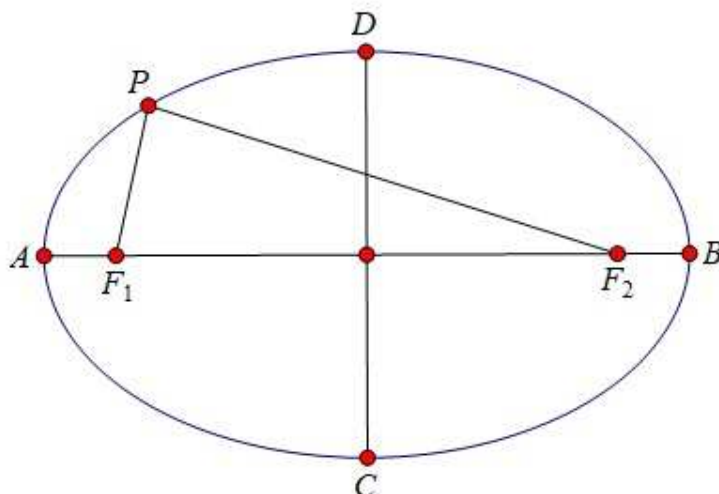
Ime(na): \_\_\_\_\_

U aktivnosti Pribadače i konopac, crtali ste elipse olovkom i zategnutim komadom konopca. Sada ćete koristiti Sketchpad za istraživanje nekih algebarskih i geometrijskih odnosa koji postoje između ovog konopca i glavne i sporedne osi elipse.

## Pronalaženje duljina

Otvorite sketch **Vrpca.gsp** u mapi **Elipsa -aktivnost**. Elipsu je dana s glavnom osi  $AB$ , sporednom osi  $CD$  i žarišnim točkama  $F_1$  i  $F_2$ . Točka  $P$  predstavlja vrh olovke koji zateže konopac pričvršćen za točke  $F_1$  i  $F_2$ . Zajedno, segmenti  $PF_1$  i  $PF_2$  predstavljaju konopac.

Ukupna duljina "konopca" je 20 jedinica ( $PF_1 + PF_2$ ). Udaljenost između  $F_1$  i  $F_2$  je 16 jedinica.



## Pitanja

Odgovorite na ova pitanja (bez ikakvih mjerenja pomoću Sketchpada).

Za svako od pitanja mijenjajte položaj točke  $P$  po elipsi, dok položaj točke  $P$  ne pomogne odgovoru na postavljeno pitanje ili nije odgovor na postavljeno pitanje.

- P1** Kolika je duljina glavne osi  $AB$ ? Objasnite gdje ste postavili točku  $P$  da biste došli do zaključka.
- P2** Kolika je duljina sporedne osi  $CD$ ? Objasnite gdje ste postavili točku  $P$  da biste došli do zaključka.

## Ekscentričnost

Elipse se razlikuju po obliku, tako da su neke "tanke" i izdužene. Druge su "debele" i gotovo kružne. Ekscentričnost elipse je mjera koja određuje oblik elipse izražen s numeričkom vrijednošću.

Ekscentričnost elipse definirana je kao omjer udaljenosti žarišta i duljine velike osi

**Ekscentričnost** elipse definirana je kao:

$$\frac{\text{udaljenost između žarišta}}{\text{udaljenost između krajnjih točaka glavne osi}}$$



1. Otvorite sketch **Ekscentričnost.gsp** u mapi **Elipsa - aktivnosti**. Zadana je elipsa s krajnjim točkama glavne osi  $A$  i  $B$  te žarištima  $F_1$  i  $F_2$ .
2. Upotrijebite naredbu **Udaljenost** iz izbornika Mjerenje u Sketchpadu za mjerenje dviju udaljenosti potrebnih za izračunavanje ekscentričnosti elipse.
3. Upotrijebite naredbu **Udaljenost** iz izbornika Mjerenje u Sketchpadovom **Mjerenju** za izračunavanje ekscentričnosti.

## Pitanja

- P3** Vaša elipsa, nacrtana u Sketchpadu može mijenjati veličinu i oblik i tako predstavljati sve elipse. Prije eksperimentiranja s njom, pokušajte odgovoriti (predvidjeti odgovor): Koliko mala i koliko velika može utjecati na ekscentričnost elipse? Objasnite svoje razmišljanje.
- P4** Pomaknite točku  $B$  da biste promijenili veličinu i oblik elipse. Dok to radite, pratite vrijednosti njezine ekscentričnosti. Je li vaše predviđanje iz **P3** točno? Izmijenite je ako je potrebno.
- P5** Koliko elipsâ može dijeliti istu ekscentričnost? Kako biste mogli nacrtati dvije elipse istog ekscentriciteta bez Sketchpada?

## Istražite više



1. Otvorite<sup>3</sup> drugu stranicu sketcha **Vrpca.gsp**. Zadana je nova elipsa zajedno s duljinom konopca koji je korišten za njezino crtanje. Konstruirajte žarišne točke elipse. Mjerenje nije dopušteno! Provjerite jesu li vaša žarišta dinamična: trebala bi se sama prilagoditi kako biste ostali na pravim mjestima dok mijenjate duljinu niza.
2. Prvi zakon planetarnog gibanja Johannesa Keplera kaže da je orbita svakog planeta elipsa sa Suncem u jednom žarištu. Istražite kako biste pronašli ekscentričnosti naših planeta. Zašto su astronomi prije Keplera vjerovali da se planeti kreću kružno?

<sup>3</sup>Pogledajte **P2** od ranije u aktivnosti za pomoć s ovom konstrukcijom

### Konstrukcija presavijene kružnice

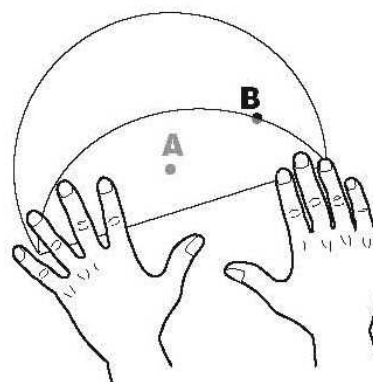
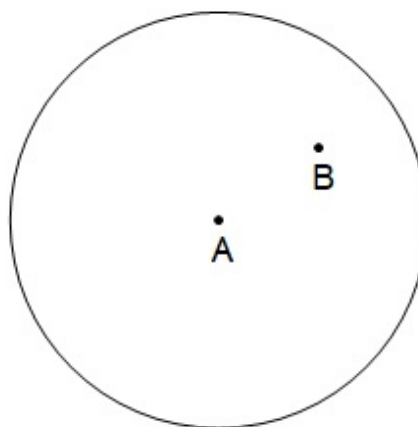
Ime(na): \_\_\_\_\_

Ponekad se konika pojavljuje na najnevjerojatnijim mjestima. U ovoj aktivnosti istražiti ćete konstrukciju presavijanja papira u kojoj pravci pregiba međusobno djeluju na iznenađujući način kako bi formirale koniku.

### Konstruiranje fizičkog modela

**Priprema:** Pomoću šestara nacrtajte kružnicu polumjera od približno 7,5 cm na komadu masnog papira ili papira za pljeskavice. Izrežite kružnicu nožicama. (Ako nemate ove materijale, možete nacrtati kružnicu pomoću Sketchpada i isprinjati je.)

1. Označite točku  $A$  koja je središte kružnice.
2. Označite slučajnu<sup>4</sup> točku  $B$  unutar kruga.
3. Kao što je prikazano dolje desno, preklopite kružnicu tako da točka na njoj (njezin rub) padnu izravno na točku  $B$ . Napravite oštar pregib kako biste zabilježili ovaj pregib. Razvijte kružnicu.
4. Preklopite kružnicu duž novog pregiba tako da druga točka na rubu padne na točku  $B$ . Rasklopite kružnicu i ponovite postupak.
5. Nakon desetak pregiba, pregledajte ih kako biste uočili neke uzorke.
6. Nastavite pregibati kružnicu<sup>5</sup>. Postupno će se pojaviti dobro ocrtana krivulja. Budite strpljivi - može potrajati malo vremena.



7. Razgovarajte o onome što vidite sa svojim učenicima iz razreda i usporedite njihove preklopljene krivulje s vašima. Ako ovu aktivnost radite sami, preklopite drugi krug s točkom  $B$  na drugom mjestu.

<sup>4</sup>Ako radite u razredu, neka učenici postave  $B$  na različite udaljenosti od središta. Ako radite sami, napravite ovaj dio dvaput - jednom s  $B$  blizu središta, drugi put s  $B$  blizu ruba.

<sup>5</sup>Matematičari bi opisali vaš skup pregiba kao **envelopu** pregiba

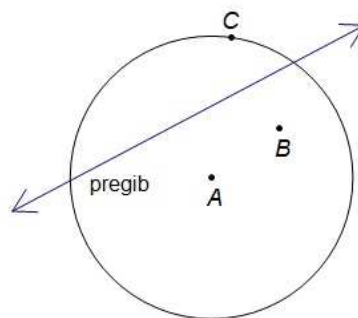
## Pitanja

- P1** Pregibi na vašoj kružnici tvore obris elipse. Koje točke bi bile žarišta?
- P2** Ako biste točku  $B$  pomaknuli bliže rubu kruga i presavili drugu krivulju, kako biste njezin oblik usporedili s prvom krivuljom?
- P3** Ako biste točku  $B$  pomaknuli bliže središtu kruga i presavili drugu krivulju, kako biste njezin oblik usporedili s prvom krivuljom?

## Konstrukcija Sketchpadovog modela

Presavijte i rasklopite. Presavijanje kružnice zahtijeva malo rada. Presavijanje jednog ili dva lista je zabavno, ali što bi se dogodilo ako biste htjeli nastaviti testirati različite položaje točke  $B$  (unutar kružnice)? Morali biste nastaviti postupak svaki puta s novom kružnicom (krugom), presavijajući nove skupove pregiba. Sketchpad može pojednostaviti vaš rad. S jednom kružnicom i jednim skupom pregiba, možete pomicati točku  $B$  na nove položaje i gledati kako se pravci pregiba trenutno prilagođavaju.

8. Otvorite novi sketch. **Alatom za kružnicu** nacrtajte kružnicu sa središtem u točki  $A$ . Sakrijte točku polumjera kružnice.
9. Pomoću **Alata za točku** nacrtajte točku  $B$  na slučajnom mjestu unutar kružnice.
10. Konstruirajte točku  $C$  na kružnici.
11. Konstruirajte "pregib" koji nastaje kada se točka  $C$  preklopi na točku  $B$ .
12. Pomičite točku  $C$  po kružnici. Ako ste ispravno konstruirali pravac pregiba, trebao bi se prilagoditi novim položajima točke  $C$ .
13. Odaberite pravac pregiba i odaberite **Trag okomice** iz izbornika **Zaslon**.
14. Pomičite<sup>6</sup> točku  $C$  po kružnici da biste nacrtali skup pravaca pregiba.
15. Povucite točku  $B$  na drugu lokaciju, a zatim, ako je potrebno, odaberite **Izbrišite tragove** u izborniku **Zaslon**.
16. Pomaknite točku  $C$  po kružnici kako biste stvorili još jednu kolekciju pravaca pregiba.



<sup>6</sup>Ako ne želite da vam tragovi izblijede, provjerite je li okvir Izblijeđivanje tragova vremenski neoznačen na ploči Boja u dijaloškom okviru Postavke.

Ponovno praćenje pregiba za svaki položaj točke  $B$  svakako je brže od presavijanja novih kružnica. Ali možemo i bolje. Idealno bi bilo da se vaši pravci pregiba automatski premještaju dok povlačite točku  $B$ . Sketchpadova moćna naredba **Lokus** iz izbornika Konstrukcije to omogućava.

17. Isključite ostavljanje traga za izvorni pravac pregiba tako što ćete ga odabrati i još jednom odabrati naredbu **Trag okomice** iz izbornika **Zaslon**.
18. Sada odaberite pravac pregiba i točku  $C$ . Odaberite naredbu **Lokus** iz izbornika **Konstrukcije**. Pojavit će se cijeli skup pregiba: lokus položaja pregiba dok se točka  $C$  pomiče duž svoje putanje. Ako pomaknete točku  $B$ , vidjet ćete da se pravci pregiba automatski prilagođavaju.
19. Spremite svoj sketch ili svoje rješenje ili svoju konstrukciju kao **Kružnica pregiba.gsp**. Ponovno ćete ga koristiti u jednoj od aktivnosti **Projekti hiperbole**.



## Pitanja

- P4** Kako se oblik krivulje mijenja pomicanjem točke točku  $B$  bliže rubu kruga, tj. kružnici?
- P5** Kako se oblik krivulje mijenja pomicanjem točke  $B$  bliže središtu kružnice?
- P6** Odaberite točku  $B$  i kružnicu<sup>7</sup>. Zatim sjedinite točku  $B$  s kružnicom. Opišite uzorak pregiba.
- P7** Odaberite točku  $B$  i razjedinite je od kružnice. Zatim je sjedinite sa središtem kružnice. Opišite nastali uzorak pregiba.

## Igranje detektiva

Svaki pravac pregiba na vašoj kružnici dodiruje elipsu u točno jednoj točki. Drugim riječima, svaki pregib je tangenta elipse.

Uključivanjem u detektivski rad možete pronaći te točke dodira i koristiti ih za konstrukciju samo elipse bez njezinih pregiba.

20. Otvorite sketch **Presavijena kružnica.gsp** u mapi **Elipsa - aktivnosti**. Nacrtan je pravac (stil crte - debela) pregiba i njegov lokus.
21. Pomaknite točku  $C$  i primijetite da pravac pregiba ostaje tangenta elipse. Točna točka dodira je presjek dvaju pravaca - pravca pregiba i drugog pravca koji ovdje nije prikazan. Konstruirajte ovaj pravac u svojem sketchu kao i točku dodira, točku  $E$ .



<sup>7</sup>Naredbe **Sjedinite** i **Razjedinite** pojavljuju se u izborniku **Uređivanje**

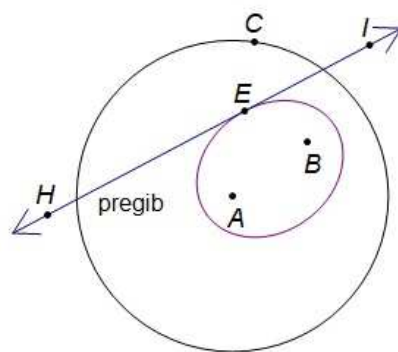
22. Odaberite točku  $E$  i točku  $C$  te odaberite naredbu **Lokus**<sup>8</sup> u izborniku **Konstrukcije**. Ako ste ispravno konstruirali ili odredili ili nacrtali točku dodira, trebali biste vidjeti krivulju koja se pojavljuje točno u bijelom prostoru omeđenom pregibima.

### Kako to dokazati

Konstrukcija presavijene kružnice generira elipse. Možete li to dokazati? Pokušajte sami razviti dokaz ili prođite kroz sljedeće korake i pitanja.

Konstrukcija na slici trebala bi sličiti vašoj konstrukciji.

Pravac  $HI$  (simetrala dužine  $CB$ ) je pregib nastao nastao preklapanjem točaka  $C$  i  $B$ . Točka  $E$  je točka krivulje.



23. Na slici do crtajte dužine  $CB$ ,  $BE$  i  $AC$ .
24. Označite presjek  $\overline{CB}$  s pravcem pregiba kao točku  $D$ .

### Pitanja

- P8 Prisjetite se poučka o sukladnosti trokuta kako biste dokazali da je  $\triangle BED \cong \triangle CED$ .
- P9 Duljina dužine  $BE$  jednaka je nekoj drugoj duljini dužine? Kojoj? Zašto?
- P10 Upotrijebite definiciju<sup>9</sup> elipse i rezultat iz P9 kako biste dokazali da točka  $E$  ostavlja trag crta elipsu.

### Istražite više

- Kada je točka  $B$  unutar svoje kružnice, pregibi ocrtavaju elipsu. Što se događa kada je točka  $B$  izvan svoje kružnice?
- Upotrijebite ilustraciju iz dokaza elipse kako biste pokazali da je  $\angle AEH = \angle BED$ .

Evo zanimljive posljedice ovog rezultata: Zamislite biljarski stol u obliku elipse s rupom u jednoj od njezinih žarišnih točaka. Ako stavite lopticu u drugo žarište i udarite je u bilo kojem smjeru bez rotacije, loptica će se odbiti od stranice i ući ravno u rupu. Zajamčeno!

<sup>8</sup>Odaberite lokus i povećajte njegovu širinu kako bi bio lakše vidljiv.

<sup>9</sup>Zapamtite: Elipsa je skup točaka ravnine takvih da je zbroj udaljenosti od svake točke do dviju fiksnih točaka (žarišta) konstantan.



## Kako to dokazati

Konstrukcija sukladnih trokuta crta elipse, ali možete li objasniti zašto? Pokušajte sami razviti dokaz ili riješite sljedeća pitanja.

## Pitanja

**P4** Docrtajte dužinu  $AF$  na svojem sketchu ili konstrukciju. Koristeći poučak o sukladnosti trokuta, dokažite da je  $\triangle ABF \cong \triangle FCA$ .

**P5** Upotrijebite rezultat iz pitanja P4 i dovršite tvrdnju:

$$\angle FCA = \angle \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

**P6** Upotrijebite gornju jednakost kutova i druge informacije o trokutima kako biste pokazali da je  $\triangle AEB \cong \triangle FEC$ .

**P7** Duljina dužine  $AE^{10}$  jednaka je duljini neke druge dužine. Koje? Zašto?  $AE$  je jednake duljine? Zašto?

**P8** Upotrijebite definiciju udaljenosti elipse i rezultat iz P7 kako biste dokazali da točka  $E$  crta elipsu.

## Istražite više

1. Ova se konstrukcija ponekad naziva *konstrukcijom prekrštenog para paralelograma*. Objasnite zašto.
2. Upotrijebite naredbu **Trag** iz izbornika **Zaslon** za prikaz lokusa točke  $C$  dok je pomičete. Opišite sve sličnosti koje možete pronaći između ovog sketcha i **Konstrukcija presavijene kružnice**.
3.  Otvorite sketch **Zupčanici.gsp** u mapi **Elipsa - aktivnosti** za rad s parom eliptičnih zupčanika.
4. Počevši s praznim<sup>11</sup> sketchom, nacrtajte vlastiti Sketchpadov model Konstrukcije sukladnih trokuta.

<sup>10</sup>Zapamtite: Elipsa je skup točaka kojima je zbroj udaljenosti od svake točke do dviju fiksnih točaka (žarišta) konstantan.

<sup>11</sup>Morat ćete često koristiti Sketchpadovu naredbu **Kružnica: središte+polumjer**.

### Stolarska konstrukcija

Uređaj prikazan desno, omiljen među stolarima i drvodjelicima, naziva se *elipsograf* ili *šestar za elipse*.

Elipsograf<sup>12</sup> ima krak s dva vijka koji klize duž para okomitih tračnica. Dok vijci klize duž svojih odgovarajućih žljebova, olovka pričvršćena na jednom kraju crta elipsu.

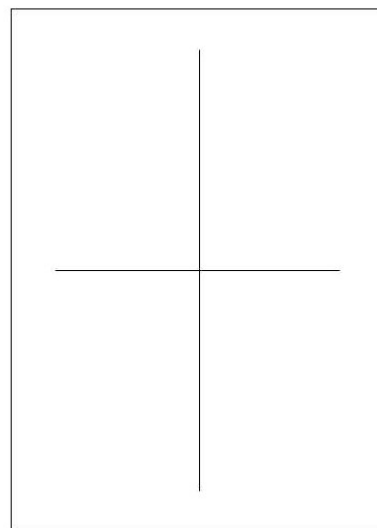
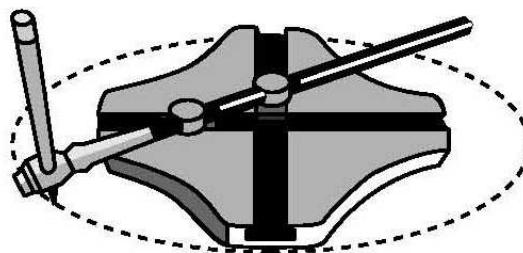
U ovoj aktivnosti izgradit ćete vlastiti elipsograf pomoću ravnala, a zatim istražiti veći model pomoću Sketchpada. Na kraju ćete dokazati da ovaj uređaj doista crta elipse.

### Izrada fizičkog modela

**Potreban materijal:** Trebat će vam ravnalo, malo ljepljive trake, olovka ili kemijska olovka i veliki komad papira (28 cm x 45 cm je dobro, ali i 21,5 cm x 28 cm funkcionira).

1. Stavite<sup>13</sup> dugu traku ljepljive trake na ravnalo, poravnavajući rub trake s rubom ravnala. Na traci označite tri točke *A*, *B* i *C*. Pazite da udaljenost između točaka *A* i *C* bude manja od polovice širine papira.
2. Pomoću ravnala nacrtajte<sup>14</sup> par okomitih pravaca na papiru.
3. Postavite točku *B* na sjecište dvaju pravaca i točku *A* na vodoravni pravac lijevo od točke *B*. Označite na papiru točku *C* (također na vodoravnom pravcu za sada).
4. Pomaknite ravnalo malo tako da točka *A* i dalje leži na vodoravnom pravcu, a točka *B* na okomitom pravcu. Označite novi položaj točke *C*.

Ime(na): \_\_\_\_\_



5. Nastavite pomicati točke *A* i *B* u malim intervalima, držeći točku *A* na vodoravnom pravcu, a točku *B* na okomitom pravcu. Svaki put kada promijenite

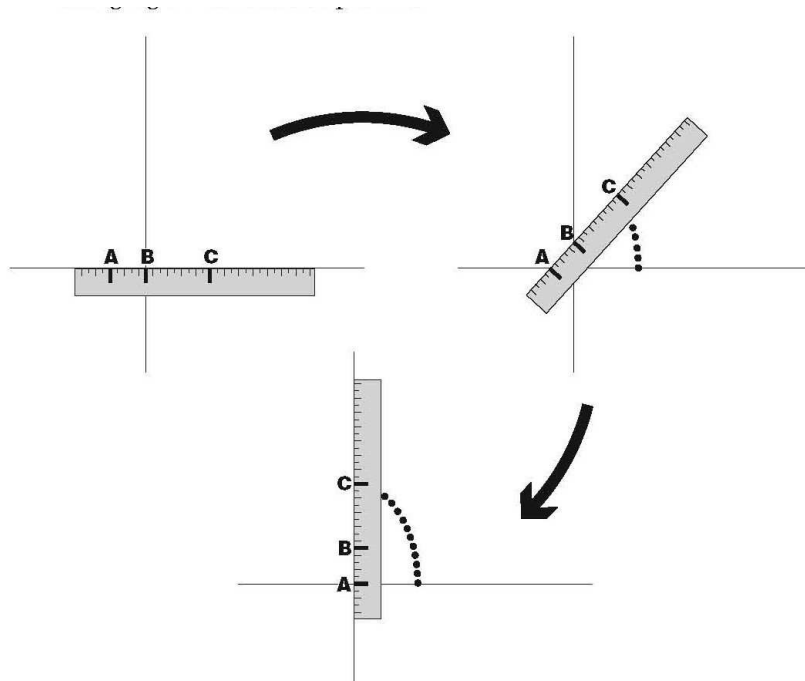
<sup>12</sup>Elipsograf se prvi put pojavljuje u djelu Prokla (410. - 485. godine).

<sup>13</sup>Ako radite u razredu, neka učenici odaberu različite položaje točke *B* u odnosu na točke *A* i *C*. Ako radite sami, provedite ovu aktivnost dva puta s različitim lokacijama točke *B*.

<sup>14</sup>Ilustracija na sljedećoj stranici prikazuje kako pomicati ravnalo duž pravaca.

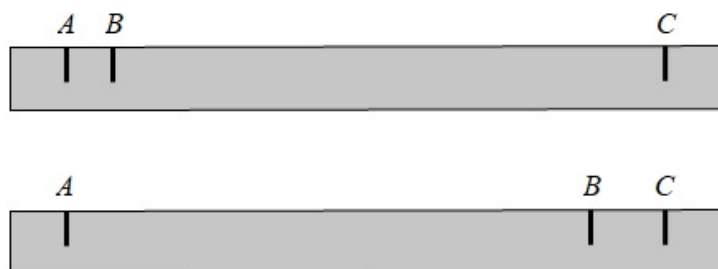
položaj ravnala, označite novi položaj točke  $C$ . Na kraju će ravnalo biti na okomici, a točka  $A$  u sjecištu pravaca.

6. Nacrtano izgleda kao četvrtina elipse. Nastavite premještati ravnalo kako biste nacrtali cijelu krivulju.
7. Razgovarajte o onome što vidite sa svojim kolegama iz razreda i usporedite njihove krivulje sa svojim. Ako ovu aktivnost radite sami, nacrtajte novu krivulju promjenom položaja točke  $B$ .



## Pitanja

- P1** Na slici su prikazana dva ravnala s različitim relativnim položajima točke  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Ako se svako ravnalo koristi za crtanje elipse, kako će se oblik dviju krivulja razlikovati?



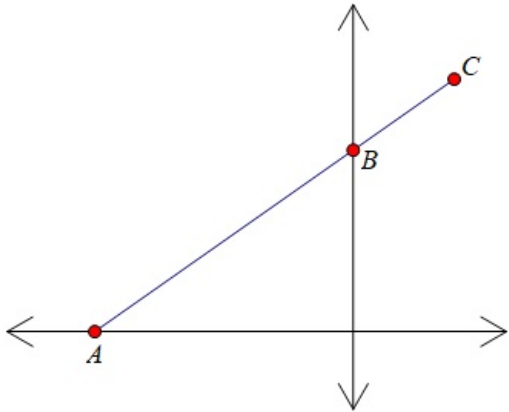
- P2** Pod pretpostavkom da elipsografi crtaju elipse, kako biste pozicionirali točke  $A$ ,  $B$  i  $C$  da biste nacrtali elipsu s glavnom osi duljine 20 cm i sporednom osi duljine 12 cm?

**P3** Može li elipsograf crtati kružnice? Objasnite. Objasnite svoj odgovor.

### Istraživanje Sketchpadovog modela

Vaš model ravnala elipsografa pruža dobar osjećaj kako uređaj funkcionira. Ipak, pomicanje ravnala malo po malo vjerojatno je bilo nezgodno.

Sketchpadov elipsograf nudi neke prednosti: glatko, kontinuirano kretanje i lako podesive duljine.

8. Otvorite sketch **Stolar.gsp** u mapi **Elipsa**.
  9. Pomaknite točku  $A$  i promatrajte kretanje dužine  $AC$ .
  10. Odaberite točku  $C$  i odaberite naredbu **Trag presjeka** u izborniku **Zaslon**. Pomaknite točku  $A$  i promatrajte krivulju koju crta točka  $C$ . Krivulja koju vidite je *lokus* točke  $C$  dok se točka  $A$  pomiče duž svojeg pravca.
- 
11. Nacrtali ste polovica elipse. Za crtanje druge polovice, upotrijebite naredbu **Zrcalite** iz izbornika **Transformacije** za zrcalno preslikavanje točke  $C$  preko vodoravne osi. Odaberite zrcaljenu točku  $C'$  i odaberite **Trag točke**. Sada pomičite točku  $A$  da biste nacrtali cijelu krivulju.
  12. Podesite duljine dužina  $\overline{AB}$  i  $\overline{BC}$  u donjem lijevom kutu zaslona kako biste promijenili parametre elipsografa. Zatim odaberite **Izbrišite tragove** u izborniku **Zaslon** da biste izbrisali prethodnu krivulju. Nacrtajte nekoliko novih krivulja, svaki put mijenjajući parametre  $AB$  i  $BC$ .
  13. Isključite praćenje točaka  $C$  i  $C'$  tako što ćete ih odabrati i ponovno odabrati **Trag točaka** u izborniku **Zaslon**.
  14. Sada odaberite točke  $A$  i  $C$ . Odaberite **Lokus** u izborniku **Konstrukcija**. Ponovite to za točke  $A$  i  $C'$ . Nacrtat ćete cijelu krivulju: lokus točaka  $C$  i  $C'$ .
  15. Kao i prije, mijenjajte duljine dužina  $AB$  i  $AC$  i promatrajte njihov utjecaj na nacrtanu krivulju.

## Kako to dokazati

Krivulje koje ste nacrtali svakako izgledaju kao elipse. Ali izgled ne govori uvijek cijelu priču. Dokaz može potvrditi identitete krivulja i pokazati koja se matematika "skriva" u u osnovi elipsografa.

Znate li algebarski prikaz elipse? Pogledajte sljedeću definiciju:

Točke koje zadovoljavaju jednadžbu

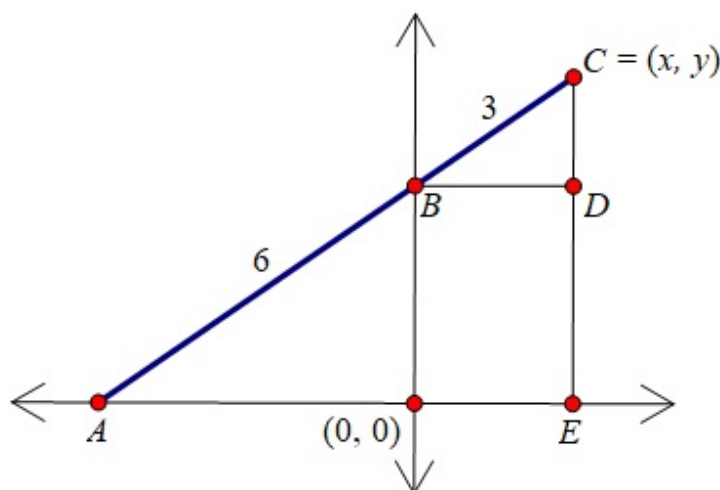
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{za } b > a,$$

leže na elipsi sa središtem u ishodištu s glavnom osi duljine  $2b$  duž  $y$ -osi i sporednom osi duljine  $2a$  duž  $x$ -osi.

Slika prikazuje elipsograf u  $x - y$  ravnini čiji je krak predstavljen dužinom  $AC$ . Za je ovaj određen elipsograf  $AB = 6$  i  $BC = 3$ . Na slici je nacrtano nekoliko dodatnih dužina; dužina  $CE$  usporedna s  $y$ -osi i dužina  $BD$  usporedna s  $x$ -osi. Budući da se položaj točke  $C$  mijenja pomicanjem kraka elipsografa ona je označena kao  $(x, y)$ , koristeći varijable kao koordinate. Ako  $C$  crta elipsu, trebali biste moći izvesti jednadžbu poput one gore koja povezuje  $x$  i  $y$ .

## Pitanja

Pitanja koja slijede pružaju detaljan dokaz. Možete odgovoriti na njih ili napisati vlastiti dokaz bez ikakvih savjeta.



**P4** Pretpostavimo na trenutak - bez dokaza - da elipsograf na slici na prethodnoj stranici crta elipsu.<sup>15</sup> Kako glasi njezina jednačba, ako je  $AB=6$  i  $BC=3$ ? (Usporedit ćemo naš konačni odgovor s ovom jednačbom kasnije.)

**P5** Upišite duljine sljedećih dužina u terminima  $x$  i  $y$ :

$$\overline{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{CE} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{CD} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Objasnite kako ste odredili ili izračunali duljinu dužine  $\overline{CD}$ .

**P6** Sada kada ste odredili duljine različitih dužina, pronađite način povezivanja  $x$  i  $y$ . Evo dva pristupa koja biste mogli razmotriti:

- Potražite par sličnih trokuta na slici. Upotrijebite njihovu sličnost za stvaranje proporcije koja povezuje  $x$  i  $y$ .
- Izračunajte  $\sin(\angle CAE)$  i  $\cos(\angle CBD)$ . Potražite način da povežete ove dvije vrijednosti jednu s drugom.

Ako je potrebno, manipulirajte svojom jednačbom tako da bude prepoznatljiva kao jednačba elipse. Usporedite svoju jednačbu s onom koju ste pronašli u P4 kako biste provjerili podudaraju li se.

**P7** Provedite ovaj dokaz sada općenito i neka je  $AB = s$  i  $BC = t$ .

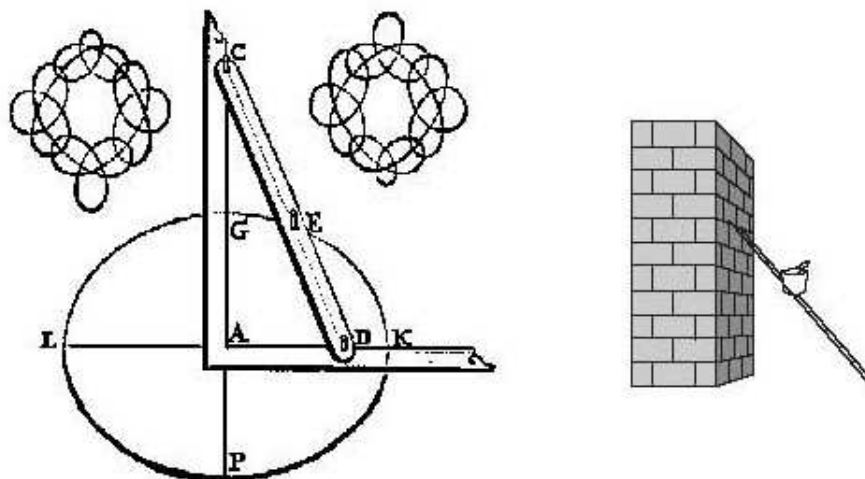
### Istražite više

1. Otvorite novi sketch i sami nacrtajte svoj model konstrukcije elipsografa pomoću Sketchpada.
2. Za bilo koju krivulju koju crta elipsograf, trebali biste moći pronaći njezina žarišta. Otvorite stranicu 3 sketcha **Stolar.gsp**. Upotrijebite ono što ste naučili u aktivnosti [Neki odnosi elipse](#) kako biste konstruirali žarišta elipse na zaslonu. Provjerite jesu li vaša žarišta dinamična: trebala bi se prilagođavati kako bi ostala na pravilnim mjestima dok mijenjate duljine dužina  $\overline{AB}$  i  $\overline{BC}$ .



<sup>15</sup>Savjet: Odredite duljine glavne i sporedne osi elipse i položaj njezina središta.

3. Ilustracije u nastavku prikazuju uređaj za crtanje iz sedamnaestog stoljeća čije kretanje nalikuje kretanju ljestava koje klize niz zid<sup>16</sup>. Na ljestvama se nalazi kanta. Dok ljestve klize, koju putanju kanta prati?



Istražite ovaj problem modificiranjem svog fizičkog modela elipsografa. Izradite i Sketchpadov model. Možete li dokazati svoja otkrića??

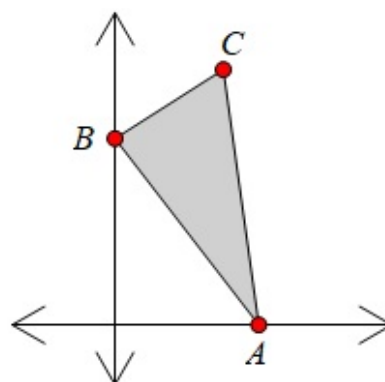
4. Postoji poučak u geometriji koji kaže:

*Polovište hipotenuze pravokutnog trokuta jednako je udaljeno od tri vrha trokuta.*

Pretpostavimo za trenutak da je ova tvrdnja istinita. Kako možete primjenom samo ove tvrdnje dokazati da kanta iz P3 crta kružnicu kada je na pola ljestava?

5. Leonardo da Vinci osmislio je tehniku crtanja elipse koja zamjenjuje klizni trokut za klizni elipsograf.

Otvorite sketch **Trokut.gsp** u mapi **Elipsa - aktivnosti**. Ispitajte koju krivulju crta vrh trokuta *C* dok se druga dva vrha pomiču duž *x* i *y* osi.



<sup>16</sup>Za dodatnu dramatičnost, zamislite da stojite na ljestvama. Kojom stazom ide vaša noga?

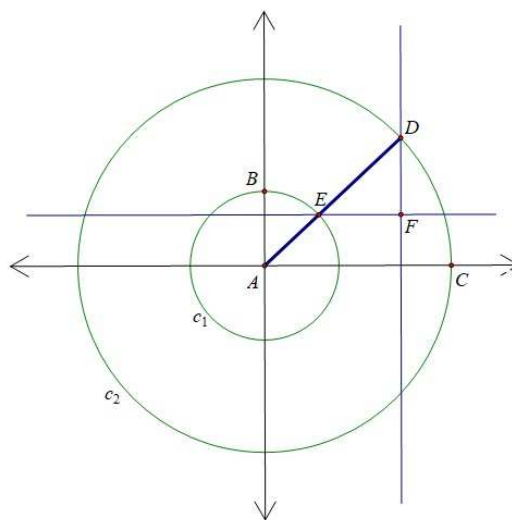
## Dannyjeva elipsa

Ime(na): \_\_\_\_\_

Dok je bio učenik srednje škole Mountain View u Kaliforniji, Danny Vizcaino osmislio je novi način konstruiranja elipsa pomoću Sketchpada. U ovoj aktivnosti izradit ćete model Dannyjeve elipse, a zatim dokazati zašto njegova metoda funkcionira.

### Izrada modela pomoću Sketchpada

- Otvorite novi sketch. Odaberite **Pokažite mrežu** u izborniku **Graf**. Zatim odaberite **Sakrijte mrežu** da biste uklonili pravce mreže, a ostavili osi  $x$  i  $y$ .
- Označite ishodište (presjecište dvaju pravaca) kao točku  $A$ .
- Nacrtajte proizvoljne točke  $B$  na  $y$ -osi i točku  $C$  na  $x$ -osi.
- Odaberite, redom, točke  $A$  i  $B$ . Zatim odaberite naredbu **Kružnica: središte + točka** u izborniku **Konstrukcije** kako biste nacrtali kružnicu  $c_1$  sa središtem u točki  $A$  koja prolazi točkom  $B$ .
- Ponovite korak 4 da biste konstruirali kružnicu  $c_2$  sa središtem u točki  $A$  koja prolazi točkom  $C$ .
- Nacrtajte dužinu  $AD$ , pri čemu je točka  $D$  proizvoljna točka kružnice  $c_2$ .
- Konstruirajte točku  $E$  koja je presjek dužine  $AD$  s kružnicom  $c_1$ .
- Točkom  $D$  konstruirajte pravac okomit na  $x$ -os.
- Točkom  $E$  konstruirajte pravac okomit na  $y$ -os.
- Konstruirajte točku  $F$  koja je presjek dvaju nacrtanih pravaca.
- Odaberite<sup>17</sup> točku  $F$  i odaberite naredbu **Trag presjeka** u izborniku **Zaslon**. Pomaknite točku  $D$  po kružnici i promatrajte krivulju koju crta točka  $F$ .



Krivulja koju vidite je *lokus* točke  $F$  dok se točka  $D$  pomiče po kružnici.

<sup>17</sup>Ako ne želite da vam tragovi izblijede, provjerite je li okvir Izblijeđivanje tragova vremenski: neoznačen na ploči Boja u dijaloškom okviru Postavke.

12. Pomičite točke  $B$  i  $C$  (duž  $x$  i  $y$  osi) kako biste promijenili veličine kružnica  $c_1$  i  $c_2$ . Zatim, ako je potrebno, odaberite **Izbrišite tragove** u izborniku **Zaslon** da biste izbrisali prethodnu krivulju. Nacrtajte nekoliko novih krivulja, svaki put mijenjajući duljine polumjera dviju kružnica.

Za svaki novi položaj točaka  $B$  i  $C$ , morate ponovno nacrtati krivulju. Idealno bi bilo da se vaša elipsa automatski prilagodi. Sketchpadova moćna naredba **Lokus** to omogućuje.

13. Isključite trag točke  $F$  tako što ćete je odabrati i ponovno odabrati **Trag presjek** u izborniku **Zaslon**.
14. Sada odaberite točke  $D$  i  $F$ . Odaberite naredbu **Lokus** u izborniku **Konstrukcije**. Cijela krivulja će biti nacrtana: lokus točke  $F$ . Pomičite točke  $B$  i  $C$  da biste promijenili oblik krivulje.

### Kako to dokazati

Zaintrigiran<sup>18</sup> Dannyjevom konstrukcijom pomoću Sketchpada, Key Curriculum Press sponzorirao je svjetsko natjecanje kako bi odgovorio na sljedeće pitanje:

Dannyjeva krivulja *izgleda* kao elipsa, ali je li to točno?

Natjecanje je završeno, ali izazov ostaje. Pokušajte dokazati da je Dannyjeva krivulja elipsa? Da biste to učinili, trebat će vam algebarska definicija u nastavku.

Točke koje zadovoljavaju jednadžbu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{za } a > b,$$

leže na elipsi sa središtem u ishodištu s glavnim osi duljine  $2a$  duž  $x$ -osi i sporednom osi duljine  $2b$  duž  $y$ -osi.

Na slici na sljedećoj stranici neka je  $AE = 2$  i  $ED = 3$ . Dužina  $EH$  je okomita na  $x$ -os. Budući da se položaj točke  $F$  mijenja kako se točka  $D$  pomiče, označena je kao  $(x, y)$ , koristeći varijable kao koordinate.

Ako  $F$  crta elipsu, trebali biste moći izvesti jednadžbu poput one gore koja povezuje  $x$  i  $y$ .

<sup>18</sup>Otvorite datoteku **Dinamička geometrija.gsp** u mapi **Elipsa - aktivnosti** kako biste vidjeli zabavnu primjenu Dannyjeve metode.

### Pitanja

Pitanja koja slijede pružaju detaljan dokaz. Možete odgovoriti na njih ili napisati vlastiti dokaz bez ikakvih nagovještaja.

**P1** Pretpostavimo na trenutak - bez dokaza - da je Dannyjeva krivulja elipsa. Kako glasi njezina jednadžba? (Usporedit ćemo naš konačni odgovor s ovom jednadžbom kasnije.)

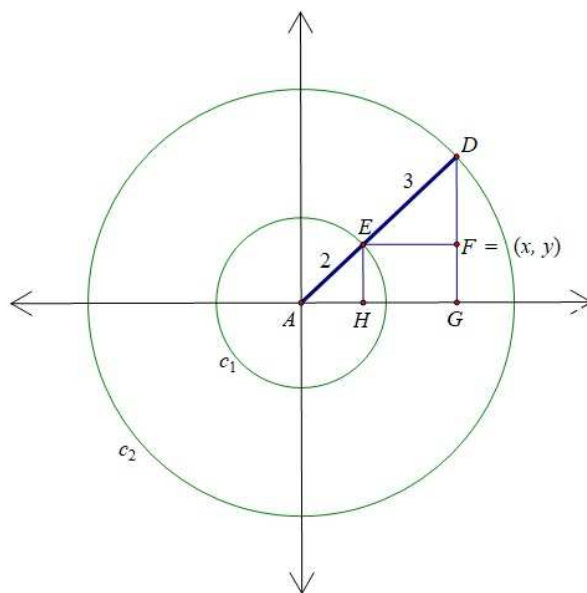
*Savjet:* Odredite<sup>19</sup> duljine glavne i sporedne osi elipse i položaj njezina središta.

**P2** Upišite duljine sljedećih segmenata s oznakama  $x$  i  $y$ :

$$\overline{AG} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{EH} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{DG} = \underline{\hspace{2cm}}$$



Objasnite kako ste odredili duljinu dužine  $\overline{DG}$ .

**P3** Sada kada ste odredili duljine različitih dužina, pronađite način povezivanja  $x$  i  $y$ . Evo dva pristupa koja biste mogli razmotriti:

- Potražite par sličnih trokuta na dijagramu. Upotrijebite njihovu sličnost za stvaranje proporcije koja povezuje  $x$  i  $y$ .
- Izračunajte  $\sin(\angle EAH)$  i  $\cos(\angle DAG)$ . Potražite način povezivanja ove dvije vrijednosti jednu s drugom.

Ako je potrebno, manipulirajte svojom jednadžbom tako da bude prepoznatljiva kao jednadžba elipse. Usporedite svoju jednadžbu s onom koju ste pronašli u P1 kako biste provjerili podudaraju li se.

**P4** Prepišite svoj dokazi i provedite ga za općenitiji slučaj tako da je  $AE = s$  i  $ED = t$ .

### Istražite više

1. Budući da je Dannyjeva krivulja<sup>20</sup> elipsa, trebali biste moći pronaći njezina žarišta.

Otvorite drugu stranicu sketch **Danny.gsp** u mapi **Elipsa - aktivnosti**. Upotrijebite ono što ste naučili u aktivnosti **Neki odnosi elipse** kako biste kon-

<sup>19</sup>Za P1 i P2, upotrijebite numeričke vrijednosti na slici:  $AE = 2$  i  $ED = 3$ .

<sup>20</sup>Pogledajte stranicu 3 u **Danny.gsp** za pomoć.



struitali žarišta elipse na zaslonu.

Pazite da su vaša žarišta *dinamična*: trebala bi se prilagođavati kako bi ostala na odgovarajućim mjestima dok pomičete točku  $B$  ili  $C$ .

## Projekti elipse

Projekti u nastavku namijenjeni su za proširenje vašeg znanja o elipsi u novim smjerovima i idealni su za prezentacije u razredu.

### 1. Prisjetite se klasične definicije elipse:

Elipsa je skup točaka  $P$  takav da je  $PA + PB$  konstantno za dvije fiksne točke  $A$  i  $B$ .

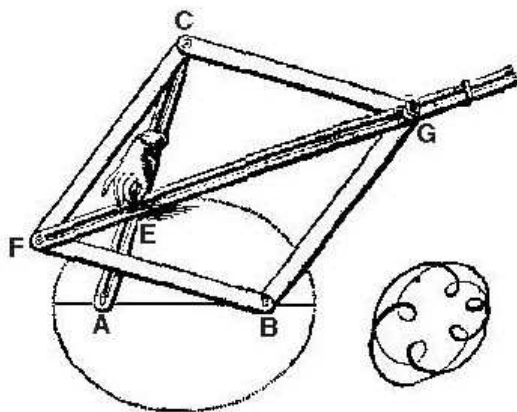
Pretpostavimo da definiramo novu krivulju sa sličnim opisom:

Skup točaka  $P$  takav da je  $PA + 2PB$  konstantno za dvije fiksne točke  $A$  i  $B$ .

Kako izgleda ova krivulja? Izgradite Sketchpadov model modificiranjem konstrukcije koncentričnih kružnica.

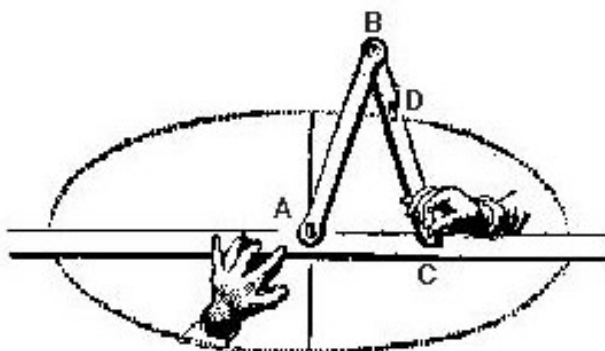
### 2. U konstrukciji presavijenog kruga izgradili ste pravac pregiba koji nastaje kada se točka $C$ presavije na točku $B$ konstruiranjem simetrala dužine $BC$ . Zamislite sada da su naredbe **Polovište** i **Okomica** u Sketchpadu pokvarene. Kako možete konstruirati pravac pregiba bez njih?

Na slici je dana jedna mogućnost. Autor je matematičar Fransa van Schootena iz sedamnaestog stoljeća i prikazuje romb  $FCGB$  s prerezima u obliku šipke koja prolazi kroz točke  $F$  i  $G$ . Otvorite sketch **Romb.gsp** u mapi **Elipsa - aktivnosti** i eksperimentirajte s modelom. Po čemu je ovaj model sličan konstrukciji **Presavijena kružnica**? Koja je uloga romba?



3. Knjiga *Feynmanovo izgubljeno predavanje: Gibanje planeta oko Sunca* (W. W. Norton & Company, 2000.) sadrži predavanje legendarnog fizičara Richarda Feynmana. U svom predavanju, Feynman koristi konstrukciju presavijene kružnice kako bi geometrijski demonstrirao da planeti kruže oko Sunca po eliptičnim putanjama. Pročitajte Feynmanovo predavanje i pripremite izvješće o njegovoj metodi.
4. Izradite vlastiti radni model konstrukcije sukladnih trokuta koristeći kartonske i papirnate pričvršćivače.
5. Otvorite sketch<sup>21</sup> **Savijena slamka.gsp** u mapi **Elipsa**. Vidjet ćete spoj s jednakim duljinama segmenta  $AB$  i  $BC$ . Dok pomičete točku  $C$  primjetite kako gibanje ovog uređaja nalikuje gibanju savijene slamke.

Možete li dokazati da točka  $D$  prati elipsu? Sketch sadrži neke prijedloge za početak.



6. Koristite<sup>22</sup> tehnike iz aktivnosti [Neki odnosi elipse](#), kao i iz Dannyjeve elipse, kako biste izradili prilagođeni alat koji uzima tri točke -  $A$ ,  $B$  i  $P$  - i konstruira elipsu točkom  $P$  s  $A$  i  $B$  kao žarištima.

Za pomoć pogledajte sketch **Žarišta i točka.gsp** u mapi **Elipsa** pruža pomoć.

7. Sketch **Tangentne kružnice.gsp** u mapi **Elipsa** prikazana je kružnica  $c_3$  (crvena) koja istovremeno dodiruje kružnice  $c_1$  i  $c_2$ . Pritisnite gumb *Animacija* i promatrajte putanju točke  $C$  koja je središte kružnice  $c_3$ .

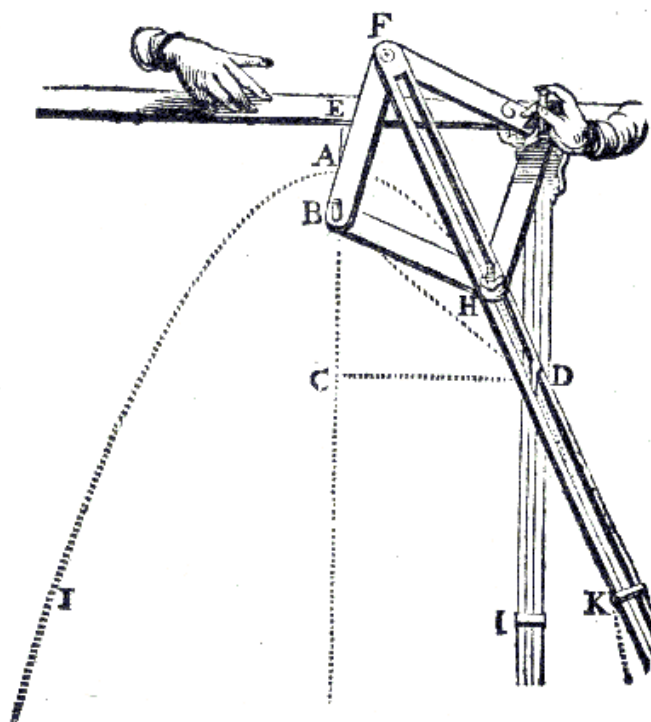
Možete li dokazati da  $C$  crta elipsu?

<sup>21</sup>Što se događa kada je  $AB \neq BC$ ?

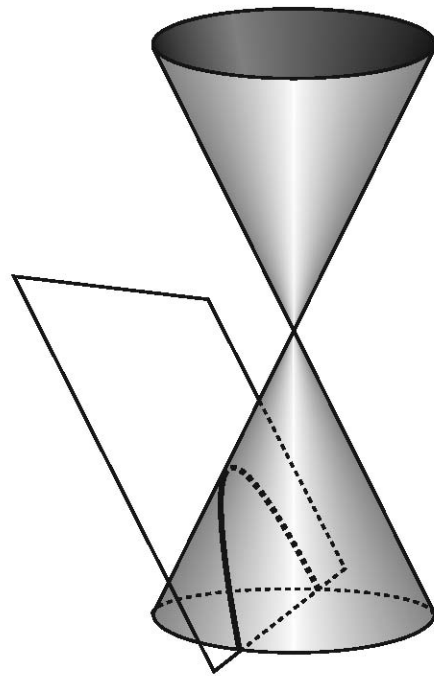
<sup>22</sup>Ovaj alat ćete koristiti u aktivnosti Gorući šator kasnije u ovoj knjizi.



## 2. Parabola



Izvornik crteža je knjiga iz 1656. godine  
Frans van Shooten: *Exercitationum Mathematicorum, Liber IV,*  
*Organica Conicarum Sectionum in Plano Descriptione*  
(Traktat o uređajima za crtanje konika)

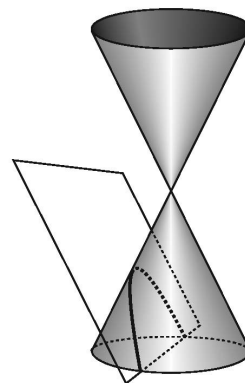


## Pregled poglavlja

Putanja bejzbolske lopte. Krivulja koju formiraju kablovi na mostu Golden Gate. Trag vode koja mlazom izlazi iz crijeva. Sve su to primjeri paraboličnih krivulja (ili slični tome).

Na slici je prikazan dvostruki stožac presječen ravninom paralelno s konturnom izvodnicom. Presjek ("konusni presjek") je parabola.

Na početku upoznat ćemo se s osnovnim pojmovima parabole (žarištem i direktricom ili ravnalicom) u aktivnosti I. Zatim će biti prikazane dvije konstrukcije parabole, jednu temeljenu na klasičnoj definiciji parabole (aktivnost II.), a drugu na algebarskom obliku parabole (aktivnost III.).



*Kada dvostruki konus presiječe ravnina koja je paralelna s rubom, rezultat je parabola.*

Ukupno, ovo poglavlje nudi sedam konstrukcija parabole koje možete rješavati. Otvorite višestranični sketch **Obilazak Parabole.gsp** za praktičan pregled slajdova.



### I. Uvod u parabolu

Žarišna točka i ravnalica glavni su elementi za dvije konstrukcije parabole.

### II. Konstrukcija presavijenog pravokutnika

S praznim listom papira i jednom točkom možete presavijanjem papira prikazati parabolu.

Modelirajte tehniku pomoću Sketchpada kako biste otkrili temeljnu matematiku.

### III. Konstrukcija kružnice koja se širi

Promjenom duljine kružnice, definirane su točke koje leže duž parabole. Istražite ovu konstrukciju iz desetog stoljeća pomoću Sketchpada.

### IV. Projekti parabole

Zaokružite poglavlje s nekoliko zgodnih projektnih zadataka na temu parabole.

## Uvod u parabolu

Ime(na): \_\_\_\_\_

U ovoj aktivnosti, geometrijska/klasična definicija parabole služi kao uvod za istraživanje dvaju različitih načina konstruiranja krivulje.

## Definiranje parabole

U nastavku je geometrijska definicija parabole:

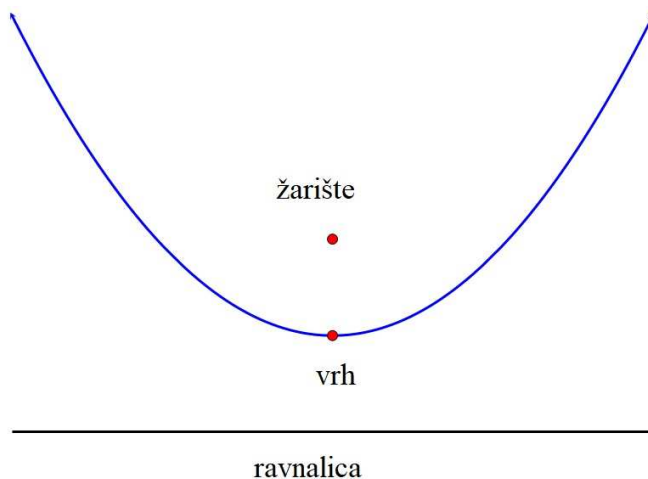
**Parabola je skup točaka jednako udaljenih od fiksne točke žarišta (fokusa) i fiksnog pravca ravnalice (direktrise).**



U sketchu **Parabola.gsp** u mapi **Parabola - aktivnosti**, prikazana je parabola zajedno s njezinim žarištem i ravnalicom. Skech također sadrži dva mjerenja koja pokazuju udaljenost točke  $P$  od žarišta i od ravnalice.

Pomaknite točku  $P$ . Vidjet ćete da se mjerenja udaljenosti mijenjaju, ali uvijek ostaju međusobno jednaka.

Parabola je simetrična krivulja. Njezina os simetrije prolazi žarištem i kroz točku koja se naziva **vrh** ili **tjeme**. Paraboli na slici, vrh je najniža točka na krivulji.



## Pitanja

**P1** Zadani su pravac  $d$  i točka  $P$  koja nije na pravcu, kako definiramo udaljenost između njih?

**P2** Nacrtajte dužinu kojoj su rubne točke žarište i točka  $P$ .<sup>1</sup> Zatim konstruirajte dužinu čija duljina predstavlja udaljenost od točke  $P$  do ravnalice.

Segmenti bi se trebali sami prilagođavati kako se točka  $P$  pomiče duž parabole.

Pomoću programa Sketchpad izmjerite duljine ova dva segmenta. Što očekujete pronaći?

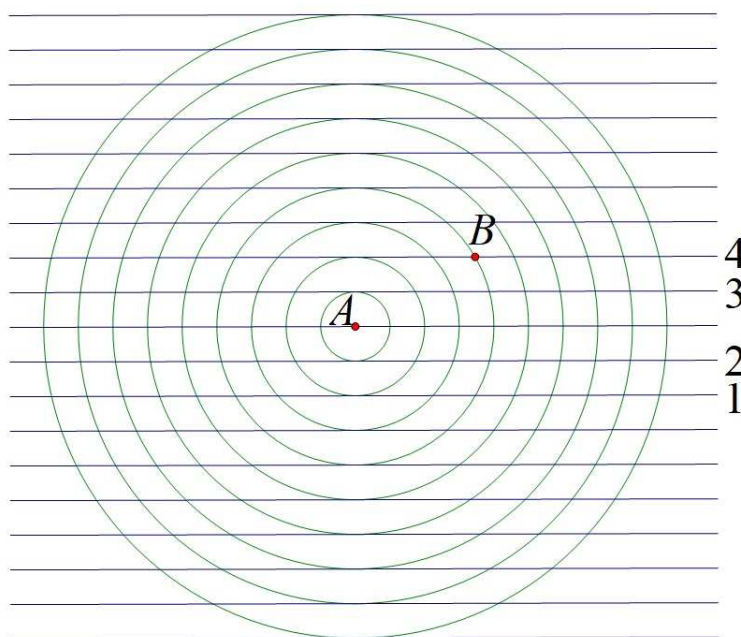
<sup>1</sup>Alternativno, pritisnite gumb za prikaz segmenata.

**P3** Kako možete konstruirati vrh parabole uzimajući u obzir samo žarište i ravnalicu parabole?

### Metoda koncentričnih kružnica

Na slici je nacrtano devet<sup>2</sup> koncentričnih kružnica sa središtem u točki  $A$ . Polunje-ri kružnica povećavaju se za 1, od 1 jedinice sve do 9 jedinica. Horizontalni pravci su također razmaknuti za 1 jedinicu. Svaki nacrtani pravac, osim onog točkom  $A$ , tangenta je kružnice.

Ovo možemo koristiti za crtanje parabola.



### Pitanja

**P4** Koliko su jedinica udaljene točke  $A$  i  $B$ ? Koliko su jedinica udaljene točka  $B$  i pravac 1? Na temelju ovih mjerenja, što možete zaključiti?

**P5** Pronađite i označite najmanje 15 točaka (uključujući vrh) koje leže na paraboli sa žarištem u  $A$  i pravcem 1 kao ravnalicom. Objasnite kako ste ih pronašli.

**P6** Nacrtanim točkama nacrtajte parabolu.

**P7** Ponovite prethodna dva pitanja, crtajući parabole s ravnalicama 2, 3 i 4. Za sve tri parabole točka  $A$  je žarište.

Za svaku parabolu upotrijebite olovku ili kemijsku olovku druge boje ako je moguće.

<sup>2</sup>Koncentrične kružnice imaju zajedničko središte.

## Metoda kliznim ravnalom

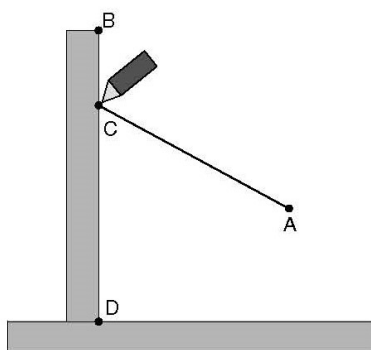


Otvorite sketch **Klizno ravnalo.gsp** u mapi **Parabola - aktivnosti**. Na slici je prikazan model.

Pravokutnici su prikazani sa dva ravnala. Komad konopca duljine dužine  $BD$  pričvršćen je od točke  $A$  do kuta okomitog ravnala (točka  $B$ ). Konopac je zategnut uz rub ravnala olovkom u točki  $C$ .

Pomicanjem ravnala  $BD$  udesno, dok je uže zategnuto, točka  $C$  crta polovicu parabole.

Za upravljanje modelom u Sketchpadu, pomičite točku  $D$ .



## Kako to dokazati

Konstrukcija kliznim ravnalom crta parabolu. Možete li dokazati da to čini? Pokušajte sami razviti dokaz ili riješite sljedeća pitanja.

## Pitanja

- P8** Pod pretpostavkom da olovka u točki  $C$  crta parabolu. Odredite žarište i ravnalicu.
- P9** Pod pretpostavkom da olovka u točki  $C$  crta parabolu, za koje dvije dužine treba dokazati da su jednakih duljina?
- P10** Dopunite ovu tvrdnju:

$$BC + CA = BC + \underline{\hspace{2cm}}$$

- P11** Dovršite dokaz.

## Istražite više

1. Kružnice su različitih duljina polumjera, ali istog oblika. S obzirom na bilo koje dvije kružnice, možete povećati ili smanjiti jednu kružnicu na fotokopirnom stroju

tako da se preklapaju.

Vjerovali ili ne, sve parabole imaju isto svojstvo: S obzirom na bilo koje dvije, moguće je povećati ili smanjiti jednu parabolu na fotokopirnom stroju tako da odgovara drugoj.

Ne vjerujete? Otvorite sketch **Skala.gsp** u mapi **Parabola - aktivnosti**.

Prikazane su dvije parabole - jedna crvena, druga plava. Pomaknite jediničnu točku "1" na  $x$ -osi. Plava parabola će ostati na mjestu, ali crvena parabola će se prilagoditi promjeni mjerila na  $x$ -osi i  $y$ -osi.

Budući da skaliranje na dvjema osima raste i smanjuje se istovremeno, jednadžba crvene parabole ( $y = x^2$ ) se ne mijenja. Pomicanjem jedinične točke trebali biste moći postići preklapanje dviju parabola.



### Konstrukcije presavijenog pravokutnika

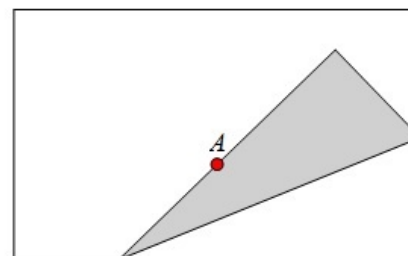
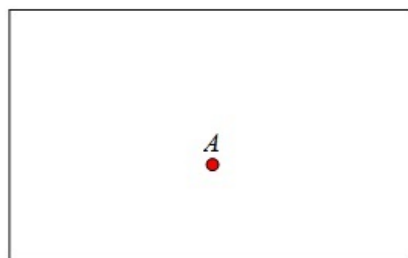
Ime(na): \_\_\_\_\_

Sa samo jednim listom papira i jednom točkom na stranici, možete stvoriti parabolu. Bez ravnala i mjerenja!

### Izrada fizičkog modela

**Potrebni materijal:** Trebat će vam pravokutni ili kvadratni komad vošanog papira ili papira za pljeskavice. Ako nemate ove materijale, upotrijebite običan list papira.

1. Označite<sup>3</sup> točku A otprilike 2,5 cm od dna papira i centrirano između lijevog i desnog ruba.
2. Kao što je prikazano na slici, preklopite papir tako da točka na donjem rubu padne izravno na točku A. Napravite oštar pregib kako biste zabilježili ovaj pregib. Rasklopite pregib.
3. Presavijte papir duž novog pregiba tako da druga točka na donjem rubu padne na točku A. Rasklopite pregib i ponovite postupak.
4. Nakon što ste napravili desetak pregiba, pregledajte ih kako biste vidjeli uočavate li nove uzorke.
5. Nastavite savijati papir<sup>4</sup>. Postupno biste trebali vidjeti dobro ocrtanu krivulju. Postupak zahtijeva strpljenje.
6. Razgovarajte o onome što vidite sa svojim kolegama iz razreda i usporedite njihove presavijene krivulje s vašima. Ako ovu aktivnost radite sami, preklopite drugi list papira s točkom A dalje od donjeg ruba.



### Pitanja

- P1** Čini se da pregibi na vašem papiru tvore obris parabole. Gdje se nalaze njezino žarište i ravnalica?
- P2** Ako biste točku A pomaknuli bliže donjem rubu papira i presavili drugu krivulju, kako mislite da bi se njezin oblik usporedio s prvom krivuljom?

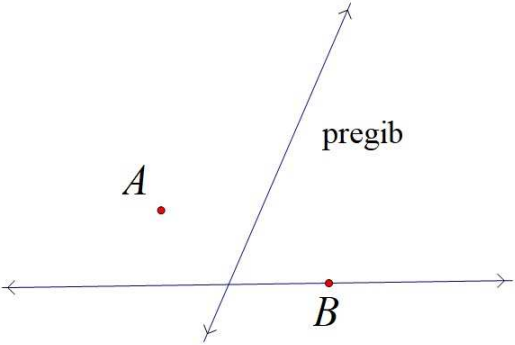
<sup>3</sup>Ako radite u razredu, neka učenici postave A na različite udaljenosti od ruba. Ako radite sami, napravite ovaj dio dvaput - jednom s A blizu ruba, drugi put s A dalje od ruba.

<sup>4</sup>Matematičari bi opisali vaš skup pregiba kao *envelopu pregiba*.

## Konstrukcija Sketchpadovog modela

Presavijte i rasklopite. Savijanje papira zahtijeva malo rada. Savijanje jednog ili dva lista je zabavno, ali što bi se dogodilo ako biste htjeli nastaviti provjeravati ili testirati za što više različitih položaja točke  $A$ ? Morali biste postupak uvijek počinjati s novim listom papira, savijajući nove skupove pregiba.

Sketchpad može pojednostaviti vaš rad. S jednim skupom pregiba, možete pomaknuti točku  $A$  na nove položaje i gledati kako se pravci pregiba trenutno prilagođavaju.

7. Otvorite novi sketch. Pomoću **Alata za pravac** nacrtajte vodoravni pravac blizu dna zaslona. Ovaj pravac predstavlja donji rub papira.
  8. Nacrtajte točku  $A$  iznad pravca, otprilike centrirano između lijevog i desnog ruba zaslona.
  9. Konstruirajte točku  $B$  na vodoravnom pravcu.
- 
10. Konstruirajte "pregib" koji nastaje kada se točka  $B$  preklopi na točku  $A$ .
  11. Pomaknite točku  $B$  duž njezinog pravca. Ako ste pravac pregiba konstruirali točno, trebao bi se prilagoditi novim položajima točke  $B$ .
  12. Odaberite pravac<sup>5</sup> pregiba i odaberite **Trag pravca** iz izbornika **Zaslon**.
  13. Pomaknite točku  $B$  duž vodoravnog pravca kako biste stvorili skup pravaca pregiba.
  14. Pomaknite točku  $A$  na drugu lokaciju, a zatim, ako je potrebno, odaberite **Izbrišite tragove** iz izbornika **Zaslon**.
  15. Pomičite točku  $B$  kako biste stvorili još jedan skup pravaca pregiba. Ponovno praćenje pregiba za svaki položaj točke  $A$  svakako je brže od presavijanja papira. Ali možemo i bolje. Idealno bi bilo da se vaši pravci pregiba automatski premještaju dok povlačite točku  $A$ . Sketchpadova moćna naredba **Lokus** to omogućuje.
  16. Isključite trag za izvorni pravac pregiba tako da ga odaberete i još jednom odaberete **Trag pravca** iz izbornika **Zaslon**.

<sup>5</sup> Ako ne želite da vam tragovi izblijede, provjerite je li okvir Izbljeđivanje Tragova tijekom vremena neoznačen na ploči Boja u dijaloškom okviru Postavke.

17. Sada odaberite pravac pregiba i točku  $B$ . Odaberite naredbu **Lokus** iz izbornika **Konstrukcije**. Pojavit će se cijeli skup pregiba: lokus lokacija pregiba dok se točka  $B$  pomiče duž svoje putanje. Ako pomaknete točku  $A$ , pravci pregiba će se automatski prilagođavati.

## Pitanja

**P3** Kako se mijenja izgled krivulje pomicanjem točke  $A$  bliže vodoravnom pravcu?

**P4** Kako se mijenja izgled krivulje pomicanjem točke  $A$  dalje od vodoravnog pravca?

## Igranje detektiva

Svaki pravac pregiba na vašem papiru dodiruje parabolu u točno jednoj točki. Drugim riječima, svaki pregib je *tangenta* parabole.

Uključivanjem u detektivski rad možete odrediti i dirališta i koristiti ih za konstrukciju samo parabole bez njezinih pregiba.



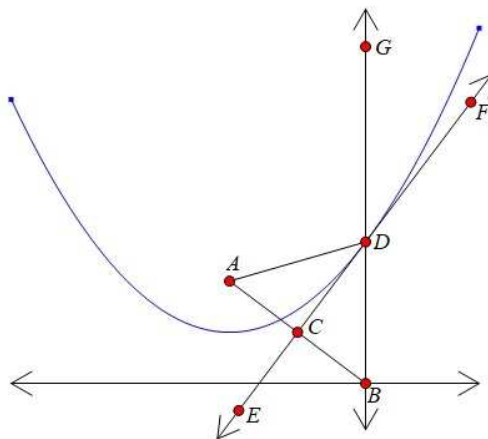
18. Otvorite sketch **Presavijeni pravokutnik.gsp** u mapi **Parabola**. Prikazan je pravac pregiba (stil crte - debela) i pripadni lokus koji je već na mjestu.
19. Pomaknite točku  $B$  i primijetite da pravac pregiba ostaje tangenta parabole. Točno diralište je presjek dvaju pravaca - pravca pregiba i drugog pravca koji ovdje nije prikazan. Konstruirajte ovaj pravac u svojem sketchu kao i diralište  $D$ .
20. Odaberite<sup>6</sup> točku  $D$  i točku  $B$  te odaberite naredbu **Lokus** iz izbornika **Konstrukcije**. Ako ste ispravno konstruirali točku  $D$ , trebali biste vidjeti krivulju koja se pojavljuje precizno u bijelom prostoru omeđenom pregibima.

## Kako to dokazati

Konstrukcija presavijenog pravokutnika čini se da generira parabole. Možete li to dokazati? Pokušajte sami razviti dokaz ili riješite sljedeće korake i pitanja.

Konstrukcija na slici trebala bi biti slična vašoj konstrukciji nacrtanoj u Sketchpadu. Pravac  $EF$  (simetrala dužine  $AB$ ) je pravac pregiba koji nastaje preklapanjem točaka  $B$  i  $A$ . Točka  $D$  je točka krivulje.

<sup>6</sup>Odaberite lokus i povećajte njegovu širinu kako bi bio lakše vidljiv.



### Pitanja

- P5** Pod pretpostavkom da točka  $D$  crta parabolu, za koje dvije dužine treba dokazati da moraju biti istih duljina?
- P6** Upotrijebite poučak o sukladnosti trokuta kako biste dokazali da je  $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ .
- P7** Upotrijebite<sup>7</sup> klasičnu definiciju parabole i rezultat iz P6 kako biste dokazali da točka  $D$  crta parabolu.

### Istražite više

- Otvorite sketch **Tangentna kružnica.gsp** u mapi **Parabola**. Prikazana je kružnica sa središtem u točki  $C$  koja sadrži točku  $A$  i dodiruje pravac u točki  $B$ . Pomaknite točku  $B$ . Zašto točka  $C$  crta parabolu?



- Parabola se može opisati kao elipsa s jednim žarištem u beskonačnosti.

Otvorite sketch **Konusna povezanost.gsp** u mapi **Parabola - aktivnosti**. Prikazana je kružnica iz konstrukcije Preklopljena kružnica. Pritisnite gumb za slanje žarišne točke u "beskonačnost". Točka  $A$  - žarište elipse i središte kružnice - pomicat će se daleko izvan zaslona. Kako pomicanje točke  $A$  utječe na izgled vidljivog dijela kružnice? Usporedite ono što vidite s konstrukcijom Preklopljeni pravokutnik. Pojasnite sličnost.



- Upotrijebite crtež iz vašeg dokaza parabole kako biste pokazali da je  $\angle GDF = \angle ADC$ . Sketch **Farovi.gsp** u mapi **Parabola - aktivnosti** prikazuje posljedicu ovog rezultata.



<sup>7</sup>Zapamtite, parabola je skup točaka ravnine jednako udaljenih od fiksne točke (žarišta) i fiksnog pravca (ravnanice).

### Konstrukcije kružnice koja se širi

Ime(na): \_\_\_\_\_

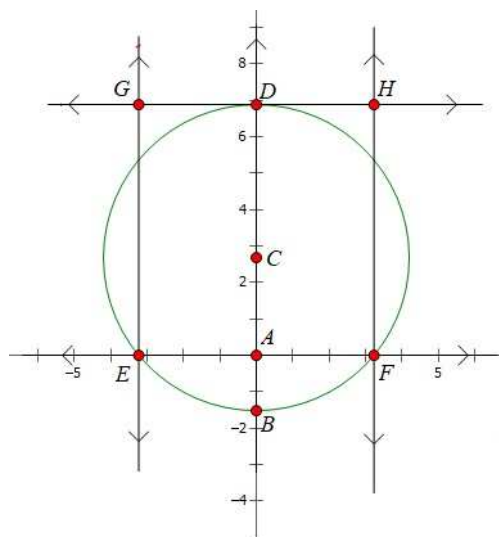
U ovoj aktivnosti istražiti ćete malo poznatu konstrukciju parabole iz desetog stoljeća. Metoda potječe od Ibn Sine<sup>8</sup>, sveznalice koji je bio liječnik, filozof, matematičar i astronom!

### Konstruiranje Sketchpadovog modela

1. Otvorite novi sketch. Odaberite **Pokažite mrežu** u izborniku **Graf**. Zatim odaberite **Sakrijte mrežu** da biste uklonili pravce mreže, a zadržali  $x$ -os i  $y$ -os.

2. Označite ishodište kao točku  $A$ .

3. Odaberite **Alat za kružnicu**. Kliknite na  $y$ -os iznad ishodišta (točka  $C$ ), a zatim ispod ishodišta (točka  $B$ ). Nacrtana je kružnica sa središtem u točki  $C$  koja prolazi kroz točku  $B$ .



4. Konstruirajte točku  $D$ , presjek kružnice i pozitivnog dijela  $y$ -osi.
5. Konstruirajte točke  $E$  i  $F$ , presjeke kružnice i  $x$ -osi.
6. Konstruirajte točkama  $E$  i  $F$  pravce okomite na  $x$ -os.
7. Konstruirajte pravac točkom  $D$  okomito na  $y$ -os.
8. Konstruirajte točke  $G$  i  $H$ , sjecišta tri nacrtana pravca.
9. Odaberite točke<sup>9</sup>  $G$  i  $H$  i odaberite **Trag Presjeka** iz izbornika **Zaslon**. Pomicite točku  $C$  duž  $y$ -osi i promatrajte krivulju koju crtaju točke  $G$  i  $H$ . Nacrtana krivulja je lokus točaka  $G$  i  $H$  dok se točka  $C$  kreće duž  $y$ -osi.
10. Pomaknite točku  $B$  na novi položaj, ali ispod ishodišta. Zatim, ako je potrebno, odaberite **Izbrišite trag** iz izbornika **Zaslon** da biste izbrisali prethodnu krivulju. Mijenjajući položaj točke  $B$  nacrtajte još nekoliko krivulja.

<sup>8</sup>Kao odgovor onima koji su mu prigovarali da život shvaća lagodnije, Ibn Sina (oko 980. - 1037.) je, kaže se, odgovorio: "Više volim kratak život sa širinom nego uzak s duljinom." Umro je u dobi od 58 godina.

<sup>9</sup>Ako ne želite da vam tragovi izblijede, provjerite je li okvir Izbljeđivanje Tragova tijekom vremena neoznačen na ploči Boja u dijaloškom okviru Postavke.

Za svaki novi položaj točke  $B$ , morate ponovno nacrtati krivulju. Idealno bi bilo da se vaša parabola automatski prilagođava dok pomičete točku  $B$ . Moćna naredba **Lokus** u Sketchpadu to omogućuje.

11. Isključite tragove točaka  $G$  i  $H$  tako što ćete ih odabrati i ponovno odabrati naredbu **Trag presjeka** iz izbornika **Zaslon**.
12. Sada odaberite točke  $G$  i  $C$ . Odaberite **Lokus** iz izbornika **Konstrukcija**. Ponovite to za točke  $H$  i  $C$ . Nacrtat ćete cijelu krivulju: lokus točaka  $G$  i  $H$ . Pomičite točku  $B$  kako biste mijenjali (ili promijenili) oblik krivulje.

## Pitanja

- P1** Dok povlačite točku  $B$ , koje značajke krivulje ostaju iste? Koje se značajke mijenjaju?
- P2** Tvorac ove tehnike, Ibn Sina, naravno, nije imao Sketchpad dostupan u desetom stoljeću! Koliko bi se ova konstrukcija razlikovala kada bi je provodili klasično, crtanjem šestarom i ravnalom?

## Geometrijska sredina

Izgleda da metoda širenja kružnice crta parabole, ali da biste dokazali zašto, morat ćete znati ponešto o *geometrijskoj sredini*.

**Geometrijska sredina** *dvaju brojeva,  $a$  i  $b$ , jednaka je  $\sqrt{ab}$ .*

*Ekvivalentno,  $x^2 = ab$ .*

Dakle, geometrijska sredina brojeva 4 i 9 je

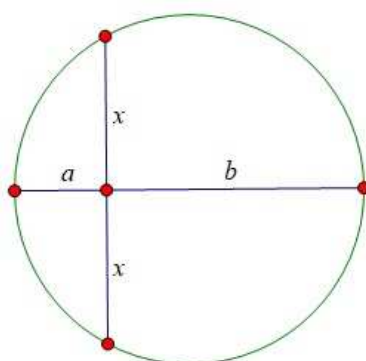
$$\sqrt{4 \cdot 9} = 6.$$

Moguće je geometrijski odrediti geometrijsku sredinu dvaju brojeva, a ne samo algebarski. Točnije, ako dva segmenta imaju duljine  $a$  i  $b$ , možemo konstruirati - bez mjerenja - treći segment duljine  $\sqrt{ab}$ .



13. Otvorite **Geometrijska sredina.gsp** u mapi **Parabola**.

Prikazana je kružnica čija je duljina promjera jednaka zbroju dviju dužina s duljinama  $a$  i  $b$  postavljenih jedne pored druge. Tetiva okomita na promjer je podijeljena na jednake segmente duljine  $x$ .



14. Upotrijebite Sketchpadov kalkulator za izračunavanje geometrijske sredine duljina  $a$  i  $b$ . Usporedite ovu vrijednost s  $x$ .



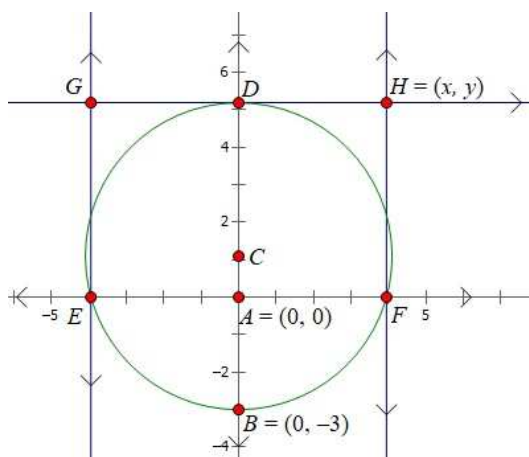
### Pitanja

- P3** Druga stranica **Geometrijska sredina.gsp** prikazuje dokaz koji pokazuje da je  $x$  geometrijska sredina od  $a$  i  $b$ . Dovršite dokaz.

### Kako to dokazati

S vašim znanjem geometrijske sredine, sada možete dokazati da točke  $G$  i  $H$  konstrukcije kružnice koja mijenja polumjer crta parabolu.

Budući da se položaj točke  $H$  mijenja kako kružnica raste i smanjuje se, označen je u nastavku kao  $(x, y)$ , koristeći varijable kao koordinate. Kako bismo stvari učinili konkretnijima, pretpostavit ćemo da je  $AB = 3$ .



### Pitanja

Pitanja koja slijede pružaju detaljan dokaz. Možete odgovoriti na njih ili prvo napisati vlastiti dokaz bez ikakvih savjeta.

- P4** Upišite duljine sljedećih dužina u terminima  $x$  i  $y$ :

$$\overline{AF} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$$

**P5** Primjenite svoje znanje o geometrijskoj sredini kako biste jednadžbom prikazali vezu duljina dužina  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AF}$  i  $\overline{AD}$ . Je li to jednadžba parabole?

**P6** Navedite argument koji objašnjava zašto točka  $G$  također prati parabolu.

**P7** Prepišite svoj dokaz, ovaj put ga učinivši općenitijim. Neka je  $AB = s$ .

### Istražite više



1. Otvorite sketch **Pravi kut.gsp** u mapi **Parabola**. Kut  $\angle DEB$  je konstruiran kao pravi kut. Pomaknite točku  $E$  i promatrajte trag točke  $G$  i njezinu refleksiju  $G'$ . Objasnite zašto je ovaj sketch u biti isti kao konstrukcija šireće kružnice.

### Projekti parabole

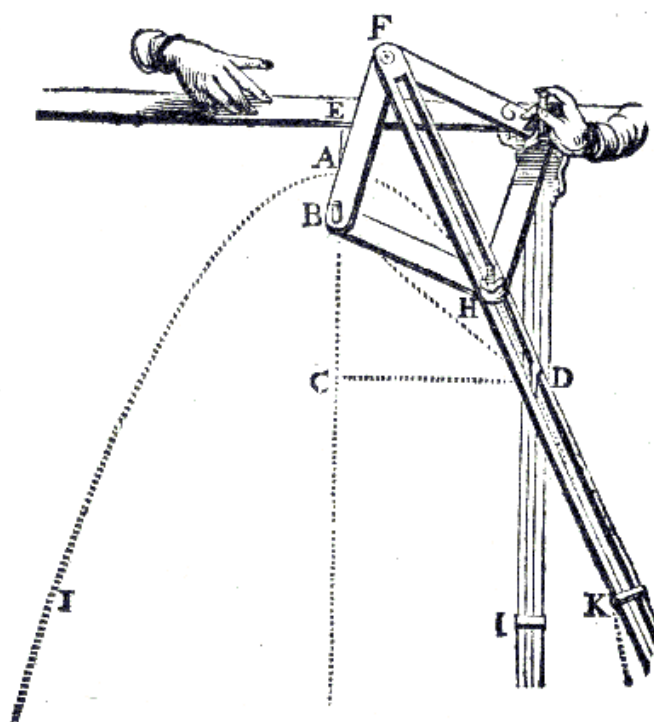
Projekti u nastavku proširuju vaše znanje o parabolama u novim smjerovima i idealni su za prezentacije u razredu.

1. Izradite vlastiti fizički model konstrukcije kliznog ravnala.
2. Izradite prilagođeni alat koji automatski crta parabolu s obzirom na ravnalicu i žarišnu točku.
3. U konstrukciji presavijenog pravokutnika, dobili ste pravac pregiba koji nastaje kada se točka  $B$  presavije na točku  $A$  konstruiranjem simetrale dužine  $AB$ . Zamislite sada da Sketchpadove naredbe **Polovište** i **Okomiti pravac** ne rade. Kako možete konstruirati pravac pregiba bez njih?

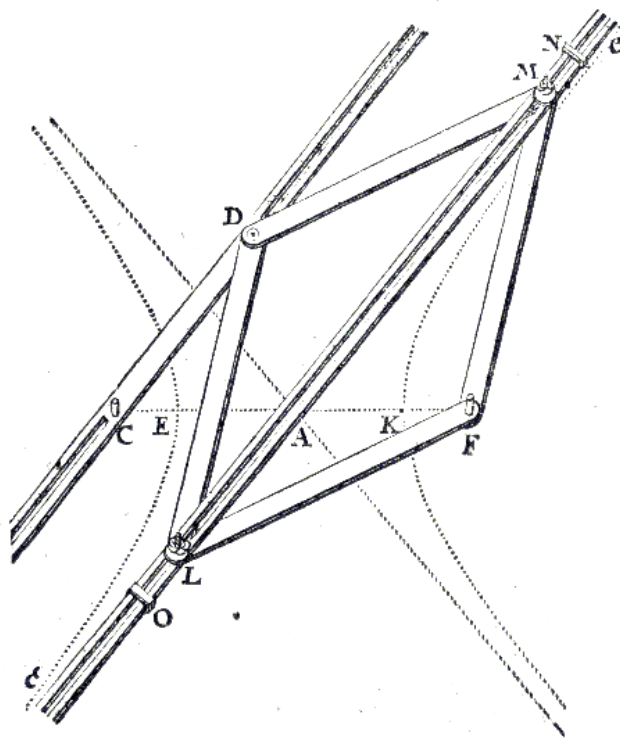
Na slici je dana još jedna mogućnost. Potječe od matematičara Fransa van Schootena iz sedamnaestog stoljeća i prikazuje romb  $EBFA$  s proreznom šipkom koja prolazi kroz točke  $E$  i  $F$ .



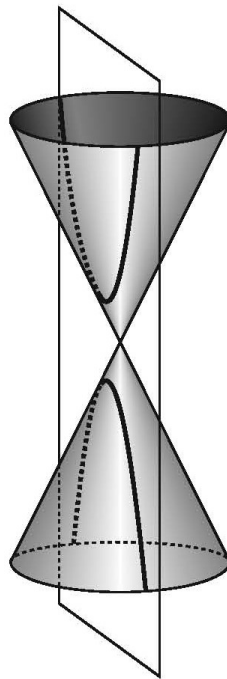
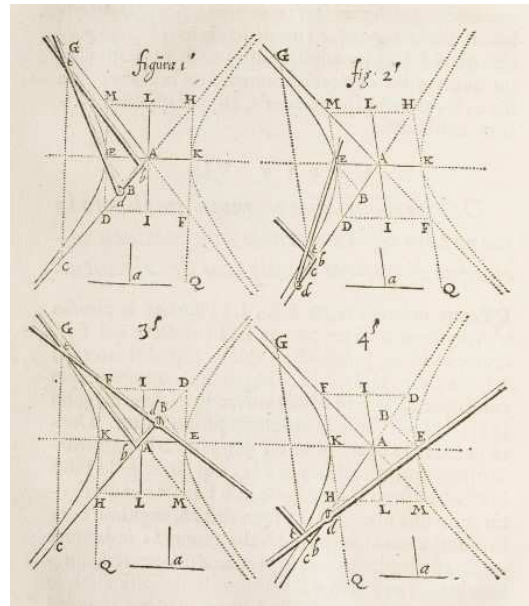
Otvorite sketch **Romb.gsp** u mapi **Parabola - aktivnosti** i poigrajte se s modelom. Po čemu je ovaj model sličan konstrukciji presavijenog pravokutnika? Koja je uloga romba?



### 3. Hiperbola



Izvornik crteža je knjiga iz 1656. godine  
Frans van Shooten: *Exercitationum Mathematicorum, Liber IV,*  
*Organica Conicarum Sectionum in Plano Descriptione*  
(Traktat o uređajima za crtanje konika)

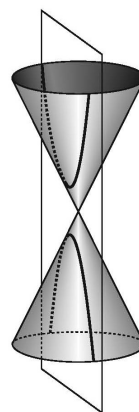


## Pregled poglavlja

Sjene koje baca na zid svjetiljka s cilindričnim sjenilom. Putanje kometa koji ulaze u unutarnji Sunčev sustav, a zatim ga zauvijek napuštaju. Zrcala u mnogim reflektirajućim teleskopima. Sve su to primjeri hiperboličkih krivulja.

Slika prikazuje dvostruki stožac koji je presiječen ravninom paralelnom s dvjema izvodnicama. Presjek ("konusni presjek") je hiperbola. Nakon uvoda i klasične definicije hiperbole u aktivnosti I., razne tehnike konstrukcije hiperbole predstavljene su u aktivnostima II. i III.

Ukupno ćete pronaći sedam metoda konstrukcija. Otvorite višestranični sketch **Obilazak hiperbole.gsp** u mapi bf Hiperbola - aktivnosti za praktičan pregled slajdova.



*Kada ravnina siječe obje polovice dvostrukog konusa, rezultat je hiperbola. Ravnina ne mora biti paralelna s osi dvostrukog konusa.*

### I. Uvod u hiperbolu

Zlatnici čekaju tragače za blagom koji uspješno primijene definiciju udaljenosti hiperbole.

### II. Konstrukcija koncentričnih kružnica

Definicija udaljenosti hiperbole služi kao odskočna daska za dvije konstrukcije hiperbole: jednu izgrađenu od koncentričnih kružnica, a drugu od rotirajućeg ravnala.

### III. Projekti s hiperbolom

Zakružite poglavlje s još hiperbolskih poslastica.

## Uvod u hiperbolu

Ime(na): \_\_\_\_\_

Što je potrebno da se pronađe zakopano blago? Karta, lopata - i biste li vjerovali, hiperbola ili dvije? Da, s ne više od dvije hiperbole možete pronaći skriveno zlato. Bit ćete na svom putu kada naučite definiciju ovih krivulja.

## Što je hiperbola

Evo klasične definicije hiperbole:



**Hiperbola je skup točaka  $P$  takav da je razlika udaljenosti od  $P$  do dvije fiksne točke (žarišta) konstantna.**

Ako otvorite sketch **Hiperbola.gsp** u mapi **Hiperbola - aktivnosti**, vidjet ćete hiperbolu zajedno s njezinim žarištima,  $F_1$  i  $F_2$ . Svaka hiperbola sastoji se od dvije odvojene grane. Točka  $P$  trenutno se nalazi na lijevoj grani hiperbole.

Za elipsu, *zbroj* udaljenosti od svake točke na krivulji do dva žarišta ostaje konstantan. Ali za hiperbolu, razlika tih udaljenosti ostaje konstantna.

Naravno, razlika dvaju brojeva je ili pozitivan ili negativan broj, ovisno o redoslijedu oduzimanja. Ako pomaknete točku  $P$  duž lijeve grane hiperbole, a zatim je pomaknete na desnu granu, vidjet ćete da se vrijednost  $PF_2 - PF_1$  mijenja iz pozitivne u negativnu.

Za hiperbolu, *apsolutna vrijednost*  $PF_2 - PF_1$  ostaje konstantna<sup>1</sup>.

Svaka hiperbola također ima dva pravca povezana s njom: *asimptote*. Pritisnite gumb *Prikaži asimptote* da biste ih vidjeli. Dvije grane hiperbole približavaju se tim pravcima, ali ih nikada ne dodiruju. Drugim riječima, udaljenost između grana i asimptota približava se nuli, ali je nikada ne doseže.

<sup>1</sup>Pomicanjem bilo koje žarišne točke na novu lokaciju promijenit će se vrijednost ove konstantne razlike.

## 'X' je mjesto

Legenda kaže da se na otoku Keypress nalazi zakopana škrinja s blagom puna zlata. Nakon godina traženja, pronalazite sljedeću bilješku:

Moje blago je dvije milje dalje od divovskog kamena (točka  $B$ ) nego svjetionik (točka  $L$ ). Također je jednu milju dalje od špilje (točka  $C$ ) nego zatvor (točka  $J$ ).



Otvorite sketch **Blago.gsp** u mapi **Hiperbola - aktivnosti** da biste vidjeli savjete u bilješci. Možete li točno odrediti mjesto gdje je blago zakopano?

Kao pomoć, sketch sadrži dvije hiperbole: jednu sa žarištima u  $B$  i  $L$ , drugu sa žarištima u  $C$  i  $J$ . Konstantnu razliku povezanu sa svakom hiperbolom možete promjenom duljine dužine koja se nalazi uz lijevi rub sketcha.

Objasnite svoju metodu i zašto funkcionira.

**Konstrukcija koncentričnim kružnicama**

Ime(na): \_\_\_\_\_

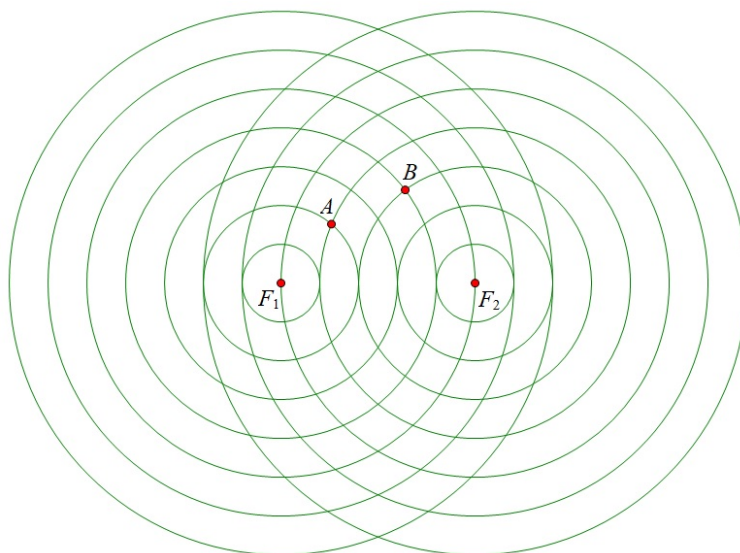
Koncentrične kružnice su kružnice koje imaju zajedničko središte. U ovoj aktivnosti koristit ćete dva skupa koncentričnih kružnica za ručno crtanje hiperbole. Zatim ćete prenijeti ovu tehniku u Sketchpad kako biste nacrtali hiperbolu čiji se oblik i veličina mogu prilagoditi jednostavnim pomicanjem miša.

**Crtaње hiperbole rukom**

Na crtežu su prikazana dva skupa koncentričnih kružnica. Jedan skup kružnica sa središtem je u točki  $F_1$ , a drugi u točki  $F_2$ . Za svaki skup, polumjeri kružnica povećavaju se za 1, od 1 jedinice sve do 7 jedinica.

Točke  $F_1$  i  $F_2$  su žarišta beskonačnog broja hiperbola, ali nas zanimaju samo dvije: jedna hiperbola koja sadrži točku  $A$  i druga koja sadrži točku  $B$ .

- P1** Koliko su jedinica udaljene točke  $A$  i  $F_1$ ? Koliko su jedinica udaljene točke  $A$  i  $F_2$ ? Kolika je numerička vrijednost  $AF_1 - AF_2$ ?
- P2** Pronađite i označite barem 16 točaka koje se nalaze na bilo kojoj grani hiperbole točkom  $A$ . Objasnite kako ste ih pronašli.
- P3** Pronađite i označite barem 16 točaka koje se nalaze na bilo kojoj grani hiperbole koja prolazi kroz točku  $B$ . (Koristite olovku u boji.) Objasnite kako ste ih pronašli.
- P4** Koristeći točke koje ste odredili, nacrtajte dvije hiperbole.



Bacanjem dva kamena u mirno jezerce možete stvoriti animiranu verziju koncentričnih kružnica. Otvorite sketch **Valovi.gsp** u mapi **Hiperbola - aktivnosti** i podmapi **Konstrukcija koncentričnih kružnica** i pritisnite gumb *Animirajte* da biste vidjeli neke valove i njihove prateće hiperbole.



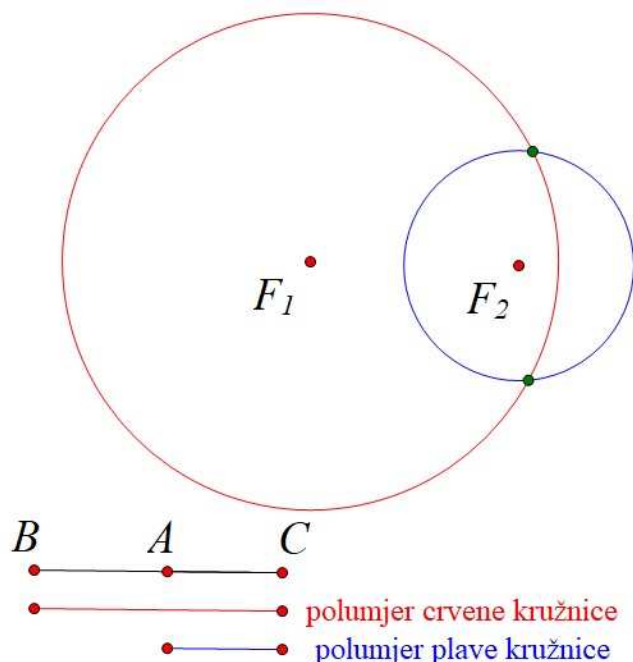
### Ispitivanje Sketchpadovog modela

Sada kada ste ručno nacrtali neke hiperbole, vrijeme je da ispitajte jednu dinamičnu: hiperbolu koja mijenja oblik kako se njezini dijelovi pomiču.



Otvorite sketch **Koncentrične kružnice.gsp** u mapi **Hiperbola - aktivnosti** i podmapi **Konstrukcija koncentričnih kružnica**.

Prikazane su dvije kružnice - jedna crvena, druga plava. Veličine ovih dviju kružnica kontroliraju segmenti na slici. Crvena kružnica ima polumjer  $AC$  i središte  $F_1$ , plava kružnica ima polumjer  $BC$  i središte  $F_2$ . Za upravljanje ovim modelom, pomičite točku  $C$ . Dok to radite, polumjeri će se prilagoditi i ostati jednaki  $AC$  i  $BC$ . Istovremeno, pratit ćete sjecišta dviju kružnica. Povucite točku  $C$  desno od točke  $B$ , a zatim natrag lijevo od točke  $A$ .



### Pitanja

**P5** Dok pomičete točku  $C$ , polumjeri obje kružnice mijenjaju duljine. Ipak, postoji odnos između dva polumjera kad god se točka  $C$  nalazi desno od točke  $B$  ili lijevo od točke  $A$ . Koji je to?

**P6** Objasnite zašto sjecišta dvije kružnice crtaju hiperbolu.

**P7** Odaberite dvije kružnice na zaslonu, odaberite **Trag kružnica** u izborniku Zaslon, a zatim pomaknite točku C.

Na temelju provedenog eksperimenta opišite sličnosti između vaše konstrukcije pomoću Sketchpada i tehnike koncentričnih kružnica.

### Metoda rotirajućeg ravnala



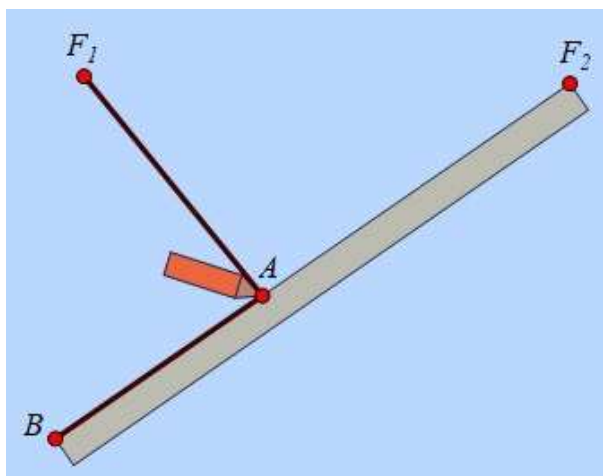
Otvorite sketch **Rotirajuće ravnalo.gsp** u mapi **Hiperbola - aktivnosti** i podmapi **Konstrukcija koncentričnih kružnica**. Vidjet ćete model ispod.

Pravokutnik predstavlja ravnalo koje rotira oko fiksne točke  $F_2$ .

Konopac je pričvršćen od točke  $F_1$  do kuta ravnala (točka  $B$ ).

Konopac je zategnut uz rub ravnala olovkom u točki  $A$ .

Pomicanjem olovke prema gore uz rub ravnala, ravnalo će se rotirati dok točka  $A$  crta dio hiperbole. Za upravljanje Sketchpadovim modelom pomaknite točku  $B$ .



### Kako to dokazati

Možete li dokazati da rotirajuće ravnalo crta hiperbole? Pokušajte sami razviti dokaz ili riješite sljedeća pitanja.

### Pitanja

**P8** Ako olovka u točki  $A$  doista crta hiperbolu sa žarištima u  $F_1$  i  $F_2$ , za koju vrijednost morate dokazati da je konstantna?

**P9** Objasnite zašto vrijedi sljedeća jednakost:

$$|(BA + AF_2) - (BA + AF_1)| = \text{konstanta}$$

**P10** Dovršite dokaz.

## Projekti s hiperbolom

Projekti u nastavku proširuju vaše znanje o hiperboli u novim smjerovima i idealni su za prezentacije u razredu.

1. U Konstrukciji presavijene kružnice (Poglavlje 1.) odabrali ste točku  $B$  unutar kružnice, a zatim ste kružnicu više puta presavili tako da su točke na njezinom rubu ležale na  $B$ . Obrisi pregiba formirali su elipsu.

Ako ste spremili sketch iz te aktivnosti, otvorite ga. Ako ne, otvorite **Revizija presavijene kružnice.gsp** u mapi **Hiperbola** i podmapi **Projekti hiperbole**.



Što će se dogoditi kada se točka  $B$  nalazi izvan kružnice? Pomaknite točku  $B$  da biste saznali. (Možda biste htjeli modelirati ovu konstrukciju i papirom - nacrtajte kružnicu na listu papira iz bilježnice, označite točku  $B$  izvan kružnice, a zatim točku  $B$  više puta presavijte na različite točke na rubu kružnice.)<sup>2</sup>

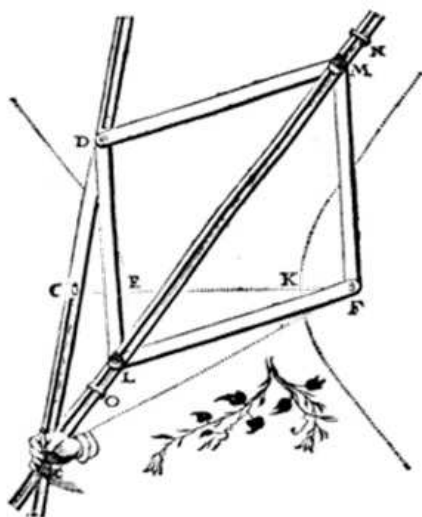
Možete li dokazati da ova modificirana konstrukcija generira hiperbole? Da biste to učinili, morat ćete pronaći koja je točka duž svakog pravca pregiba tangenta na hiperbolu.

2. U Projektu 1. konstruirali ste pravac pregiba koji nastaje kada se točka  $C$  preklopi s točkom  $B$  konstruiranjem simetrala dužine  $BC$ . Zamislite sada da su naredbe **Okomica** i **Polovište** u Sketchpadu neispravne. Kako možete konstruirati pravac pregiba bez njih?



Poveznica u nastavku od matematičara iz sedamnaestog stoljeća Fransa van Schootena nudi jednu mogućnost. Prikazuje romb  $FBGC$  s prorezanim štapom koji prolazi kroz točke  $F$  i  $G$ .

Kojoj svrsi služi romb? Po čemu je ovaj model sličan onom iz Projekta 1.?

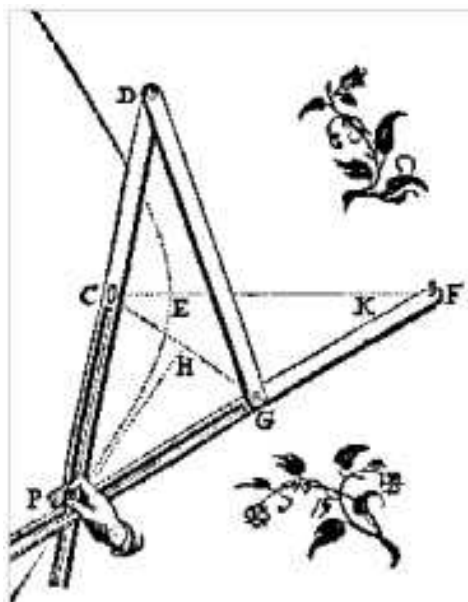


<sup>2</sup>Savjet: U konstrukciji savijene kružnice točkama  $A$  i  $C$  nacrtati dužinu. Pokušajte nešto slično ovdje.



**3.** Otvorite sketch **van Schooten.gsp** u mapi **Hiperbola - aktivnosti** i podmapi **Projekti hiperbole**. Prikazan je model iz sedamnaestog stoljeća matematičara Fransa van Schootena. Pomaknite točku  $C$  i promatrajte trag točke  $E$ .

Možete li dokazati da točka  $E$  crta hiperbolu? Druga stranica sketcha sadrži neke savjete za početak.



4. Sketch **Tangentne kružnice.gsp** u mapi **Hiperbola** i podmapi **Projekti hiperbole** prikazuje kružnicu  $c_3$  (crvenu) koja dira kružnice  $c_1$  i  $c_2$ . Pritisnite gumb *Animirajte* i promatrajte putanju točke  $C$  središta kružnice  $c_3$ .

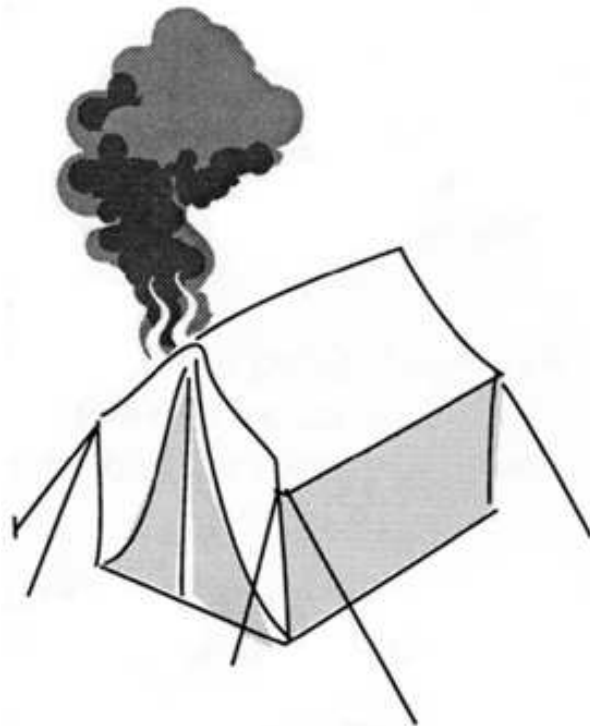
Možete li dokazati da  $C$  crta hiperbolu?



5. Pravokutne hiperbole imaju oblik  $xy = c$ , gdje je  $c$  konstanta.

Otvorite višestраниčni sketch **Područje.gsp** u mapi **Hiperbola - aktivnosti** i podmapi **Projekti hiperbole** kako biste saznali više o nekim primjenama ovih krivulja.

## 4. Optimizacija





## Pregled poglavlja

Što je zajedničko gorućem šatoru, kružnom bazenu i kaubojki?

Ništa, možda, osim što se sva tri pojavljuju u ovom poglavlju u problemima geometrijske optimizacije.

Možete li pronaći brz put do svog gorućeg šatora prije nego što ostane samo pepeo?

Možete li plivati do svog prijatelja uz minimalan napor?

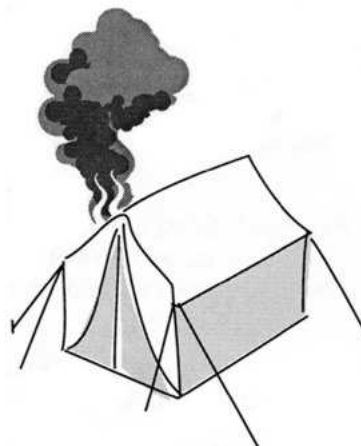
Možete li pomoći kaubojki da dovede svog konja do hrane i vode crtanjem najkraće udaljenosti jahanja?

Obično se tema optimizacije ne pojavljuje sve do računa, i tamo se obrađuje algebarski.

Račun je izvrstan alat, ali nije jedini način za rješavanje optimizacijskih problema.

Postoji samo jedan preduvjet za ovo poglavlje - elipse se općenito ne smatraju standardnim alatima za gašenje požara, ali možda bi trebale biti ...

Konstrukcija pribadačama i konopcem iz prvog poglavlja. Samo s tim, spremni ste pristupiti problemima optimizacije iz čisto geometrijske perspektive. Slijedite aktivnosti navedenim redoslijedom - poredane su tako da se nadovezuju jedna na drugu.



*Elipse se ne smatraju standardnim alatima za gašenje požara, ali možda bi trebale biti ...*

### I. Problem gorućeg šatora

Vaš šator za kampiranje je u plamenu, matematika vam priskače u pomoć dok određujete optimalno mjesto za prikupljanje prijeko potrebne vode.

### II. Problem bazena

Lijen dan u bazenu postaje matematički kada pristanete kupiti sljedeću rundu ledenih čajeva za prijatelja. Možete li pronaći najkraću udaljenost za veslanje bez da se oznojite?

### III. Optimizacijski projekt

Primijenite svoje znanje o optimizaciji na ovu kaubojsku zagonetku.

### Problem gorućeg šatora

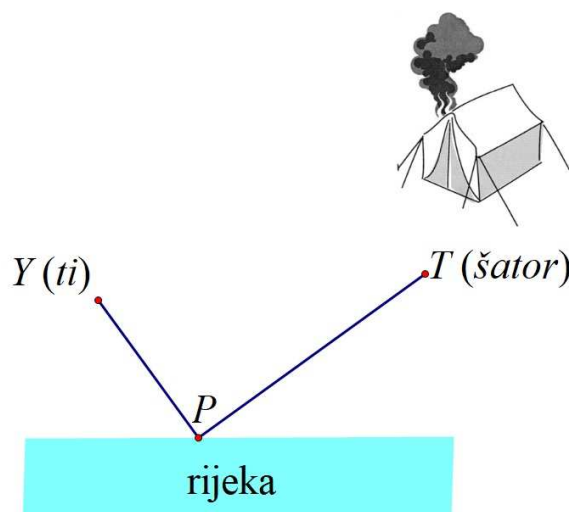
Ime(na): \_\_\_\_\_

Razmotrite sljedeću situaciju:

Ah, prekrasna priroda. Kampiranje, svježi zrak, zvjezdano noćno nebo i - vatra! Vaš šator gori! Srećom, vi (u točki  $Y$ ) imate kantu u ruci.

Odlucili se trčati do ruba rijeke, napuniti kantu i potrčati do svog šatora (točka  $T$ ) kako biste ugasili plamen.

Kamo biste se prema rijeci trebali uputiti kako biste smanjili ukupnu udaljenost trčanja? Slika ispod prikazuje jednu moguću lokaciju - točku  $P$  - do koje biste mogli trčati.



Ovo je primjer problema *optimizacije*. Pokušavate optimizirati udaljenost  $YP + PT$  kako biste je učinili što manjom.<sup>1</sup>

Ovaj se problem može riješiti algebarski, ali postaje vrlo kompliciran. Umjesto toga, istražiti ćete situaciju geometrijski, prvo špagom, zatim Sketchpadom.

### Izrada fizičkog modela

**Potrebni materijal:** Trebat će vam list papira (veći je bolji), malo špage, olovka, ravnalo i ljepljiva traka.

1. Nacrtajte pravac na papiru koja predstavlja rub rijeke. Ostavite prostor ispod pravca koji predstavlja vodu. Nacrtajte dvije točke,  $Y$  i  $T$ , koje predstavljaju vas i šator.
2. Odrežite komad konopa i pričvrstite njegove krajeve ljepljivom trakom ili pribadačama na točke  $Y$  i  $T$ . Ako se konop ne proteže ispod ruba rijeke kada se pričvrsti, odrežite duži komad ili premjestite  $Y$  i  $T$ .

<sup>1</sup>Da, priznajemo: Da nam šator stvarno gori, ne bismo ni mi stali računati!

## Pitanja

**P1** Bez ikakvih mjerenja, upotrijebite konop kako biste pronašli optimalno mjesto uz rijeku za prolazak. Objasnite svoju metodu.

Problem gorućeg šatora može se riješiti na nekoliko načina. Pitanja koja slijede opisuju jednu posebno zanimljivu tehniku. Dok odgovarate na pitanja, razmislite o sličnostima između vaše metode za pronalaženje optimalnog mjesta uz rub rijeke i one predstavljene ovdje.

Prije nego što počnete, provjerite je li vaš konop postavljen kao i prije, s krajevima pričvršćenima za točke  $Y$  i  $T$ . Konop treba biti dovoljno dug da se proteže ispod ruba rijeke kada se pričvrsti.

**P2** Olovkom zategnite konop tako da vrh olovke bude izravno na rubu rijeke. Nazovite tu točku  $P$ . Točka  $P$  je jedna lokacija uz rijeku do koje biste mogli trčati. Vjerojatno nije najbolja lokacija, ali će poslužiti kao početna pretpostavka.

Pomoću konopca pronađite drugu točku uz rub rijeke ekvivalentnu točki  $P$  u ukupnoj udaljenosti trčanja. Opišite kako ste pronašli točku.

**P3** Zanimajte se trenutak kontekst ovog problema. Upotrijebite konac i olovku za crtanje svih točaka, bilo na kopnu ili u vodi, ekvivalentnih  $P$  u ukupnoj udaljenosti. Opišite ovaj skup točaka.

Koju ste krivulju nacrtali?

**P4** Upotrijebite krivulju iz  $P3$  za određivanje dva intervala na rubu rijeke: one lokacije čija je ukupna udaljenost trčanja manja od one  $P$ -ove i one lokacije čija je ukupna udaljenost trčanja veća od one  $P$ -ove.

Objasnite kako ste pronašli ove intervale.

**P6** Kako biste trebali postupiti kako biste pronašli optimalnu lokaciju uz rijeku?

## Izrada Sketchpadovog modela

Ideje iz rješenja konopcem za problem gorućeg šatora mogu se primijeniti na odgovarajući Sketchpadov model. Evo kako:

- Otvorite sketch **Gorući šator.gsp** u mapi **Optimizacija - aktivnosti** i podmapu **Problem gorućeg šatora**. Vidjet ćete "vas" (točka  $Y$ ), šator (točka  $T$ ) i točku  $P$  uz rijeku do koje biste mogli trčati.
- Odaberite mapu **Elipsa - aktivnosti** i podmapu **Elipsa projekti** u kojoj je **Žarišta i točka.gsp**. Prilagođeni alat uzima bilo koje tri točke -  $F_1$ ,  $F_2$  i  $P$  - i konstruira elipsu sa žarištima u  $F_1$  i  $F_2$ , koja sadrži točku  $P$ .<sup>2</sup>



<sup>2</sup>Možda ste izgradili takav alat ako ste radili Projekt 6. iz mape Elipsa - aktivnosti i podmapu Elipsa projekti (Projekti elipse na stranici 29.). Ako jeste, upotrijebite ga umjesto toga.

## Pitanja

- P6** Upotrijebite alat **Elipsa sa žarištem** kako biste pronašli optimalnu lokaciju rijeke za trčanje. Kakav je odnos između elipse i rijeke na optimalnoj lokaciji?
- P7** Može li postojati više od jedne optimalne lokacije za ravnu rijeku? Objasnite.
- P8** Nacrtajte zavojitu rijeku (ručno, ako želite) za koju postoje dvije optimalne lokacije za trčanje. Uključite elipsu u svoj crtež kako biste obrazložili svoj odgovor.
- P9** Pretpostavimo da je bez obzira kamo ste trčali prema rijeci, ukupna udaljenost od vas (točka  $Y$ ) do rijeke i do šatora (točka  $T$ ) ista. Kako bi takva rijeka izgledala?

## Tehnika refleksije (tj. osne simetrije)

**Problem gorućeg šatora** prilično je star. Pojavljuje se u knjizi iz 1917. godine, *Zabava u matematici*, velikog majstora zagonetki Henryja Ernesta Dudeneya, gdje se naziva "Zagonetka mljekarice".

Dudeneyjeva metoda rješavanja problema potpuno se razlikuje od one koju ste upravo koristili. Slijedite dolje navedene korake kako biste razumjeli njegov pristup.



5. Otvorite sketch **Refleksija.gsp** u mapi **Optimizacija-aktivnosti** i podmapi **Problem gorućeg šatora**. Vidjet ćete sebe (točka  $Y$ ), šator (točka  $T$ ) i proizvoljnu točku  $P$  duž rijeke do koje biste mogli trčati.
6. Dvaput kliknite pravac koji predstavlja rub rijeke kako biste ga označili kao zrcalni pravac odraza. Pravac bi trebao kratko bljesnuti kako bi naznačio da je označen.
7. Odaberite točku  $T$  pomoću alata **Strjelica**. Zatim odaberite **Zrcalite** u izborniku Transformacije kako biste odrazili točku  $T$  preko ruba rijeke. Označite odraženu točku kao  $T'$ .
8. Točkama  $P$  i  $T'$  nactajte dužinu  $PT'$ .

## Pitanja

- P10** Objasnite zašto sljedeća jednakost vrijedi za bilo koji položaj točke  $P$ :

$$YP + PT = YP + PT'$$

- P11** Na temelju jednakosti iz P10, objasnite kako pronaći optimalni položaj točke  $P$ . Zatim upotrijebite alat elipse kako biste vidjeli daje li isti rezultat.
- P12** Riješite ovaj problem zrcaljenjem točke  $Y$  umjesto točke  $T$ .

**Problem s bazenom**

Ime(na): \_\_\_\_\_

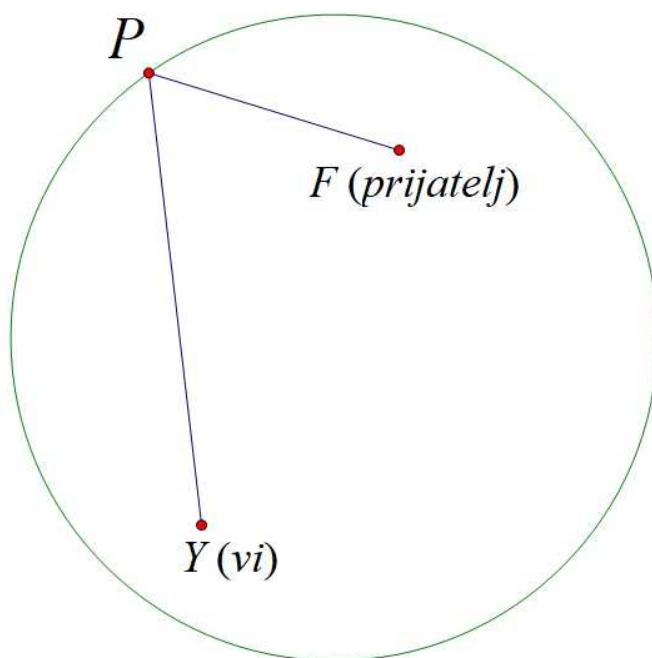
Sada kada ste ugasili plamen gorućeg šatora, što kažete na zasluženi odmor? Samo ste vi, prijatelj i bazen. Ali zar ne biste znali - elipsa iz problema sa šatorom se vraća! Čitajte dalje ...

**Čaj za dvoje**

Vi (u točki  $Y$ ) i vaš prijatelj (u točki  $F$ ) plutate na napuhanim ležaljka u kružnom bazenu. Konobari su postavljeni oko ruba bazena, a na vama je red da kupite dva ledena čaja.

Morat ćete veslati do ruba, kupiti piće i jedno dostaviti svom prijatelju. Gdje biste uz rub bazena trebali veslati kako biste minimizirali ukupnu udaljenost?

Slika ispod prikazuje jedan mogući put.



Otvorite prvu stranicu sketcha **Problem s bazenom.gsp** u mapi **Optimizacija-aktivnosti** i podmapu **Problem s bazenom**.

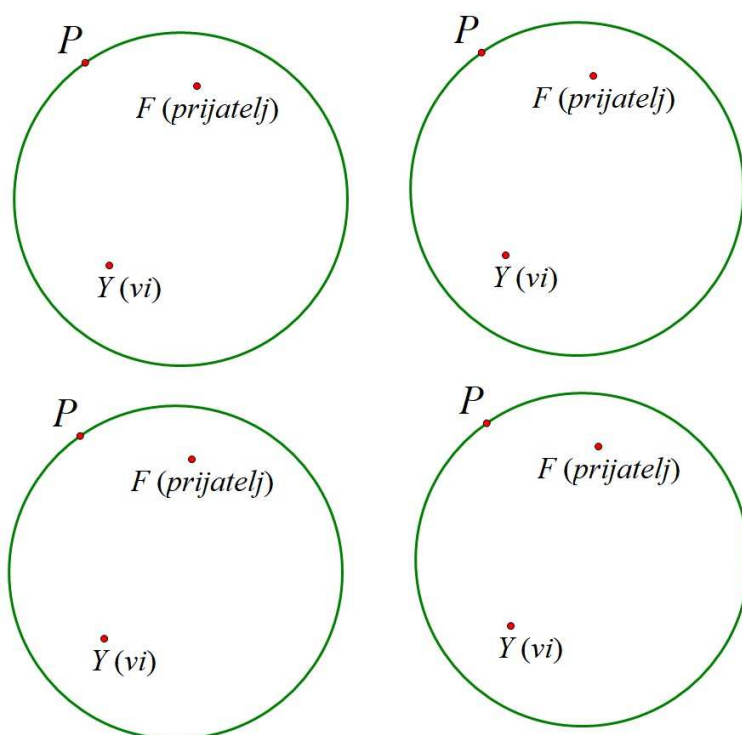
Osim bazena, vidjet ćete elipsu sa žarištima u točkama  $Y$  i  $F$  koja prolazi kroz proizvoljnu točku  $P$  na kružnici.

Pomaknite točku  $P$ . Elipsa se sama prilagođava, a  $Y$  i  $F$  ostaju žarišta.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Pokušajte promijeniti lokaciju točaka  $Y$  i  $F$ . Pritisnite gumb *Reset* kada završite.

## Pitanja

**P1** Uočite da postoje četiri položaja točke  $P$  u kojima elipsa dodiruje kružnicu. Kao i kod Gorućeg šatora, ove lokacije su posebne. Upotrijebite četiri nacrtane kružnice za crtanje četiri tangentne elipse.



**P2** Sada otvorite drugu stranicu sketcha i pomaknite točku  $P$ . Prikazana su četiri položaja točke na kružnici -  $P_2$  do  $P_5$  - odgovaraju diralištima koje ste nacrtali gore. Sketch također uključuje još dvije točke,  $P_1$  i  $P_6$ , kao odgovor.

Ovdje, bez određenog redoslijeda, nalaze se opisi lokacija  $P_2$  do  $P_5$ :

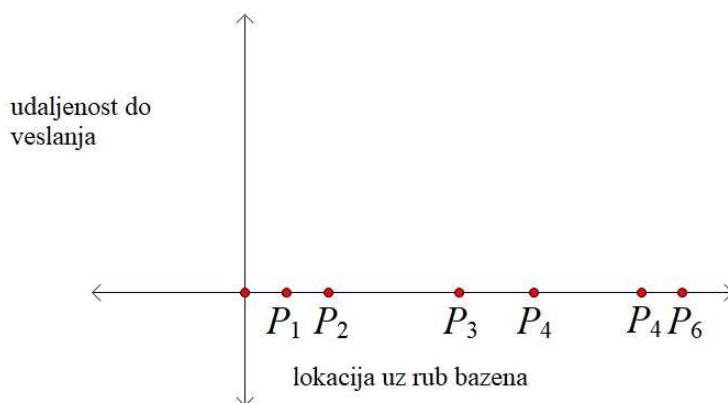
- Ova lokacija daje najkraću ukupnu udaljenost veslanja.
- Ova lokacija daje najdužu ukupnu udaljenost veslanja.
- Ova lokacija nije najbolja, ali je bolja od svih obližnjih lokacija s obje strane.
- Ova lokacija nije najgora, ali je gora od svih obližnjih lokacija s obje strane.

Spojite opise s lokacijama. Objasnite kako su vam položaji elipse, u odnosu na bazen, omogućili da izvučete svoje zaključke.

**P3** Od najkraće ukupne udaljenosti veslanja do najdulje, poredajte četiri lokacije  $P_2, P_3, P_4$  i  $P_5$ .

**P4** Na slici su dana dva međusobno okomita pravca za grafički prikaz. Horizontalna os predstavlja položaje uz rub bazena. Radi praktičnosti, šest mjesta je označeno -  $P_1$  do  $P_6$ . (Zamislite rub bazena odrezan, a zatim izravnani u dužinu.) Vertikalna os predstavlja ukupnu udaljenost potrebnu za veslanje do vašeg prijatelja.

Koristite informacije iz  $P_2$  i  $P_3$  za crtanje grubog grafa položaja uz rub u odnosu na ukupnu udaljenost veslanja. Graf ne mora predstavljati stvarne udaljenosti; radije nastojte da *oblik* grafa i *relativne* visine na  $P_1$  do  $P_6$  su što točnijima.



**P5** Vjerovali ili ne, upravo ste malo računali! U računu koristimo sljedeće termine za opis točaka na grafu: *apsolutni maksimum*, *apsolutni minimum*, *relativni maksimum*, *relativni minimum*.

Napravite informiranu pretpostavku o značenju ovih pojmova, a zatim spojite pojmove s točkama  $P_2$  do  $P_5$ .

**P6** Ako otvorite treću stranicu sketcha **Problem s bazenom.gsp** i pritisnete gumb *Prikažite graf*, vidjet ćete graf iz  $P4$ . Eksperimentirajte s njegovim oblikom pomicanjem položaja točaka  $Y$  i  $F$ .

Za koji položaj točaka  $Y$  i  $F$  bi cijeli graf bio horizontalan ili gotovo vodoravan?



## Optimizacijski projekt

Projekt u nastavku temelji se na vašem znanju iz **Problema gorućeg šatora** i **Problema s bazenom**.

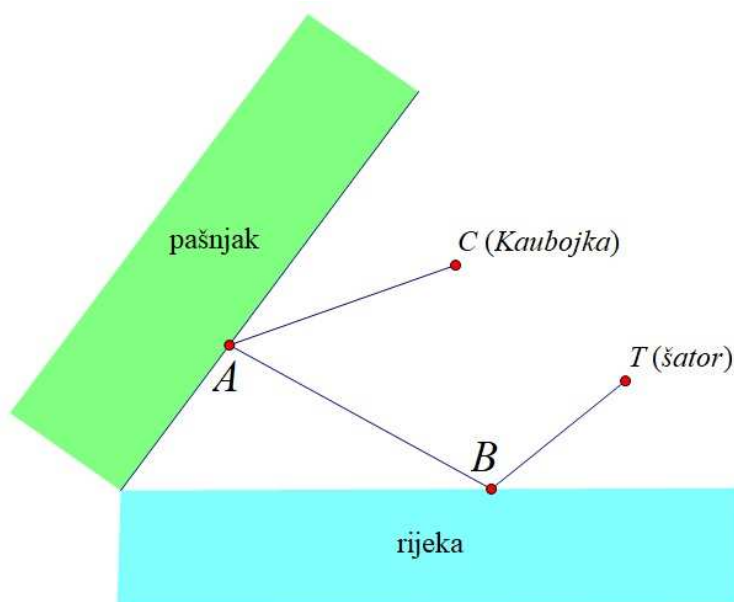
### Problem Kaubojke



Otvorite sketch **Kaubojka.gsp** u mapi **Optimizacija-aktivnosti** i podmapi **Problem kaubojke** i razmotrite sljedeću situaciju:

Kaubojka želi dati svom konju malo hrane i vode prije povratka u svoj šator. Počinje u točki  $C$  i odlučuje putovati prvo do pašnjaka, zatim do rijeke, a zatim natrag u svoj šator.

Kojim putem treba krenuti kako bi smanjila udaljenost jahanja?



Riješite ovaj problem na dva načina<sup>4</sup>: elipsama (koristite priloženi prilagođeni alat u **Demo modeli.gsp**) i refleksijom (osnom simstrijom). Mijenja li se vaše rješenje ako Kaubojka odluči prvo putovati do rijeke, a zatim na pašnjak?

<sup>4</sup>Točke  $A$  i  $B$  su dvije moguće lokacije na koje kaubojka može odvesti svog konja

## Bilješke o aktivnostima

**Početak:** Kada kružnica nije kružnica? (**stranica 7**)

**Preduvjeti:**

Ništa.

**Vještina rada sa Sketchpadom:**

Početnik.

**Vrijeme aktivnosti:**

10 minuta.

**Opće napomene:**

Ova aktivnost pruža brzi uvod za početnike o elipsama i njihovim žarištima.

**Dodatne aktivnosti:**

Nastavite s konstrukcijom pomoću pribadača i konopca.

**Konstrukcija s pribadačama i konopcem** (**stranica 8**)

**Preduvjeti:**

Definicija "žarišnih točaka" (obrađeno u prethodnoj aktivnosti, Početak).

**Vještina rada sa Sketchpadom:**

Početnik. Učenici koriste Sketchpadove alate za mjerenje i izračun.

**Vrijeme aktivnosti:**

40-50 minuta.

**Opće napomene:**

Ova aktivnost uvodi klasičnu definiciju elipse:

*Skup svih točaka  $P$  takvih da je  $PF_1 + PF_2$  konstantan za fiksne točke  $F_1$  i  $F_2$ .*

Kao alternativu korištenju ploče od pluta i pribadača, možete izgraditi svoj model lijepljenjem krajeva konopca na veliki komad papira.

Učenicima će možda trebati pomoć pri prelasku s modela s pribadačama i konopcem na definiciju udaljenosti uvedenu u pitanjima 9 i 10.

**Dodatne aktivnosti:**

I aktivnosti Konstrukcija koncentričnih kružnica i Neki odnosi elipse su dobar izbor.

**Konstruiranje fizičkog modela**

**P1** Elipsa je simetrična obzirom na dva pravca. Ovi pravci (kako je definirano

u pitanju 7) su okomiti i nazivaju se *glavna* i *sporedna os*.

Presjek dviju osi je središte elipse. Elipsa ima rotacijsku simetriju od  $180^\circ$  oko svog središta.

**P2** Kada su krajevi konopa udaljeniji, elipsa je "tanja" i izduženija.

**P3** Kada su krajevi konopa blizu jedan drugome, elipsa je "deblja" i izgleda više kao kružnica.

**P4** Olovka će nacrtati pravac. Ovo i sljedeće pitanje ilustriraju dva "degenerirana" slučaja elipse: pravac i kružnica.

**P5** Kada su oba kraja konopa pričvršćena na istu pribadaču, olovka i niti tvore šestar. Tako će olovka nacrtati kružnicu.

**P6** Tvoj prijatelj bi trebao znati duljinu konopa i udaljenost između pribadača. (Naravno, bilo bi teško točno reproducirati elipsu bez znanja koliko konopa si upotrijebio za vezanje uzlova oko pribadača!)

**P7** Osi možete definirati kao dvije okomite dužine simetrije, pri čemu dulja dužina (glavna os) sadrži žarišta. Osi možete definirati i kao najdulju i najkraću dužinu "središtem" elipse. Što se događa kada je elipsa kružnica? Imaju li kružnice glavne i sporedne osi?

**P8** Preklopite papirnatu elipsu dva puta tako da se njezini rubovi savršeno poravnaju svaki put. Dulji pregib je glavna os.

## Otkrijmo varalicu

**P9** Nacrtajte dužine od točke  $A$  do  $F_1$  i  $F_2$ . Oni predstavljaju konopac pričvršćen za  $F_1$  i  $F_2$  zategnut. Izmjerite dužine dužina i zatim ih zbrojite. Sada nacrtajte dužine koje se protežu od točke

$B$  do žarišta i od točke  $C$  do žarišta. Kao i kod točke  $A$ , izračunajte  $BF_1 + BF_2$  i  $CF_1 + CF_2$ . Vidjet ćete da je zbroj duljina konopa do točke  $A$  jednak zbroju duljina konopa do točke  $B$ . Međutim, zbroj za točku  $C$  je nešto manji. Dakle, točka  $C$  ne leži na elipsi koja prolazi kroz točke  $A$  i  $B$ .

**P10** Elipsa je skup točaka  $P$  takav da je sljedeća vrijednost konstantna za sve lokacije  $P$ :  $PF_1 + PF_2$ , gdje su  $F_1$  i  $F_2$  žarišta.

## Konstrukcija koncentričnih kružnica (stranica 10)

### Preduvjeti:

Definicija elipse (o čemu se raspravljalo u prethodnoj Konstrukciji pribadačama i konopcem).

### Vještina rada sa Sketchpadom:

Srednja razina. Učenici koriste naredbu **Kružnica:središte+polumjer** iz izbornika **Konstrukcije** i i slijede korake proširene konstrukcije. Alternativno, početnici mogu pogledati unaprijed izgrađeni sketch **Koncentrične kružnice.gsp** (mapa **Elipsa - aktivnosti** i podmapa **Koncentrične kružnice konstrukcija**).

### Vrijeme aktivnosti:

50-60 minuta. Ako je vremena malo, koristite unaprijed pripremljeni sketch **Koncentrične kružnice.gsp** (mapa **Elipsa- aktivnosti** i podmapa **Koncentrične kružnice konstrukcija**).

### Opće napomene:

Ova aktivnost pruža puno vježbe u primjeni klasične definicije elipse. Učenicima će možda

trebati pomoć u razumijevanju kako se koncentrične kružnice mogu koristiti za mjerenje udaljenosti.

### Dodatne aktivnosti:

I aktivnosti Neki odnosi elipse i Konstrukcija presavijene kružnice su dobar izbor.

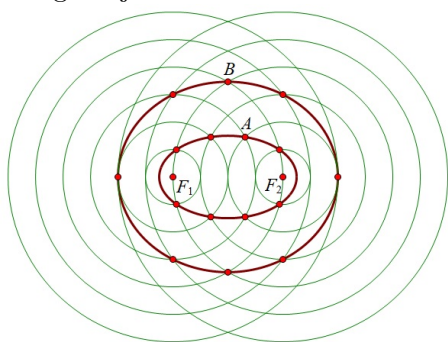
### Skiciranje elipsa ručno

**P1** Točka  $A$  leži na kružnici sa središtem u  $F_1$  i polumjerom 3. Dakle,  $AF_1 = 3$  jedinice. Slično,  $AF_2 = 2$  jedinice. Dakle,  $AF_1 + AF_2 = 5$  jedinica.

**P2** Sve točke  $P$  koje leže na elipsi koja prolazi kroz točku  $A$  moraju zadovoljavati jednakost  $PF_1 + PF_2 = 5$  jedinica. Pogledajte sliku ispod.

**P3** Sve točke  $P$  koje leže na elipsi koja prolazi kroz točku  $B$  moraju zadovoljavati jednakost  $PF_1 + PF_2 = 8$  jedinica.

**P4** Pogledajte sliku.



### Konstruiranje Sketchpadovog modela

**P5** Bez obzira na položaj točke  $C$ , zbroj dva polumjera -  $AC + CB$  - jednak je konstantnoj duljini  $AB$ .

**P6** Neka je  $P$  točka presjeka dviju kružnica. Tada udaljenost od  $P$  do  $F_1$  je  $AC$ , a udaljenost od  $P$  do  $F_2$  je  $CB$ . Zbrajanjem ove dvije duljine govorimo

da je kombinirana udaljenost  $P$  od  $F_1$  i  $F_2$  je  $AC + CB = AB$ , što je konstanta. Dakle, točke presjeka kružnica predstavljaju sve točke čije udaljenosti od  $F_1$  i  $F_2$  daju konstantu  $AB$ .

**P7** Udaljenost između  $F_1$  i  $F_2$  mora biti manja od duljine  $AB$ .

**P8** Pomicanjem točke  $C$  duž  $\overline{AB}$  nastaju dva skupa koncentričnih kružnica - jedan sa središtem u  $F_1$ , drugi sa središtem u  $F_2$ . Ovaj Sketchpadov model je *kontinuirana* verzija onoga što je započelo kao *diskretne* koncentrične kružnice na papiru.

### Istražite više

1. Prilagođavanjem parametara sketcha moguće je nacrtati hiperbolu. Za više informacija pogledajte Konstrukcija koncentričnih kružnica u poglavlju Hiperbola.
2. Sketch **Konstantni opseg.gsp** (mapa **Elipsa**) pruža model takvog pravokutnika.

### Neki odnosi elipse (stranica 13)

### Preduvjeti:

Konstrukcija pribadača i konopca. Pitanje 2 zahtijeva Pitagorin poučak.

### Vještina rada sa Sketchpadom:

Početak. Učenici manipuliraju unaprijed izgrađenim sketchom i koriste Sketchpadove alate za mjerenje i izračun.

### Vrijeme aktivnosti:

40-50 minuta.

### Opće napomene:

Ova aktivnost uvodi algebarske odnose između glavne osi, sporedne osi i žarišnih točaka elipse putem interaktivnog geometrijskog modela.

### Dodatne aktivnosti:

Konstrukcija presavijene kružnice.

### Određivanje duljina

**P1** Pomaknite točku  $P$  tako da leži na vrhu točke  $B$ . "Niz" sada leži ravno duž glavne osi s dvostrukom debljinom između točaka  $F_2$  i  $B$ . (Možda biste željeli pomaknuti točku  $P$  malo iznad točke  $B$  kako biste se podsjetili na dva sloja.) Budući da je  $AF_1 = F_2B$ , možemo zamisliti pomicanje jednog sloja dvostruke debljine na  $\overline{AF_1}$ . Glavna os je stoga jednake duljine niti.  $AB = 20$  jedinica.

**P2** Pomaknite točku  $P$  tako da preklapa točku  $D$ . Trokut  $POF_2$  je pravokutni trokut, pa prema Pitagorinom poučku:

$$(OF_2)^2 + (OP)^2 = (PF_2)^2$$

Zamjenom  $OF_2 = 12$  jedinica i  $PF_2 = 10$  jedinica u gornju jednadžbu i rješavanjem za  $OP$  dobiva se  $OP = 6$  jedinica. Dakle, sporedna os je duga 12 jedinica.

**P3** Odgovori će varirati.

### Ekscentričnost

**P4** Ekscentričnost elipse približava se 0 kada se žarišta približe jedno drugome. Ekscentričnost se približava 1 kada se duljina dužine  $\overline{F_1F_2}$  približno jednaka duljini dužine  $\overline{AB}$ .

Ekscentričnosti blizu 0 daju elipsu koja je gotovo kružnica. Ekscentričnosti vrlo blizu 1 daju elipse koje je teško razlikovati od dužine.

Zašto naglašavamo riječ *vrlo*? Čak ni elipsa s ekscentričnosti od 0,99 nije ni približno tako ravna kao što biste mogli pomisliti. Isprobajte sa Sketchpadom!

**P5** Budući da se ekscentricitet mjeri kao omjer, beskonačan broj elipsa dijeli isti ekscentricitet. Neformalno, elipse s jednakim ekscentricitetom imaju isti oblik.

Elipsu možete povećati ili smanjiti pomoću fotokopirnog uređaja kako biste dobili drugu elipsu s identičnim ekscentricitetom.

### Istražite više

1. Iz pitanja 2 znamo da je udaljenost od svake žarišne točke do točke  $D$  polovica duljine konopca.

Dakle, da biste pronašli žarišta elipse, treba nacrtati kružnicu sa središtem u točki  $D$  s polumjerom jednakim polovici duljine konopca. Sjecišta ili presjeci ove kružnice s glavnom osi određuju žarišta.

2. Pluton ima najveći ekscentricitet s vrijednošću od 0,248. Ako prilagodite elipsu u **Ekscentričnost.gsp** kako biste uočili ovu vrijednost, vidjet ćete da krivulja izgleda vrlo kružno.

### Konstrukcija presavijene kružnice (stranica 15)

### Preduvjeti:

Da bi učenici dovršili dokaz, moraju znati definiciju elipse i poučak SKS o sukladnosti trokuta.

## Vještina rada sa Sketchpadom:

Srednja. Učenici crtaju simetralu dužine i slijede korake proširene konstrukcije. Alternativno, početnici mogu pogledati sketch **Demo model.gsp** (mapa **Elipsa - aktivnosti**), koji sadrži unaprijed izgrađene modele svega.

## Vrijeme aktivnosti:

70-80 minuta. Ako je vremena malo, koristite unaprijed izgrađeni sketch **Demo model.gsp** (mapa **Elipsa - aktivnosti**). Dokaz se može zadati za domaću zadaću.

## Opće napomene:

Od svih metoda konstrukcije elipse, ova će najvjerojatnije izazvati "ooh" i "aah". Nakon što učenici shvate presavijanje svojih kružnica, nevjerojatno im je gledati kako se njihovi pregibi postupno spajaju u obris elipse. Ekvivalentni Sketchpadov model je jednako impresivan.

## Dodatne aktivnosti:

Konstrukcija presavijenog pravokutnika (poglavlje o paraboli) sadrži istu tehniku savijanja papira i metodu dokaza kao i ova aktivnost. Pogledajte i drugi projekt naveden u Projektima elipse i prvi projekt naveden u Projektima hiperbole.

Konstrukcija sukladnih trokuta ne uključuje savijanje papira, ali dijeli istu osnovnu geometriju i strukturu dokaza kao i presavijena kružnica.

## Konstruiranje fizičkog modela

- P1** Točke  $A$  i  $B$  su žarišta.
- P2** Elipsa bi izgledala "tanje" i izduženije.
- P3** Elipsa bi izgledala "deblje" i više nalikovala kružnici.

## Konstruiranje Sketchpadovog modela

U koraku 11., učenici moraju proučiti geometriju svojih pravaca pregiba. Konkretno, s obzirom na točke  $C$  i  $B$ , kako koristite Sketchpad za konstruiranje "pregiba" nastalog kada se  $C$  preklopi na  $B$ ? (Pregib je simetrala dužine  $CB$ .)

Kao pripremu za ovaj korak konstrukcije, možete zamoliti učenike da uzmu novi list papira iz bilježnice, označe dvije nasumične točke, preklope jednu na drugu, a zatim rasklope papir. Koji je geometrijski odnos pravca pregiba prema dvjema točkama?

- P4** Elipsa postaje "tanja" i izduženija.
- P5** Elipsa postaje "deblja" i više nalikuje na kružnici.
- P6** Svi pregibi prolaze kroz središte kružnice, točku  $A$ .
- P7** Pregibi ocrtavaju kružnicu.

## Igranje detektiva

U koraku 21., učenici trebaju konstruirati diralište za svoju elipsu. Diralište tangente leži na sjecištu pravca pregiba i dužine  $AC$ .

## Kako to dokazati

- P8** Budući da je pravac pregiba simetrala dužine  $BC$ , imamo  $DB = DC$  i  $\angle EDB = \angle EDC = 90^\circ$ . I, naravno,  $ED = ED$ . Dakle, prema poučku SKS o sukladnosti trokuta,  $\triangle BED \cong \triangle CED$ .
- P9** Budući da je  $\triangle BED \cong \triangle CED$ , odgovarajuće stranice  $BE$  i  $CE$  su jednake.
- P10** Ako točka  $E$  crta elipsu, tada  $AE + BE$  mora biti konstantno. Zamjenom  $CE$  za  $BE$  dobivamo:

$$AE + BE = AE + CE = AC$$

jednak polumjeru kružnice koji je konstantan

### Istražite više

1. Kada točka  $B$  leži izvan kružnice, pre-gibi ocrtavaju hiperbolu. Primamljivo je pomisliti da kada točka  $B$  leži na kružnici, pregibi će tvoriti parabolu, ali zapravo ne! Pogledajte Konstrukciju presavijenog pravokutnika za presavijenu parabolu od papira.

2.  $\angle AEH = \angle CED$  jer su to okomiti kutovi. Budući da je  $\triangle BED \cong \triangle CED$  imamo  $\angle CED = \angle BED$ . Spajanjem ove dvije jednakosti dobivamo  $\angle AEH = \angle BED$ .

(Oglas na cijeloj stranici za eliptične biljarske stolove pojavio se u izdanju *The New York Timesa* od 1. srpnja 1964. Glumci Paul Newman i Joanne Woodward pojavili su se u trgovini kako bi promovirali igru.

Na srodnu temu, učenici mogu pretraživati internet za informacije o svojstvima refleksije zvuka "šaputajućih galerija".)

3. Točke  $A$  i  $B$  su žarišta elipse.

$$BC + CA = (r + p) + (R - p) = r + R$$

što je konstanta

### Konstrukcija sukladnih trokuta (stranica 19)

#### Preduvjeti:

Da bi učenici dovršili dokaz, morat će znati definiciju elipse i poučke SSS i KKS o sukladnosti trokuta. Ako izostavite dokaz, nema preduvjeta.

#### Vještina rada sa Sketchpadom:

Početak.

#### Vrijeme aktivnosti:

30-40 minuta. Ako je vremena malo, dokaz možete zadati za domaću zadaću.

#### Opće napomene:

Dokazivanje da ova metoda daje elipse pruža vrlo lijepu primjenu kongruentnosti trokuta.

#### Dodatna aktivnost:

Konstrukcija presavijene kružnice dijeli istu osnovnu geometriju i strukturu dokaza.

#### Pitanja

**P1** Točke  $A$  i  $B$  su žarišta.

**P2** Duljina plavog segmenta jednaka je udaljenosti između žarišta. Kako raste, elipsa postaje sve izduženija.

**P3** Pravac je tangenta elipse u točki  $E$ . Drugim riječima, to je jedinstveni pravac koji prolazi točkom  $E$  i dodiruje elipsu točno jednom.

#### Kako to dokazati

**P4** Dano nam je da je  $AB = FC$  i  $BF = CA$ . I, naravno,  $AF = AF$ . Dakle,  $\triangle ABF \cong \triangle FCA$  prema poučku SSS o sukladnosti trokuta.

**P5**  $\angle FCA = \angle ABF$

**P6** Znamo da je  $\angle FCA = \angle ABF$ ,  $\angle FEC = \angle AEB$  (to su međusobno okomiti kutovi) i  $AB = FC$ . Dakle, prema poučku KKS o sukladnosti trokuta je  $\triangle AEB \cong \triangle FEC$ .

Intuitivno se može vidjeti da je  $\triangle AEB \cong \triangle FEC$  primjećujući da je  $\triangle AEB$  refleksija  $\triangle FEC$  preko tangente stvorene u pitanju 3.

**P7** Budući da je  $\triangle AEB \cong \triangle FEC$  njihove odgovarajuće stranice  $AE$  i  $FE$  su jednake duljine.

**P8** Ako točka  $E$  crta elipsu, tada  $AE + EB$  mora biti konstantno. Zamjenom  $AE$  s  $FE$  dobivamo:  $AE + EB = FE + EB = BF$  jednako duljini štapa koja je konstantna.

### Istražite više

1. Zamislite da okrećete štap  $FC$  tako da se dužine  $BF$  i  $CA$  više ne sijeku. Dobiveni četverokut  $ABFC$  je paralelogram.
2. Točka  $C$  prati kružnicu sa središtem u točki  $A$ . Ako biste "preklopili" točku  $C$  na rubu kružnice na točku  $B$ , dobiveni pregib bi se podudarao s pravcem koji ste konstruirali u pitanju 3.

### Stolarska konstrukcija (stranica 21)

#### Preduvjeti:

Da bi učenici dovršili dokaz, trebat će im određeno poznavanje Pitagorinog poučka i trigonometrije sličnih trokuta ili pravokutnog trokuta. Odjeljak o dokazu pruža brz uvod u algebarski oblik elipse, ali možda biste prvo trebali konzultirati udžbenik za detaljnije objašnjenje.

Ako izostavite dokaz, učenici će trebati samo znati definiciju glavne i sporedne osi elipse.

#### Vještina rada sa Sketchpadom:

Početak.

#### Vrijeme aktivnosti:

70-80 minuta. Ako je vremena malo, možete zadati dio s dokazima za domaću zadaću.

#### Opće napomene:

Ova aktivnost koristi uređaj poznat kao *elipsograf* ili *šestar za elipse*. U usporedbi sa standardnom tehnikom pribadača i konopca koja se nudi u većini udžbenika (i ovdje u drugoj aktivnosti), elipsograf nudi sljedeće prednosti:

- Crtanje elipse s određenim duljinama glavnih i sporednih osi jednostavan je proces (vidi pitanje 2).
- Dokazivanje da elipsograf crta elipse uključuje malo algebarske zbrke.

#### Dodatna aktivnost:

Dannyjeva elipsa dijeli gotovo identičnu strukturu dokaza, kao i klizne ljestve u pitanju 3 "Istražite više".

#### Konstrukcija fizičkog modela

**P1** Kada je točka  $B$  blizu točke  $A$ , ravnalo crta gotovo kružnu elipsu. Ako zamislite da stojite na udaljenosti od ravnala, bilo bi teško razlikovati njegovo kretanje od šestara.

Kada je točka  $B$  blizu točke  $C$ , elipsa je "tanka" i izdužena.

**P2** Duljina  $AC$  jednaka je polovici glavne osi elipse, a duljina  $BC$  jednaka je polovici sporedne osi. Stoga biste trebali postaviti točke tako da  $AB$  bude 4 cm, a  $BC$  6 cm.

**P3** Strogo govoreći, elipsograf ne može crtati kružnice. Točka  $B$  trebala bi se preklopiti s točkom  $A$ .

#### Kako to dokazati

**P4** S obzirom na duljine na slici, imamo elipsu s glavnom osi duljine 18 i sporednom osi duljine 6. Zamjenom  $a = 3$  i  $b = 9$  u jednadžbi elipse dobivamo

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{81} = 1$$

**P5**  $BD = x$ ;  $CE = y$ ; prema Pitagorinom poučku  $CD = \sqrt{9 - x^2}$

**P6** Prvo, riješimo ovaj problem sa sličnim trokutima:

Imamo  $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ , budući da oba trokuta sadrže prave kutove i  $AE$  je paralelan s  $BD$ . S obzirom na ovaj odnos, možemo zapisati proporciju

$$\frac{CE}{AC} = \frac{CD}{BC}$$

Zamijenite  $AC = 9$ ,  $BC = 3$  i vrijednosti iz pitanja 5 u ovu jednadžbu. Kvadrirajte obje strane i preuredite članove. Iz zadatka 4. izvest ćete predviđenu jednadžbu elipse.

Sada riješimo problem koristeći trigonometriju:

Neka je  $\angle CAE = \angle CBD = \theta$ . Tada iz  $\triangle ACE$  imamo  $\sin(\theta) = \frac{CE}{AC}$ . A  $\triangle BCD$  daje  $\cos(\theta) = \frac{BD}{BC}$ . Budući da je  $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ , možemo napisati

$$\left(\frac{y}{9}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 1$$

**P7** Opća jednadžba je

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{y}{s+t}\right)^2 = 1$$

### Istražite više

1. Za pomoć pri izgradnji elipsografa od nule, otvorite prvu stranicu sketcha **Stolar.gsp** (mapa **Elipsa - aktivnosti**) i odaberite **Prikažite sve skriveno** u izborniku **Zaslon**.
2. Budući da je duljina dužine  $\overline{AC}$  polovica duljine glavne osi u Stolarskoj konstrukciji, crtamo kružnicu s polumjerom  $AC$  centriranim na bilo kojoj

krajnjoj točki manje osi. Presjecišta ove kružnice s glavnom osi određuju žarišta.

3. Kanta prati četvrtinu elipse (vidi sketch **Ljestve.gsp** u mapi **Elipsa - aktivnosti**). Da biste to dokazali, nacrtajte dužine točkom  $E$  usporedneno s osima  $x$  i  $y$ . Zatim, kao i kod elipsografa, upotrijebite ili sličnost trokuta ili trigonometriju za izvođenje jednadžbe.
4. Nazovite krajnje točke ljestava  $A$  i  $B$ . Kanta se nalazi na pola puta između njih u točki  $M$ . Neka je  $O$  točka u kojoj zid dira tlo.

Budući da je  $AOB$  pravokutni trokut, poučak nam govori da je  $OM = AM$ . Ovaj odnos vrijedi za bilo koji položaj ljestava. Budući da se duljina  $AM$  ne mijenja  $OM$  također ostaje konstantna. Dakle, dok ljestve klize niz zid, točka  $M$  ostaje na fiksnoj udaljenosti od točke  $O$ . Drugim riječima, točka  $M$  crta kružnicu.

5. Druga stranica sketcha uključuje kratko istraživanje i pitanje.

### Dannyjeva elipsa (stranica 27)

#### Preduvjeti:

Da bi učenici dovršili dokaz, trebat će im određeno poznavanje Pitagorinog poučka i trigonometrije sličnih trokuta ili pravokutnog trokuta. Odjeljak s dokazima pruža brz uvod u algebarski oblik elipsa, ali možda biste prvo trebali konzultirati udžbenik za detaljnije objašnjenje.

Ako izostavite dokaz, nema preduvjeta.

#### Vještina rada sa Sketchpadom:

Srednja. Učenici konstruiraju nekoliko okomitih pravaca i slijede korake proširene konstrukcije. Alternativno, početnici mogu pogle-

dati unaprijed izgrađeni sketch **Danny.gsp** (mapa **Elipsa - aktivnosti**).

### Vrijeme aktivnosti:

60-70 minuta. Ako je vremena malo, koristite unaprijed pripremljeni sketch **Danny.gsp**. Također možete zadati odjeljak s dokazima za domaću zadaću.

### Opće napomene:

Da, Danny je bio pravi učenik! Početkom 1990-ih, Danny je nazvao ljude u Key Curriculum Pressu i pitao gdje može pronaći Sketchpadov alat za "oval". Rekli su mu da Sketchpad ne dolazi s gotovom značajkom elipse, ali predlaže nekoliko načina za izgradnju krivulje.

Danny nije bio previše zadovoljan onim što je čuo. Sigurno je morala postojati jednostavnija tehnika konstrukcije. I gle čuda, nekoliko mjeseci kasnije Danny je osmislio vlastitu metodu - onu predstavljenu u ovoj aktivnosti.

Key Curriculum Press sponzorirao je natjecanje s nagradama za pet najoriginalnijih odgovora koji su objašnjavali je li Dannyjev "oval" doista elipsa. Učitelji i učenici čak iz Indije pisali su kako bi podijelili svoja otkrića.

### Dodatna aktivnost:

Stolarska konstrukcija dijeli gotovo identičnu strukturu dokaza.

### Kako to dokazati

**P1** S obzirom na duljine na slici, imamo elipsu s glavnom osi duljine 10 i sporednom osi duljine 4. Zamjenom  $a = 5$  i  $b = 2$  u jednadžbi elipse dobivamo

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

**P2**  $AG = x$ ;  $EH = y$ ; prema Pitagorinom poučku,  $DG = \sqrt{25 - x^2}$ .

**P3** Prvo, riješimo ovaj problem sa sličnim trokutima: Imamo  $\triangle AEH \sim \triangle ADG$ , budući da oba trokuta sadrže prave kutove i  $EH$  je paralelan s  $DG$ . S obzirom na ovaj odnos, možemo zapisati proporciju

$$\frac{EH}{AE} = \frac{DG}{AD}$$

Zamijenite  $AE = 2$ ,  $AD = 5$  i vrijednosti iz pitanja 2 u ovu jednadžbu. Kvadrirajte obje strane i preuredite članove. Izvest ćete predviđenu jednadžbu elipse iz pitanja 1.

Sada riješimo problem koristeći trigonometriju:

Neka je  $\angle A = \theta$ . Tada iz  $\triangle AEH$  imamo  $\sin(\theta) = \frac{EH}{AE}$ . A  $\triangle ADG$  daje  $\cos(\theta) = \frac{AG}{AD}$ . Budući da je  $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ , možemo napisati

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{5}\right)^2 = 1$$

**P4** Opća jednadžba je

$$\left(\frac{x}{s+t}\right)^2 + \left(\frac{y}{s}\right)^2 = 1$$

### Istražite više

1. Iz aktivnosti Neki odnosi elipse (pitanja 1 i 2), znamo da je dužina produžena od žarišta do krajnje točke manje osi polovica duljine glavne osi.

Budući da je  $AC$  polovica duljine glavne osi u Dannyjevoj elipsi, gradimo kružnicu s polumjerom  $AC$  centriranim u krajnjoj točki  $B$  manje osi. Točke presjeka ove kružnice s glavnom osi određuju žarišta. Pogledajte treću stranicu **Danny.gsp** za sliku.

## Projekti elipse (stranica 30)

1. Sketch **PA+2PB.gsp** (mapa **Elipse - aktivnosti**) pruža model krivulje.

Za informacije o krivuljama u obliku jajeta, pogledajte poglavlja 3 i 4 knjige *The Last Recreations* autora Martina Gardnera (Springer-Verlag, 1997).

2. Dijagonale bilo kojeg romba su međusobno okomite i raspolavljaju se. U danom rombu  $FCGB$ , štap kroz  $F$  i  $G$  je simetrala dužine  $BC$ . Dakle, kada se gleda u odnosu na Presavijenu kružnicu, pravac  $FG$  predstavlja pravac pregiba nastao kada se točka  $C$  presavi-je na točku  $B$ . (Imajte na umu da točka  $C$  prati kružnicu kada se povuče.)

5. Dokaz ovdje slijedi prijedloge dane u sketchu **Savijena slamka.gsp** (mapa **Elipse - aktivnosti**):  $AF = x$ ;  $DF = y$ ;  $DC = 2$ ;  $FC = \sqrt{4 - y^2}$ ;  $BE = 3$  ( $\triangle BED$  je jednakokračan)

Imamo  $\triangle CDF \sim \triangle AEF$ , budući da oba trokuta sadrže prave kutove i  $\angle A = \angle C$ . ( $\triangle BAC$  je jednakokračan.) S obzirom na ovaj odnos, možemo napisati proporciju

$$\frac{CF}{CD} = \frac{AF}{AE}$$

Zamjenom vrijednosti u ovoj jednadžbi, kvadriranjem obje strane i preraspoređivanjem članova dobivamo

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{4} = 1$$

## Uvod u parabolu (stranica 36)

### Preduvjeti:

Nema, iako ćete možda trebati razgovarati o tome kako izmjeriti udaljenost od točke do pravca.

## Vještina rada sa Sketchpadom:

Početak. Učenici konstruiraju jedan okomit pravac.

### Vrijeme aktivnosti:

60-70 minuta.

### Opće napomene:

Ova aktivnost uvodi definiciju parabole, kao i pojmove žarište i ravnalica.

### Dodatna aktivnost:

Konstrukcija presavijenog pravokutnika koristi klasičnu definiciju parabole predstavljenu ovdje.

### Definiranje parabole

**P1** Konstruirajte dužinu od  $P$  do  $d$  koja je okomita na pravac  $d$ . Duljina dužine predstavlja udaljenost od  $P$  do  $d$ .

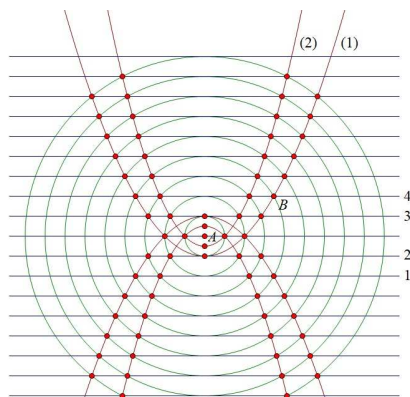
**P2** Duljine dužina trebaju biti jednake udaljenostima koje su već izmjerene na zaslону.

**P3** Konstruirajte dužinu žarištem okomito na ravnalicu. Polovište ove dužine je vrh parabole.

### Metoda koncentričnih kružnica

**P4** Točke  $A$  i  $B$  udaljene su 4 jedinice, kao i točka  $B$  i pravac 1. Dakle, točka  $B$  leži na paraboli s točkom  $A$  kao žarištem i pravcem 1 kao ravnalicom.

**P5-7**



### Metoda kliznog ravnala

- P8** Točka  $A$  je žarište, a gornji rub vodoravnog ravnala je direktrisa.
- P9** Morate dokazati da je  $CA = CD$ .
- P10** Budući da je niz  $(BC + CA)$  jednake duljine kao ravnalo  $BD$ , imamo  $BC + CA = BC + CD$ .
- P11** Oduzimanjem  $BC$  od obje strane jednakosti u pitanju 10 dobivamo  $CA = CD$ .

### Konstrukcija presavijenog pravokutnika (stranica 40)

#### Preduvjeti:

Da bi učenici dovršili dokaz, moraju znati definiciju parabole i poučak SKS o sukladnosti trokuta.

### Vještina rada sa Sketchpadom:

Srednja. Učenici crtaju okomitu simetralu i slijede korake proširene konstrukcije.

Alternativno, početnici mogu pogledati sketch **Demo model.gsp** (mapa **Parabola - aktivnosti**), koja sadrži unaprijed pripremljen modele svega.

### Vrijeme aktivnosti:

70-80 minuta. Ako je vremena malo, koristite unaprijed izgrađenu skicu **Demo model.gsp** (mapa **Parabola**). Aktivnost će vjerojatno trajati kraće ako ste napravili Konstrukciju presavijenog kruga iz poglavlja Elipsa.

### Opće napomene:

Tehnika presavijanja papira u ovoj aktivnosti jednostavan je i impresivan način za generiranje parabola. Zapravo, budući da je sve što zahtijeva jedan list papira, ova metoda može biti doista zarazna. Imate li prazan list papira? Preklopite parabolu!

### Dodatne aktivnosti:

Konstrukcija preklopljene kružnice (poglavljje o elipsi) sadrži istu tehniku preklapanja papira i može se dodijeliti kao samostalni projekt.

Pogledajte i treći projekt naveden u Projektima parabole.

### Konstruiranje fizičkog modela

**P1** Točka  $A$  je žarište, a donji rub papira je ravnalica.

**P2** Krivulja bi izgledala "uže".

### Konstruiranje Sketchpadovog modela

U koraku 10, učenici moraju proučiti geometriju svojih pravaca pregiba. Konkretno, s obzirom na točke  $B$  i  $A$ , kako koristite Sketchpad za konstruiranje "pregiba" koji nastaje kada se  $B$  preklopi na  $A$ ? (Pregib je okomita simetrala segmenta  $AB$ .)

Kao pripremu za ovaj korak konstrukcije, možete zamoliti učenike da uzmu novi list papira iz bilježnice, označe dvije nasumične

točke, preklope jednu na drugu, a zatim rasklope papir. Koji je geometrijski odnos pravca pregiba prema dvije točke?

**P3** Kako se točka  $A$  približava vodoravnom pravcu, krivulja se čini "užom".

**P4** Kako se točka  $A$  udaljava od vodoravnog pravca, krivulja se čini "širom".

### Igranje detektiva

U koraku 19, učenici se mole da konstruiraju točku dodira svoje parabole. Da bi to učinili, konstruirajte pravac  $k$  kroz točku  $B$  okomito na vodoravni pravac. Točka dodira leži na sjecištu pravca  $k$  s pravcem pregiba.

Zanimljivo je razmotriti ima li parabola asimptote; to jest, ako postoje pravci kojima se krivulja približava, ali ih nikada ne siječe. Promatrajući tangentu kako se točka  $B$  sve više udaljava od žarišta, vidimo da krivulja postaje sve više okomita na ravnalicu. Dakle, ako postoje asimptote, one moraju biti okomite na ravnalicu.

Ali s obzirom na bilo koju okomicu, postoji točka na njoj koja je jednako udaljena od žarišta i ravnalice. ne može biti asimptota.

### Kako to dokazati

**P5** Morate dokazati da je  $AD = DB$ .

**P6** Budući da je pravac pregiba okomita simetrala segmenta  $AB$ , imamo  $CA = CB$  i  $\angle ACD = \angle BCD = 90^\circ$ . I, naravno,  $CD = CD$ . Dakle, prema poučku SKS o sukladnosti trokuta,  $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ .

**P7** Budući da je  $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ , odgovarajuće stranice  $AD$  i  $DB$  su jednake duljine.

### Istražite više

1. Budući da je pravac tangenta kružnice u točki  $B$ , polumjer  $CB$  je okomit na

pravac. Dakle, duljina dužine  $CB$  jednaka je udaljenosti točke  $C$  i pravca. Dužine  $CB$  i  $CA$  su oba polumjera kružnice i jednake su duljine. Stoga  $C$  crta parabolu sa žarištem u točki  $A$ .

2. Kako se točka  $A$  udaljava sve dalje i dalje od zaslona, dio kružnice koji vidimo postaje sve ravniji i ravniji. Konstrukcija izgleda poput presavijenog pravokutnika - jedan fokus (točka  $B$ ) i gotovo ravna ravnalica.

3.  $\angle GDF = \angle BDC$ , jer su to kutovi okomitih krakova. Budući da  $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ , imamo  $\angle ADC = \angle BDC$ . Spajanjem ove dvije jednakosti dobivamo  $\angle GDF = \angle ADC$ .

### Konstrukcija kružnice koja se širi (stranica 44)

#### Preduvjeti:

Da bi učenici dovršili dokaz, trebat će im neke informacije o geometrijskim sredinama (navedene u aktivnosti) i algebarskoj definiciji parabole. Ako izostavite dokaz, nema preduvjeta.

#### Vještina rada sa Sketchpadom:

Srednja. Učenici konstruiraju nekoliko okomitih pravaca i slijede korake proširene konstrukcije. Alternativno, početnici mogu pogledati unaprijed pripremljeni sketch **Širenje kružnice.gsp** (mapa **Parabola - aktivnosti**).

#### Vrijeme aktivnosti:

60-70 minuta. Ako je vremena malo, koristite unaprijed izgrađeni sketch **Širenje kružnice.gsp** (mapa **Parabola - aktivnosti**).

## Opće napomene:

Ova aktivnost pruža kontrast konstrukciji presavijenog pravokutnika jer ističe algebarski aspekt definicije parabole.

## Konstrukcija u Sketchpadovog moda

**P1** Krivulja uvijek sadrži točku  $A$  i simetrična je po  $y$ -osi, ali čini se da postaje šira kako se točka  $B$  pomiče prema dolje.

**P2** Da imate samo šestar i ravnalo, trebali biste nacrtati skup pojedinačnih kružnica, od kojih svaka prolazi kroz točku  $B$  sa središtem negdje duž pozitivne  $y$ -osi. Zatim, krećući se od kružnice do kružnice, konstruirali biste potrebne pravce kako biste konstruirali točke  $G$  i  $H$  (par točaka za svaku kružnicu). Korištenje milimetarskog papira moglo bi pomoći pružanjem grubih smjernica za okomice.

## Geometrijska sredina

**P3** Dokaz u nastavku slijedi postavku na drugoj stranici sketcha **Geometrijska sredina.gsp** (mapa **Parabola - aktivnosti**). Budući da su svi kutovi upisani u polukružnicu pravi kutovi,  $\angle DGE = 90^\circ$ . Budući da je  $\angle GDF + \angle DGF = 90^\circ = \angle EGF + \angle DGF$ , imamo  $\angle GDF = \angle EGF$ . Dakle, pravokutni trokuti  $DFG$  i  $GFE$  su slični. Na temelju ove sličnosti, možemo napisati proporciju

$$\frac{DF}{GF} = \frac{FG}{FE} \text{ ili ekvivalentno } \frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Unakrsno množenje daje  $x^2 = ab$ .

## Kako to dokazati

**P4**  $AF = x$ ;  $AD = y$

**P5**  $(AF)^2 = (AB)(AD)$  ili ekvivalentno,  $x^2 = 3y$

**P6** Točka  $G$  je osnosimetrična slika točke  $H$  preko  $y$ -osi. Budući da  $y$ -os služi kao os simetrije parabole, točka  $G$  također mora biti na paraboli.

**P7** Kada je  $AB = s$ , imamo  $x^2 = sy$ .

## Istražite više

1. Vratite se na svoj sketch kružnice koja se širi i na dužine  $DE$  i  $EB$  u konstrukciji. Dok pomičete točku  $C$ , primijetite da  $\triangle DEB$  ostaje pravokutni trokut jer je upisan u polukružnicu.

## Projekti parabole (stranica 47)

2. Koristite tehniku iz aktivnosti Preklopljeni pravokutnik za izgradnju parabole, njezinog fokusa i njezine ravnalice. Zatim odaberite ove elemente za izgradnju prilagođenog alata.
3. Dijagonale bilo kojeg romba su simetrale okomite jedna drugoj. U zadanom rombu  $EBFA$ , štap s točkama  $E$  i  $F$  je simetrala odsječka  $AB$ . Dakle, kada se gleda u odnosu na Preklopljeni pravokutnik, pravac  $ED$  je pravac pregiba koji nastaje kada se točke  $B$  i  $A$  preklope. Trag duž kojeg se točka  $B$  pomiče predstavlja rub pravokutnika.

## Uvod u hiperbolu (stranica 52)

### Preduvjeti:

Nema.

**Vještina rada sa Sketchpadom:**

Početnik.

**Vrijeme aktivnosti:**

30-40 minuta.

**Opće napomene:**

Ova aktivnost uvodi klasičnu definiciju hiperbole kroz zanimljivu aplikaciju za zakopano blago.

**'X' označava točku**

Pomaknite rubnu točku najgornje dužine na sketchu kako biste konstantnu razliku u hiperboli 1 učinili jednakom dva. Budući da je blago dvije milje dalje od točke  $B$  nego od točke  $L$ , nalazi se negdje duž desne grane hiperbole 1.

Sada pomaknite rubnu točku donje dužine na sketchu kako biste konstantnu razliku u hiperboli 2 učinili jednakom jedan. Budući da je blago jednu milju dalje od točke  $C$  nego od točke  $J$ , nalazi se negdje duž gornje grane hiperbole 2.

Dakle, blago se nalazi na sjecištu dvije gore opisane grane hiperbole.

(Kontekst zakopanog blaga ovog problema je neobičan, ali sama metoda se koristi u hiperboličkim navigacijskim sustavima poput Lorana. Dva para stanica ( $A, B$  i  $C, D$ ) istovremeno šalju radio signale. Brod ili zrakoplov bilježi vremensku razliku u primanju signala od  $A$  i  $B$ , kao i od  $C$  i  $D$ . Te razlike određuju dvije hiperbole čiji presjek označava lokaciju broda ili zrakoplova.)

**Konstrukcija koncentričnim kružnicama**  
**(stranica 54)**
**Preduvjeti:**

Prethodna aktivnost, Uvod u hiperbolu.

**Vještina rada sa Sketchpadom:**

Početnik.

**Vrijeme aktivnosti:**

50-60 minuta.

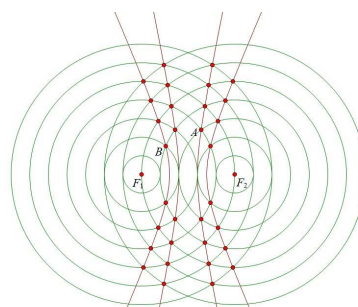
**Opće napomene:**

Ova aktivnost nudi dvije metode konstrukcije temeljene na klasičnoj definiciji hiperbole.

**P1** Točka  $A$  nalazi se na kružnici sa središtem u  $F_1$  i polumjerom jednakom 4. Dakle,  $AF_1 = 4$  jedinice. Slično,  $AF_2 = 3$  jedinice. Dakle,  $AF_1 - AF_2 = 1$  jedinica.

**P2** Sve točke  $P$  koje leže na hiperboli koja prolazi kroz točku  $A$  moraju zadovoljavati jednakost  $|PF_1 - PF_2| = 1$  jedinica. Pogledajte sliku.

**P3** Sve točke  $P$  koje leže na hiperboli koja prolazi točkom  $B$  moraju zadovoljavati jednakost  $|PF_1 - PF_2| = 2$  jedinice. Pogledajte sliku.

**P4**

**P5** Bez obzira na položaj točke  $C$  desno ili lijevo od  $AB$ , razlika dvaju polumjera,  $AC$  i  $BC$ , jednaka je konstantnoj duljini  $AB$ .

- P6** Neka je  $P$  točka presjeka dviju kružnica. Tada je  $AC$  udaljenost od  $P$  do  $F_1$ , a udaljenost od  $P$  do  $F_2$  je  $BC$ . Oduzimanjem ovih dviju vrijednosti dobiva se konstantna duljina  $AB$ . Dakle,  $P$  crta hiperbolu s konstantnom razlikom  $AB$ .
- P7** Pomicanjem točke  $C$  stvarate dva skupa koncentričnih kružnica - jedan sa središtem u  $F_1$ , drugi sa središtem u  $F_2$ . Ovaj Sketchpadov model je *kontinuirana* verzija onoga što je započelo kao *diskretnim* koncentričnim kružnicama na papiru.
- P8** Morate dokazati da  $AF_2 - AF_1$  je konstanta.
- P9**  $BA + AF_2$  je ukupna duljina ravnala, koja je konstantna.  $BA + AF_1$  je duljina konopca, koja je također konstantna. Dakle, razlika ovih konstantnih vrijednosti je sama po sebi konstantna.
- P10** Pojednostavljanje izraza u pitanju 9 (eliminiranje dva  $BA$ ) daje željeni rezultat.

## Projekti s hiperbolom (stranica 57)

- Otvorite drugu stranicu sketcha **Revizija presavijene kružnice.gsp**. Da bismo dokazali da lokus pregiba prati hiperbolu, moramo odrediti koja točka na pravcu pregiba daje tangentu na krivulju.

U slučaju elipse, tangentna točka nalazila se na sjecištu pregiba s dužinom  $AC$ . Ovdje se tangentna točka (točka  $E$ ) nalazi na sjecištu pregiba s *pravcem*  $AC$  kroz točku.

Kao i kod konstrukcije elipse presavijanjem kružnica,  $\triangle BED \cong \triangle CED$ , daje  $EB = EC$ . Ako točka  $E$  crta hiperbolu sa žarištima u točkama  $A$  i  $B$ , tada  $EB - EA$  mora biti konstantno. Imamo:

$$EB - EA = EC - EA = AC =$$

polumjer kružnice koji je konstantan

- Dijagonale bilo kojeg romba su okomite simetrale jedna drugoj. U danom rombu  $FBGC$ , štap kroz  $F$  i  $G$  je simetrala dužine  $BC$ . Dakle, kada se gleda u odnosu na Projekt 1, pravac  $FE$  predstavlja pravac pregiba nastao kada se točka  $B$  presavije na točku  $C$ . (Imajte na umu da točka  $C$  crta kružnicu kada se povuče.)
- Dano nam je da je  $CF = BA$  i  $AC = FB$ . Kombiniranjem ovih jednakosti s  $AF = AF$  dobivamo  $\triangle ACF \cong \triangle FBA$  prema poučku SSS o sukladnosti trokuta.

Budući da je  $\triangle ACF \cong \triangle FBA$ , imamo  $\angle ACF = \angle FBA$ . Dakle, prema KKS-ovom poučku o sukladnosti trokuta je  $\triangle ECF \cong \triangle EBA$ . Dakle, odgovarajuće stranice trokuta  $EF$  i  $EA$  su jednake.

$EB - EA = EB - EF = FB$  je konstanta. To nam govori da točka  $E$  crta hiperbolu sa žarištima u točkama  $A$  i  $B$ .

- Pritisnite gumb *Prikažite savjete* za dokaz u sketchu **Tangentne kružnice.gsp**. Ovo je posljednji korak dokaza:

$$AC - BC = (R + p) - (r + p) = R - r,$$

što je konstanta. Dakle, točka  $C$  crta hiperbolu sa žarištima u točkama  $A$  i  $B$ .

## Problem gorućeg šatora (stranica 62)

### Preduvjeti:

Poznavanje aktivnosti konstrukcije uz pomoć pribadača i konopca u poglavlju Elipsa.

## Vještina rada sa Sketchpadom:

Početno. Učenici koriste unaprijed pripremljen alat za elipsu.

## Vrijeme aktivnosti:

70-80 minuta.

## Opće napomene:

Problem gorućeg šatora je glavni dio knjiga i tekstova o zagonetkama. Gotovo uvijek se rješava osnim simetrijama. Ta metoda je pametna, ali često ostavlja učenike u nedoumici: "Kako se netko toga sjetio?"

U ovoj aktivnosti učenici ispituju tehniku reflektiranja, ali prvo sami rješavaju problem gorućeg šatora koristeći samo komad konopca. To im ne samo da omogućuje pristupiti problemu na prirodniji način, već i lijepo vodi u tehniku rješavanja koja uključuje elipse.

Kao što ćete vidjeti, metoda elipse je zaista nešto posebno: Elegantna je, vizualna i savršeno prilagođena dinamičkim mogućnostima manipulacije Sketchpadom.

## Dodatna aktivnost:

Problem bazena.

## Izrada fizičkog modela

**P1** Ovo pitanje poziva na više metoda rješenja i napisano je na namjerno otvoren način. Prije nego što ponudite pomoć učenicima, pogledajte koje ideje predlažu. Evo nekoliko pristupa, koji svi dobro funkcioniraju:

- Odaberite bilo koju točku  $P$  uz rijeku, zategnite konop u  $P$  i vežite višak konopca u petlju koja visi ispod  $P$ . Produžite viseću petlju ravno prema dolje drugom rukom kako biste

procijenili koliko konopca se nalazi ispod ruba rijeke. Prilagodite mjesto i količinu vašeg konopa kako biste minimizirali (odoka) duljinu petlje. Mjesto uz rijeku gdje konop stvara najdužu petlju predstavlja optimalno mjesto za trčanje.

- Otpustite jedan kraj konopca i odrežite mali komadić. Ponovno pričvrstite konopac. Zategnite konopac. Ako se konopac može produljiti ispod ruba rijeke, odrežite ga još malo. Ponovite ovaj postupak s konopcem dok ne dosegne točno do ruba rijeke, ali ne i ispod.
- Moguće je da učenici riješe ovaj problem pomoću elipse. Izvrsno! Vidi pitanja od 2 do 5. Nakon što su pronašli najbolju lokaciju na rijeci, učenici često predlažu dvije uvjerljive hipoteze:
- Kut koji tvori zategnuti konopac na optimalnoj lokaciji na rijeci je  $90^\circ$ .
- Pravac kpolovištem dužine  $YT$  okomit na rub rijeke siječe rijeku na optimalnoj lokaciji.

Nijedno opažanje zapravo nije točno. Učenici mogu provjeriti ove pretpostavke pomoću Sketchpada crtanjem postavke Šatora koji gori, mjerenjem duljina  $YP$  i  $PT$  pomoću softvera i izračunavanjem njihovog zbroja. Dok učenici pomiču točku  $P$  duž rijeke, mogu odrediti koja lokacija daje najkraću udaljenost. (Pomoći će ako prvo povećate preciznost mjerenja udaljenosti u ploči Postavke.)

**P2** Držeći konopac zategnutim, povucite vrh olovke dok ponovno ne sjedne izravno na rub rijeke. Novi položaj - nazovimo ga točkom  $Q$  - ekvivalentna je točki  $P$  u ukupnoj udaljenosti trčanja.

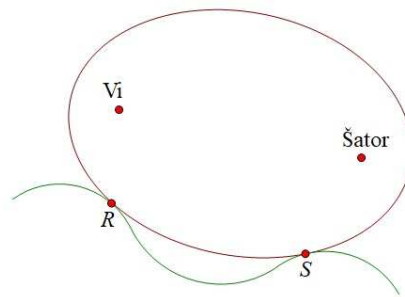
**P3** Zategnite konopac olovkom, a zatim pratite trag vrha olovke. Iz konstrukcije pribadača i konopca znamo da je rezultirajuća krivulja elipsa. Elipsa siječe rijeku dva puta: jednom u točki  $P$  i drugi put u točki  $Q$ .

**P4** Sve te točke uz rub rijeke koje se nalaze unutar elipse (između  $P$  i  $Q$ ) predstavljaju kraće udaljenosti trčanja. Sve ostale točke rijeke koje se nalaze izvan elipse predstavljaju duže udaljenosti trčanja.

**P5** Skratite konopac i nacrtajte novu elipsu koja je manja od originalne. Pretpostavimo da ova nova elipsa i dalje siječe rub rijeke dva puta, sada u točkama  $P'$  i  $Q'$ . Negdje između točaka  $P'$  i  $Q'$  leži optimalna lokacija rijeke. Budući da je duljina dužine  $P'Q'$  kraća od duljine dužine  $PQ$ , suzili smo mogućnosti. Nastavite skraćivati duljinu niza i crtati nove elipse dok elipsa ne dotakne rub rijeke točno jednom. Ova točka dodira predstavlja optimalnu lokaciju na rijeci.

Razmislite o ovome neko vrijeme. Prilično je nevjerojatno!

**P8** Slika ispod prikazuje zavojitu rijeku koja je istovremeno tangenta na elipsu u točkama  $R$  i  $S$ . Obje lokacije su optimalne.



**P9** Rub rijeke bi se točno poklapao s elipsom čija su žarišta u  $Y$  i  $T$ . Možeš također zamisliti da si nasukana na eliptičnom otoku, okruženom vodom sa svih strana. Stojiš na jednom žarištu otoka, a tvoj šator je na drugom. Bez obzira gdje uz obalu otoka trčiš, udaljenost  $YP + PT$  bit će ista.

## Konstruiranje Sketchpadovog modela

**P6** Pomoću prilagođenog alata konstruirajte elipsu sa žarištima u točkama  $Y$  i  $T$  koja prolazi kroz točku  $P$ . Pomaknite točku  $P$  dok rijeka ne postane tangenta na elipsu. (Točnu točku dodira može biti malo teško procijeniti.) Ova točka dodira predstavlja optimalnu lokaciju na rijeci.

Sketch **Problem gorućeg šatora.gsp** (mapa **Optimizacija - aktivnosti**) sadrži unaprijed izgrađeni model s već konstruiranom elipsom.

**P7** Pretpostavimo da je rijeka tangenta na elipsu u točki  $R$ . Tada svaka druga točka duž ruba rijeke predstavlja veću udaljenost trčanja. Dakle, nijedna od ovih točaka ne može biti tako dobra kao točka  $R$ .

## Tehnika refleksije (tj. osne simetrije)

Za one koje bi moglo zanimati, evo konteksta Dudeneyjeve "Zagonetke mljekarice":

"U kutu polja vidi se mljekarica kako muze kravu, a s druge strane polja je mljekara gdje se pomuzeno mlijeko mora odložiti. Ali primjećeno je da mlada žena uvijek ide do rijeke sa svojom kantom prije nego što se vrati u mljekaru.

Ovdje će sumnjičavi čitatelj možda pitati zašto posjećuje rijeku. Mogu samo odgovoriti da se to nas ne tiče. Navodno mlijeko je u potpunosti za lokalnu potrošnju."

Treća stranica sketcha **Gorući šator.gsp** (mapa **Optimizacija - aktivnosti**) sadrži unaprijed izgrađeni model tehnike refleksije.

**P10** Neka je točka  $D$  presjek dužine  $TT'$  s rijekom. Prema svojstvima refleksije,  $DT = DT'$  i  $TT'$  je okomit na rijeku. Dakle,  $\triangle PDT \cong \triangle PDT'$  pomoću SKS i  $PT = PT'$ .

**P11** Iz pitanja 10 znamo da je putovanje od točke  $Y$  do  $P$  do  $T$  ekvivalentno putovanju od točke  $Y$  do  $P$  do  $T'$ . Dakle, minimiziranje  $YP + PT$  isto je kao i minimiziranje  $YP + PT'$ . Dakle, koja lokacija točke  $P$  uz rub rijeke daje najmanju vrijednost  $YP + PT'$ ?

Najkraća udaljenost između točaka  $Y$  i  $T'$  je ravni put. Spojite točke  $Y$  i  $T'$  dužinom. Presjecište  $YT'$  s rubom rijeke daje optimalnu lokaciju točke  $P$ .

**P12** Zrcalite točku  $Y$  da biste dobili  $Y'$ . Spojite  $Y'$  s  $T$ . Sjecište  $Y'T$  s rubom rijeke daje istu optimalnu lokaciju kao izvedenu u pitanju 11.

### Problem s bazenom (stranica 65)

#### Preduvjeti:

Problem gorućeg šatora.

#### Vještina rada sa Sketchpadom:

Početak.

#### Vrijeme aktivnosti:

50-60 minuta.

#### Opće napomene:

Ova aktivnost nadovezuje se na učenički rad s elipsom iz problema gorućeg šatora. Učenici crtaju graf i određuju njegov apsolutni maksimum i minimum, kao i relativne maksimume i minimume, *sve bez ijednog djelića algebre ili derivacija!* Geometrija ovdje vlada danom.

Trenutna istraživanja govore nam da bi upoznavanje učenika s temeljnim konceptima računa (kalkulusa) trebalo početi mnogo prije njihovog prvog tečaja računa. Kada se pažljivo prouči, problem bazena je prisutan širokom rasponu učenika.

#### Dodatna aktivnost:

Problem kaubojke.

#### Čaj za dvoje

**P1** Druga stranica sketcha **Problem s bazenom.gsp** (mapa **Optimizacija**) prikazuje četiri tangente od  $P_2$  do  $P_5$ .

**P2**  $P_5$  daje najkraću ukupnu udaljenost veslanja.

$P_2$  daje najdužu ukupnu udaljenost veslanja.

$P_3$  nije najbolja lokacija, ali je bolja od svih obližnjih mjesta.

$P_4$  nije najgora lokacija, ali je gora od svih obližnjih mjesta.

\*\*\*\*\*

Kada elipsa dodiruje bazen u točki  $P_5$ , sve ostale točke duž bazena leže izvan elipse. Dakle,  $P_5$  daje najkraću ukupnu udaljenost veslanja.

Kada elipsa dodiruje bazen u točki  $P_2$ , sve ostale točke duž bazena nalaze se unutar elipse. Dakle,  $P_2$  daje najdužu ukupnu udaljenost veslanja.

Kada elipsa dodiruje bazen u točki  $P_3$ , sve obližnje točke duž bazena nalaze se izvan elipse. Dakle,  $P_3$  je dobro mjesto za veslanje u usporedbi sa susjedima. Ali dalje, postoji interval bazena koji se nalazi unutar elipse. Točke duž ovog intervala predstavljaju kraće udaljenosti veslanja. Dakle,  $P_3$  nije najbolja lokacija, ali je bolja od svih obližnjih mjesta.

Kada elipsa dodiruje bazen u točki  $P_4$ , sve obližnje točke duž bazena nalaze se unutar elipse. Dakle,  $P_4$  nije sjajno mjesto za veslanje u usporedbi sa susjedima. Ali dalje, postoji interval bazena koji se nalazi izvan elipse. Točke duž ovog intervala predstavljaju duže udaljenosti veslanja. Dakle,  $P_4$  nije najgora lokacija, ali je gora od svih obližnjih mjesta.

**P3** Od najkraćih do najdužih udaljenosti veslanja imamo:  $P_5, P_3, P_4, P_2$ .

**P4** Da biste vidjeli graf, otvorite treću stranicu sketcha **Problem s bazenom.gsp** i pritisnite gumb *Prikažite graf* Vaš graf vjerojatno ne će izgledati identično, jer niste znali stvarne udaljenosti veslanja. Važan je oblik vašeg grafa - prikazuje li ispravne relativne visine i točke skretanja?

**P5** Apsolutni maksimum =  $P_2$

Apsolutni minimum =  $P_5$

Relativni maksimum =  $P_4$

Relativni minimum =  $P_3$

**P6** Pomicanjem točaka  $Y$  i  $F$  izravno u središte kružnice stvara se horizontalni graf. (U ovom slučaju, udaljenost veslanja je uvijek  $2r$ , gdje je  $r$  polumjer bazena.)

Također je moguće postaviti točke  $Y$  i  $F$  na različite lokacije dalje od središta tako da elipsa gotovo odgovara kružnici. U tim slučajevima, graf je prilično ravan.

## Optimizacijski projekt (stranica 68)

### Preduvjeti:

Aktivnost Šator u plamenu.

### Vještina rada sa Sketchpadom:

Početak. Učenici koriste unaprijed izrađen alat za prilagođenu elipsu.

### Opće napomene:

Za učenike koji žele pomoć u razumijevanju metoda elipse i refleksije, višestranični sketch **Demo modeli.gsp** (mapa **Optimizacija - aktivnosti**) pruža unaprijed izrađene modele i objašnjenja.

Steven Harris, moj student na Sveučilištu u New Yorku, koliko ja znam, bio je prvi koji je predložio rješenje ovog problema s dvostrukom elipsom.



## Popis mapa, podmapa, Sketchpadovih datoteka i inverzori

Evo popisa mapa, podmapa i Sketchpadovih datoteka za uporabu nastavnicima i učenicima, a koje su sastavni dio knjige. U podmapama se nalaze Sketchpadove datoteke.

Broj mapa: 5  
Broj podmapa: 20  
Broj Sketchpadovih datoteka: 59

## Popis mapa i podmapa s datotekama

### Mapa: Elipsa - aktivnosti

| Naziv podmape                      | Naziv Sketchpadove datoteke                                                |
|------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| Dannyjeva elipsa                   | Danny<br>Dinamička geometrija                                              |
| Elipsa projekti                    | PA+2PB<br>Romb<br>Savijena slamka<br>Tangentne kružnice<br>Žarišta i točke |
| Koncentrične kružnice konstrukcija | Koncentrične kružnice<br>Konstantni opseg                                  |
| Neki odnosi elipse                 | Ekscentričnost<br>Vrpca                                                    |
| Početak rada                       | Rastezanje                                                                 |
| Presavijena kružnica konstrukcija  | Demo model<br>Presavijena kružnica                                         |
| Pribadača i konopac konstrukcija   | Nova krivulja<br>Parametarska boja<br>Parametarske elipse<br>Točke         |
| Stolarska konstrukcija             | Ljestve<br>Stolar<br>Trokut                                                |
| Sukladni trokuti konstrukcija      | Sukladni trokuti<br>Zupčanici                                              |
|                                    | Obilazak elipse                                                            |
|                                    | Elipsama automatizirani obilazak                                           |

### Mapa: Hiperbola - aktivnosti

| Naziv podmape                       | Naziv Sketchpadove datoteke                                                            |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| Konstrukcija koncentričnih kružnica | Koncentrične kružnica<br>Rotirajuće ravnalo<br>Valovi                                  |
| Projekti hiperbole                  | Područje<br>Revizija presavijene kružnice<br>Romb<br>Tangentne kružnice<br>van Shooten |
| Uvod u hiperbolu                    | Blago<br>Hiperbola                                                                     |
|                                     | Obilazak hiperbole                                                                     |

### Mapa: Optimizacija - aktivnosti

| Naziv podmape          | Naziv Sketchpadove datoteke                           |
|------------------------|-------------------------------------------------------|
| Problem gorućeg šatora | Gorući šatora<br>Problem gorućeg šatora<br>Refleksija |
| Problem kaubojke       | Demo modeli<br>Kaubojka                               |
| Problem s bazenom      | Problem s bazenom                                     |

### Mapa: Parabola - aktivnosti

| Naziv podmape                          | Naziv Sketchpadove datoteke                                                                 |
|----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| Konstrukcija kružnice širenja          | Geometrijska sredina<br>Pravi kut<br>Širenje kružnice                                       |
| Konstrukcija presavijenog pravokutnika | Demo model<br>Farovi<br>Konusna povezanost<br>Presavijeni pravokutnik<br>Tangentna kružnica |
| Predstavljamo parabolu                 | Klizno ravnalo<br>Parabola<br>Skala                                                         |
| Projekti parabole                      | Romb                                                                                        |
|                                        | Obilazak hiperbole                                                                          |

### Mapa: Prilagođeni alati i zanimljive web stranice

| Naziv podmape     | Naziv Sketchpadove datoteke                       |
|-------------------|---------------------------------------------------|
| Po narudžbi alati | Elipsa alat<br>Parabola alat<br>Povezivanje alati |
|                   | Zanimljive web stranice                           |

## Inverzori

Na web stranici <http://www.huni.hr> u mapi DODATAK nalaze se dva teksta (izvorni na ruskom jeziku i prijevod na engleski) koji je napisao ruski matematičar Solovjev 1990. godine o inverzorima u časopisu *Kvant*. Članak u Kvantu je na stranici 20 - 23 s naslovom *Making the crooked straight*.

Tu se nalaze i gsp datoteke koje su kreirali Nick Jackiw i Tvrtko Tadić te za ovu knjigu prateće gsp datoteke (popis kojih je u ovom odjeljku) koje je kreirao Daniel Scher za potrebe poučavanja i učenja o konikama.

Kreiranje inverzora predlažemo za projekte učenicima kao dodatnu aktivnost i kao informaciju/činjenicu o metodama kako su raniji matematičari uspješno rješavali probleme.

Njihova uspješna rješenja imaju tehničke primjene u svakodnevnoj uporabi (primjerice, kako rotaciju "pretvoriti" u translaciju ili obrnuto, što je sustavno i veoma kvalitetno elaborirano u Solovjevom tekstu, a nekim gsp datotekama realizirano.

## DODATAK

U mapi DODATAK nalaze se i podmape sa svim sketchovima za rad koji su naznačeni u tekstu knjige.



## Literatura

1. Antončić, N., Špalj, E. i Volenec, V. (2008): *Matematika 3. udžbenik*, II. dio, Školska knjiga, Zagreb
2. Bronstein, I. N., Semendjajev, K. A., Musiol, G. i Mühlig (2004): *Matematički priručnik*, Golden marketing - Tehnička knjiga, Zagreb
3. Cajori, F. (1999): *A history of mathematics*, fifth edition, AMS Chelsea publishing, Providence
4. Dalle, A. (1988): *2000 Théorèmes et Problèmes de Géométrie avec Solutions*, onzième édition, Éditions de la procure Namur, Seilles
5. de Villiers, M. (2021): *Dokazivanje i dokaz u nastavi matematike pomoću Sketchpada i drugi tekstovi*, HUNI, Zagreb
6. Katz, V. J. (1998): *A History of mathematics: an introduction*, Addison Wesley Longman, Inc., Reading
7. Kletnik, D. (1969): *Problems in analytic geometry*, Mir Publishers, Moscow
8. Lockwood, E. H. (1963): *A book of curves*, Cambridge University Press, New York
9. Gardner, M. (1997): *The Last Recreations*, Springer-Verlag, New York
10. Gardner, M. (1966): *New Mathematical Diversions from Scientific American*, Simon and Schuster, New York
11. Gardner, M. (1989): *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers ... and the return of Dr. Matrix*, W. H. Freeman and Company, New York
12. Gullberg, J. (1997): *Mathematics From the Birth of Numbers*, W. H. Norton & company, New York
13. Marković, Ž. (1947): *Uvod u višu analizu, I. dio*, Nakladni zavod Hrvatske, Zagreb
14. Pavković, B. i Veljan, D. (1995): *Elementarna matematika 2.*, Školska knjiga, Zagreb
15. Reynolds, B. P. and Fenton W. E. (2006): *College Geometry Using The Geometer's Sketchpad*, Key College Publishing, Emeryville
16. Row, S. (1966): *Geometric Exercises in Paper Folding*, Dover Publications, Inc., New York
17. Savin, A. P. (1985): *Enciklopedičeskii slovar junogo matematika*, Pedagogika, Moskva
18. Scher, D., Steketee, S., Kunkel, P. and Lyublinkaya, I. (2005): *Exploring Precalculus with The Geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press, Emeryville
19. Segen, D. (1898): *Geometrija za više razrede srednjih učilišta*, Kraljevska Hrvatsko-Slavonska zemaljska vlada, Zagreb
20. Steinhaus, H. (1965): *100 problèmes élémentaires de mathématiques*, Gauthier-Villars, Paris
21. Weisstein, E. W. (2009): *CRC Encyclopedia of Mathematics*, vol 1, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton
22. \*\*\*\* (1989): *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, NCTM, Reston

- 
23. \*\*\*\* (1999): *Mathematics: Modeling Our World*, vol 1, 4 COMAP, W. H. Freeman and company, New York
  24. \*\*\* (1985): *Matematičeskija enciklopedija*, Sovetskaja enciklopedija vol. 1 - 5, Moskva
  25. \*\*\* (1988): *Matematičeskij enciklopedičeskij slovar*, Sovetskaja enciklopedija, Moskva
  26. \*\*\* (2000): *Standardi za nastavu matematike*, HMD, Zagreb

## Bilješka o autoru



**Daniel Scher** rođen je 1967. godine u New Jerseyju. Nastavnik je matematike, programer softvera, programer kurikula i istraživač koji živi u New Yorku. Doktorirao je matematičko obrazovanje na Sveučilištu u New Yorku 2002. godine. Njegova disertacija bila je *Studentske koncepcije geometrije u okruženju softvera za dinamičku geometriju*.

Daniel je bio glavni istraživač/viši znanstvenik dvaju grantova [Nacionalne zaklade za znanost](#):

- **Forging Connections:**

Ovaj je projekt razvio i implementirao nastavne jedinice [Web Sketchpada](#) za buduće nastavnike matematike u srednjim školama koje su se temeljile na temeljima kognitivne znanosti, tehnologije i pedagogije.

Cilj projekta bio je ojačati matematičku pozadinu budućih nastavnika primenom novog, geometrijskog pristupa funkcijama (s naglaskom na relativnu brzinu promjene) kao sveobuhvatnog okvira za tehnološki bogata istraživanja geometrijskih transformacija, analitičke geometrije, trigonometrije, kompleksnih brojeva i računa.

- **Dynamic Number:**

Ovaj je projekt, koji je provela tvrtka [KCP Technologies](#), proširio i operacionalizirao istraživanje brojeva, operacija i rane algebre.

Projekt se temeljio na paradigmi dinamičke geometrije s novom tehnološkom paradigmom [Dynamic Number](#) usmjerenom na izravnu manipulaciju brojevnim reprezentacijama i numeričkim konstrukcijama. I [Sketchpad Explorer](#) (iPad verzija [The Geometer's Sketchpada](#)) i [Web Sketchpad](#) razvijeni su kao dio ovog projekta.

Objavljeni članci Daniela Schera uključuju sljedeće:

*Enacting Functions from Geometry to Algebra.* U P. Herbst, U.H. Cheah, P.R. Richard i K. Jones (Eds.), International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools (pp. 59-86). New York: Springer International Publishing, 2018.

*What Lies Behind Dynamic Interactive Geometry Software?* In G. W. Blume and K. Heid (Eds.), Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics, Volume 2: Cases and Perspectives (pp. 53-87). Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2008.

*Dynamic Geometry and Proof: A New Approach to a Classic Problem.* Mathematics Teacher. September 2003, pp. 394-398.

Daniel Scher je radio kao istraživač u [Education Development Center \(EDC\)](#) ([Centru za razvoj obrazovanja \(EDC\)](#)) i kao voditelj programa u organizaciji [Best Practices in Education](#).

Trenutno je viši digitalni akademski dizajner u [McGraw Hill](#).

Njegova najnovija knjiga je *[Explore Mathematics with Origami](#)* (Tarquin, 2025).

Njegova web stranica, sa stotinama interaktivnih modela [Web Sketchpada](#), je [sineofthetimes.org](#).

# ISTRAŽIVANJE KONUSNIH PRESJEKA POMOĆU SKETCHPADA

