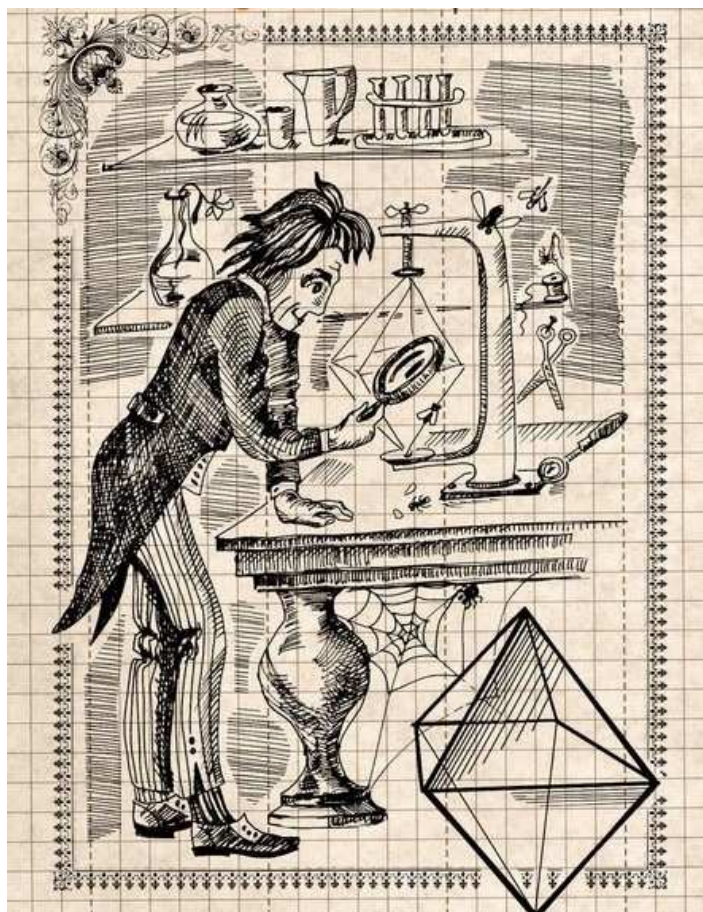


Za mlade matematičare.
Zabavni problemi.

Jakov Isidorovič Perelman



Naslov:

Jakov Isidorovič Perelman:

Za mlade matematičare.

Zabavni problemi.

Rusko izdanje iz 1924. godine

Glavni urednik: Petar Mladinić

Urednici i prevoditelji: Petar Mladinić & Nikol Radović

Recenzenti: Bernardica Bakula, Zoran Crljenica, Ivana Martinić, Eva Špalj

Lektorica: Ivana Babić

Korektor: Petar Bonačić

Hrvatska udruga nastavnika istraživača (HUNI), Zagreb



Nakladnik: Hrvatska udruga nastavnika istraživača, Zagreb, 2026.

Ova se knjiga smije umnažati, preslikavati, printati i
uporabljivati u nastavi, bez pismenog dopuštenja nakladnika.

ISBN 978-953-49726-5-6 (PDF) online

www.huni.hr/nastava-matematike/

Slog i prijelom: *PierreM*

Za mlade matematičare.

Zabavni problemi.

- za učenike

Jakov Isidorovič Perelman



Zagreb, 2026.

Sadržaj

Riječ, dvije o Perelmanu ...	xi
Predgovor	xix
1. Postavljanje zagonetki i zabavne permutacije	1
1.1. Vjeverice i zečevi	1
1.2. Pribor za čaj	1
1.3. Automobilska garaža	2
1.4. Tri ceste	3
1.5. Muhe na zavjesi	4
1.6. Ljetni stanovnici i krave	4
1.7. Deset kuća	5
1.8. Drveće u vrtu	6
1.9. Bijeli miš	6
1.10. 18 žigica	7
1.11. Rješenja zadataka od 1.1. - 1.10.	7
2. Deset jednostavnih zadataka	13
2.1. Bačve	13
2.2. Do pola	13
2.3. Nemoguća jednakost	13
2.4. Broj vlasi	13
2.5. Cijena uveza	14
2.6. Cijena knjige	14
2.7. Glave i noge	14
2.8. Korištenje abakusa	14
2.9. Rijedak novčić	14
2.10. Šparoge	15
2.11. Rješenja zadataka 2.1.-2.10.	15

3.	Deset težih problema	19
3.1.	Koliko ima pravokutnika?	19
3.2.	Réaumur i Celsius	19
3.3.	Stolar i tesari	19
3.4.	Devet znamenki	19
3.5.	Knjiški moljac	20
3.6.	Zbrajanje i množenje	20
3.7.	Gađanje na parobrodu	20
3.8.	Pod vodom	21
3.9.	Kako je napravljeno?	21
3.10.	Brzina vlaka	21
3.11.	Rješenje zadataka od 3.1. - 3.10.:	21
4.	Optičke iluzije	25
4.1.	Tajanstveni crtež	25
4.2.	Tri novčića	25
4.3.	Četiri oblika	25
4.4.	Koji je dulji?	26
4.5.	Opseg prsta	26
4.6.	Krive noge	26
4.7.	Iznenadenje	27
4.8.	Balon na vrući zrak	27
4.9.	Koji pravci?	28
4.10.	Vrtne staze	28
4.11.	Rješenje zadataka od 4.1.-4.10.:	29
5.	Deset neugodnih situacija	31
5.1.	Okrutni zakon	31
5.2.	Milosrdni zakon	31
5.3.	Učitelj i učenik	32
5.4.	U močvari	32
5.5.	Trojica izviđača	33
5.6.	Previše predaka	33
5.7.	Čekanje tramvaja	34
5.8.	Gdje je gost?	35
5.9.	Bez utega	35
5.10.	Netočna vaga	35
5.11.	Rješenja zadataka od 5.1. - 5.10.	35

6.	Vješto rezanje i šivanje. Dvaput mjeri, jednom reži	39
6.1.	Piratska zastava	39
6.2.	Crveni križ	39
6.3.	Ostatci	40
6.4.	Dva križa od jednog	40
6.5.	Mjesečev polumjesec	40
6.6.	Dijeljenje zarezom	41
6.7.	Rasklapanje kocke	41
6.8.	Izrada kvadrata	41
6.9.	Četiri bunara	42
6.10.	Kamo je nestao mali kvadrat?	42
6.11.	Rješenja zadataka od 6.1. - 6.10.	43
7.	Deset teških problema	47
7.1.	Jeftin čuvar	47
7.2.	Seljanka i lokomotiva	48
7.3.	Bumbarovo putovanje	48
7.4.	Kutija	48
7.5.	Dva lanca	49
7.6.	Vreće brašna	49
7.7.	Tri kćeri i dva sina	49
7.8.	Dvije svijeće	49
7.9.	Devetsto naklona	50
7.10.	Radžino nasljedstvo	50
7.11.	Rješenja zadataka od 7.1. - 7.10.	50
8.	Deset problema o zemlji i nebu	57
8.1.	Jug posvuda!	57
8.2.	Telefonom	57
8.3.	Gdje počinju dani u tjednu?	57
8.4.	Utrka sa Zemljom	58
8.5.	Zalazak Sunca	59
8.6.	Turska zastava	59
8.7.	Ovo nije šala	59
8.8.	Zalazak Mjeseca	60
8.9.	Bojni brod	60
8.10.	Parobrod i plivač na Mjesecu	60
8.11.	Rješenja zadataka od 8.1. - 8.10.	61

9.	Trikovi i igre	65
9.1.	Pogađač	65
9.2.	Aritmetički trik	65
9.3.	Trik s kartama	66
9.4.	Što ćete dobiti?	67
9.5.	Još neočekivanje	67
9.6.	Igra 32	67
9.7.	Isto, ali obrnuto	68
9.8.	Igra 27	68
9.9.	Na drugačiji način	68
9.10.	Korištenje šest žigica	68
9.11.	Rješenja zadataka od 9.1. - 9.10.	69
10.	Geometrijske siluete	73
10.1.	"Biljar"	74
10.2.	"Orkestar"	74
10.3.	Osam silueta	75
10.4.	Još šest silueta	75
10.5.	Gdje je grješka?	76
10.6.	Najveća figura	76
10.7.	24 siluete	76
10.8.	Veličine tangrama	77
10.9.	Odakle je došla noga?	77
10.10.	Dva kvadrata od jednog	78
10.11.	Rješenja zadataka od 10.1. - 10.10.	78
11.	Problemi iz Guliverovih putovanja	81
11.1.	Guliverov obrok i večera	81
11.2.	Bačva i kanta Liliputanaca	82
11.3.	Životinje Liliputa	82
11.4.	Tvrđi krevet	83
11.5.	Tri stotine krojača	83
11.6.	Guliverov brod	83
11.7.	Divovske jabuke i orasi	83
11.8.	Divov prsten	84
11.9.	Knjige divova	84
11.10.	Ogrlice divova	85
11.11.	Rješenja zadataka od 11.1. - 11.10.	85

12. Problemi sa žigicama	89
12.1. Tri od šest	89
12.2. Ostavite pet kvadrata	89
12.3. Ostavite četiri kvadrata	89
12.4. Ostavite tri kvadrata	90
12.5. Ostavite dva kvadrata	90
12.6. Šest četverokuta	90
12.7. Dvanaest žigica	90
12.8. Osamnaest žigica	90
12.9. Dva peterokuta	90
12.10. Od 19 do 12	91
12.11. Rješenja zadataka od 12.1. - 12.10.	91
13. Težina i vaganje	95
13.1. Težina trupca	95
13.2. Decimalna vaga	95
13.3. Težina boce	95
13.4. Sapun	95
13.5. Mačke i mačići	96
13.6. Školjka i perle	96
13.7. Težina voća	96
13.8. Koliko čaša?	97
13.9. S čekićem i utegom	98
13.10. Arhimedov problem	98
13.11. Rješenja zadataka od 13.1. - 13.10.	98
14. Problemi s kvadratima	101
14.1. Ribnjak	101
14.2. Laik za parket	101
14.3. Još jedan parketar laik	101
14.4. Treći parketar	101
14.5. Krojačica	102
14.6. Druga krojačica	102
14.7. Stolarova dilema	102
14.8. Cijelo čovječanstvo unutar kvadrata	103
14.9. Sumnjivi kvadrati	103
14.10. Tamne mrlje	103
14.11. Rješenja zadataka od 14.1. - 14.10.	104

15. Problemi sa satovima	107
15.1. Kada se kazaljke susreću?	107
15.2. Kada su kazaljke nasuprotne?	107
15.3. U koje vrijeme?	108
15.4. Suprotno	108
15.5. S obje strane broja šest	108
15.6. Tri i sedam	109
15.7. Sat s kompasom	109
15.8. Na istu temu	109
15.9. Broj šest	109
15.10. Otkucavanje sata	110
15.11. Rješenja zadataka od 15.1. - 15.10.	110
16. Neočekivani izračuni	115
16.1. Čaša graška	115
16.2. Lišće drveća	115
16.3. Milijun koraka	115
16.4. Kvadratni metar	115
16.5. Kubni metar	116
16.6. Kubni kilometar	116
16.7. Kosa	116
16.8. Koliko portreta?	116
16.9. Francuska brava	117
16.10. Skromna nagrada	118
16.11. Rješenja zadataka od 16.1. - 16.10.	118
17. Kristalna putovanja i kontinuirano crtanje	123
17.1. Likovi No 61.-66.	127
17.2. Likovi No 67.-70.	127
17.3. Rješenja zadataka od 17.1. - 17.2.	128
18. Deset različitih zadataka	131
18.1. Horizont	131
18.2. Gdje i kada?	131
18.3. Ezopova visina	131
18.4. Pet komada lanca	131
18.5. Korištenje četiri petice	132
18.6. Trešnja	132
18.7. Dinje	132

18.8.	Nevjerojatan čep	132
18.9.	Model Eiffelova tornja	133
18.10.	Muha na traci	133
18.11.	Rješenja zadataka od 18.1. - 18.10.	133
19.	Deset različitih zadataka	137
19.1.	Tko ima najviše?	137
19.2.	Godine mog sina	137
19.3.	Natjecanje	137
19.4.	Na rijeci i jezeru	137
19.5.	Od Enska do Iksograda	137
19.6.	Meko kuhana i tvrdo kuhana	138
19.7.	Kocke	138
19.8.	Sedam prijatelja	138
19.9.	Nastavak prethodnog	138
19.10.	Osnivanje Kartage	138
19.11.	Rješenja zadataka od 19.1. - 19.10.	139
20.	Optičke iluzije	143
20.1.	Dva luka	143
20.2.	Tri trake	143
20.3.	Dva broda	143
20.4.	Gdje je polovište?	144
20.5.	Dva pravokutnika	144
20.6.	Šešir stranca	144
20.7.	Produljite pravac	145
20.8.	Koja je dužina najdulja?	145
20.9.	Hoće li stati?	146
20.10.	Dva kruga	146
20.11.	Rješenja zadataka od 20.1. - 20.10.	146
	Bilješka o autoru	149

Riječ, dvije o Perelmanu

Prijevod knjige



na hrvatski jezik nastao je u čast jednom od najvećih "izumitelja matematičkih zagonetki" za mlade matematičare.

Perelman je početkom 20. stoljeća među prvima započeo s takvim mozgalicama za djecu, za čije rješavanje nije potrebno mnogo matematičkog znanja, već prije svega domišljatost.

Njegovi zadatci i vježbe za razmišljanje, razvijanje domišljatosti i snalaženje u zadanim problemskim uvjetima imaju iznimnu obrazovnu vrijednost.

Nažalost, moramo primijetiti da su kasniji autori često zanemarivali Perelmanovo autorstvo i koristili se njegovim radom bez navođenja izvora.

Prije početka čitanja i rješavanja Perelmanovih zadataka (nastalih prije više od 100 godina) danih u ovoj knjizi bilo bi dobro pročitati njegov životopis kao i predgovor.

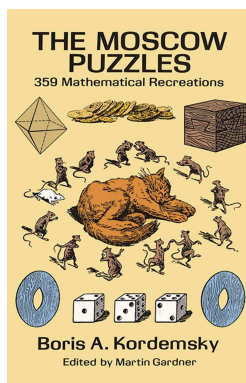
U njima ćete dobiti informacije o velikom Matemagičaru, njegovim idejama i aktivnostima.

Jedan od najpoznatijih u tom oponašanju i korištenju Perelmanovih zadataka bio je Boris A. Kordemsky.

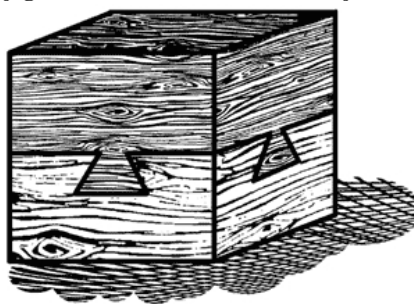
Ovdje, ilustracije radi, navodimo uporabu nekoliko autorovih zadataka koje je Kordemsky upotrijebio u svojoj knjizi *The Moscow Puzzles*, objavljenoj 1972. godine u New Yorku, u engleskom prijevodu s ruskoga jezika.

Struktura te knjige - jer je namijenjena djeci - podudara se s Perelmanovom knjigom iz 1924. godine.

Nepravedno je da je i jedan od najvećih Matemagičara Martin Gardner "slavio" Kordemskog, a da nije "ozbiljnije" spomenuo Perelmana i njegov rad.



U ovoj Perelmanovoj knjizi nalazi se zadatak 3.9. s kockom koju je kao svoj zadatak Kordemsky stavio u svoju knjigu na str. 75. pod brojem 190. Da apsurd bude veći, sliku iste kocke na naslovnicu knjige o Kordemskom stavio je Martin Gardner.



U jednoj američkoj prodavaonici matematičkih igračaka kupio sam sličnu kocku za moju zbirku matematičkih igračaka (v. sl.).



Zadatke sa žigicama ili tangramom Perelman je to lijepo obradio u svoj knjizi, no Kordemsky je taj sadržaj dalje razrađivao kao svoju ideju.

Ideju o rezanju kvadrata i preslagivanju njegovih dijelova prvi je razradio Perelman u svojoj knjizi kao zadatak 6.10., a Kordemsky to objavljuje u svojem zadatku 357. na stranici 176.

Zadatka 13. iz knjige Kordemskog je zadatak 18.4. u Perelmanovoj knjizi:

Kovač je dobio pet lanaca, svaki s tri karike - prikazano na slici (v. sl.) - i zadatak mu je bio spojiti ih u jedan lanac.



Ovo su samo neki ilustrativni primjeri "prešućivanja" Perelmanovih zadataka; nemamo namjeru nabrajati sve preuzete zadatke, kojih je, nažalost, bilo mnogo više.

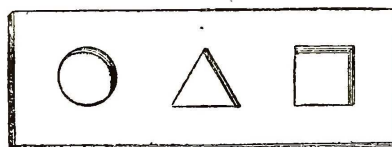
Sljedeći sam zadatak (koji nije izvorno njegov) našao kod Kordemskog i kreirao s Ninoslavom Kuncom strip zadatak objavljen u Matki 128.



Ideja iz zadatka 18.4. o čepu za tri rupe, poslužila mi je za sljedeći strip zadatak. Nisam znao da je to Perelmanova ideja koju je on uzeo iz Hoffmannove knjige i tamo je doslovno definirana kao u mojem stripu a zadatak je na stranici 344.:

Zadatak. Br. XX.- Jedan čep za tri rupe.

Mesingana ploča (Sl. 469) ima tri otvora, jedan kružni, jedan kvadratni i jedan trokutasti.



Eksperimentator dobiva nož i čep koji prolazi kroz kružnu rupu.

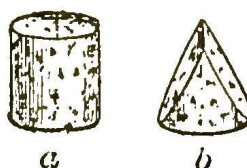
Od njega se traži da čep izreže tako da točno ispunji bilo koji od tri otvora.

Zbog nedostatka mesingane ploče, može se izrezati komad krutog kartona kako bi se ispunila ista svrha.

i rješenje na stranici 382.

Rješenje. Br. XX.- Jedan čep za tri rupe.

Lako je za uočiti da je jedna stranica "kvadrata" jednaka duljini promjera kružnice ili kruga.

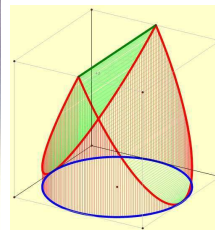
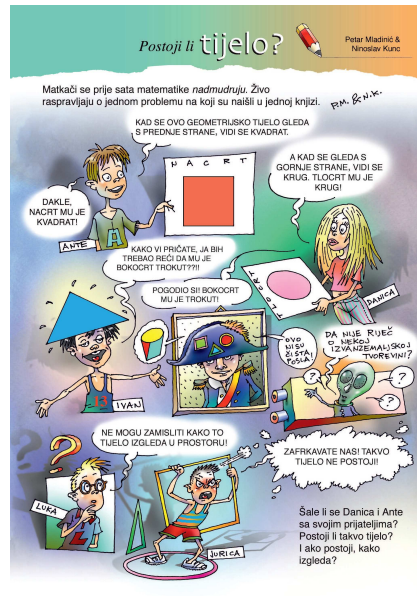


Izrežite čep na ovu duljinu, kao na slici; i ako se umetne bočno, tada će upravo stati u kvadratnu rupu.

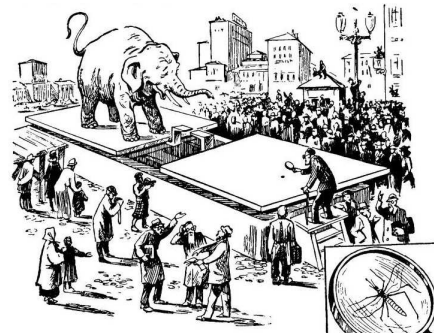
Već odgovara rupi kružnog oblika.

Da biste ga prilagodili trokutastom prostoru, povucite ravnu liniju preko jednog kraja kroz središte i od te linije izrežite jednaki dio u kosom smjeru.

U Matki je objavljen ovaj strip zadatak.



Evo još jednog strip zadatka koji sam objavio u časopisu "Matka" a nalazi se kod Kordemskog.



Čini se, ipak, da je Perelman knjigu oblikovao pod utjecajem knjige Louisa Hoffmanna iz 1907. godine, *Puzzles Old and New by PROFESSOR HOFFMANN*, iz koje je preuzeo

koncept, kao i mnoge zadatke.

PUZZLES

Old and New.

BY

PROFESSOR HOFFMANN,

Author of "Modern Magic," "Tricks with Cards," "Conjuror Dick," etc.

*2006 21

WITH ILLUSTRATIONS



LONDON
FREDERICK WARNE AND CO.
AND NEW YORK.

3978

U Predgovoru knjige Hoffmann je napisao:

Plutarh kaže da je Homer umro od tuge jer nije mogao pogoditi zagonetku; a folklor obiluje slučajevima gdje osvajanje princeze ili ishod neke opasne avanture ovisi o uspjehu u rješavanju neke zagonetke, verbalne ili druge.

U modernije doba ozbiljni matematičari, poput Cardana i Eulera, nisu prezirali iskorištavanje svog slobodnog vremena u izmišljanju "pozera" za zagonetke svojih manje učenih suparnika.

Glavne poteškoće koje sam pronašao pri sastavljanju ove zbirke bile su nomenklatura i klasifikacija.

S obzirom na različit ukus, neki su preferirali matematički, neki mehanički problem - jedna osoba isprobavanje vještine, druga vježbu strpljenja - činilo se poželjnim imati što više kategorija.

No, s druge strane, što su podjele brojnije, to je teže definitivno dodijeliti određenu zagonetku jednoj ili drugoj.

U mnogim se slučajevima isti predmet s jednakom opravdanošću može svrstati u nekoliko kategorija.

Nomenklatura predstavlja još veće poteškoće.

Isti se naziv često upotrebljava, s većom ili manjom mogućnošću, za dvije ili tri različite zagonetke. Primjerice, postoji oko pola tuceta "križnih" zagonetki, manje ili više različitih, ali sve imaju pravo na taj naziv i teško ih je razlikovati pod bilo kojim drugim imenom.

Mehaničke se zagonetke u katalogima različitih trgovaca često navode pod različitim nazivima; ono što je kod jednoga "arapska misterija", kod drugoga je, primjerice, "egipatski paradoks" ili "ašantijska teškoća".

Druge su nužno bez imena, jer je nemoguće smisliti bilo kakav kratki naslov koji bi dao bilo kakvu ideju o prirodi problema.

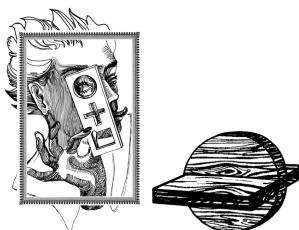
Vrlo široka skupina verbalnih zagonetki, koja obuhvaća zagonetke, enigme, šarade itd., ovdje je, zbog ograničenja prostora, izostavljena.

Uz ovu iznimku, nastojao sam učiniti ovu malu knjigu što je moguće potpunijom i moram odati veliko priznanje mnogim prijateljima (posebno gospodi Paulu Perkinsu i Edwardu Montaubanu) koji su mi pomogli u razradi.

Područje je, međutim, vrlo široko i gotovo je razumljivo da su mnoge "dobre stvari" iz neznanja ili nepažnje izostavljene.

Ako neki čitatelj primijeti takve propuste ili ima privatne informacije o predmetima od posebne vrijednosti, rado ću se s njima upoznati, s obzirom na buduća izdanja.

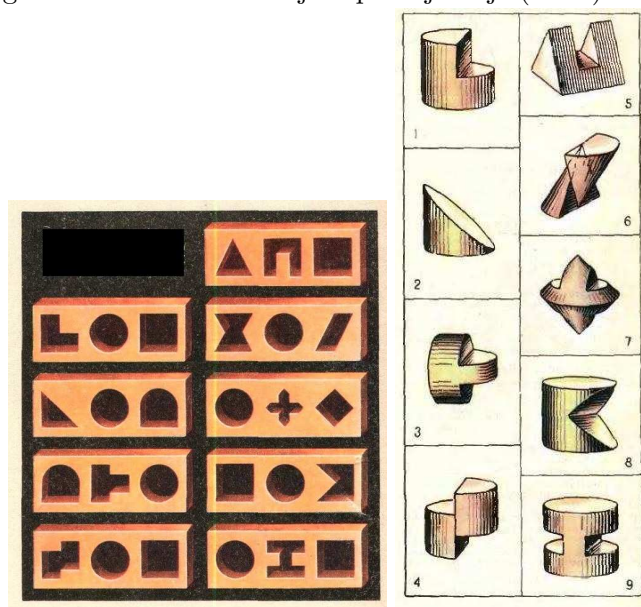
Perelman je u ovoj knjizi zadao ploču s tri rupe i nacrtao rješenje (v. sl.).



Ideja o čepu za tri rupe potaknula je mnoge Matemagičare za kreiranjem takvih problema.

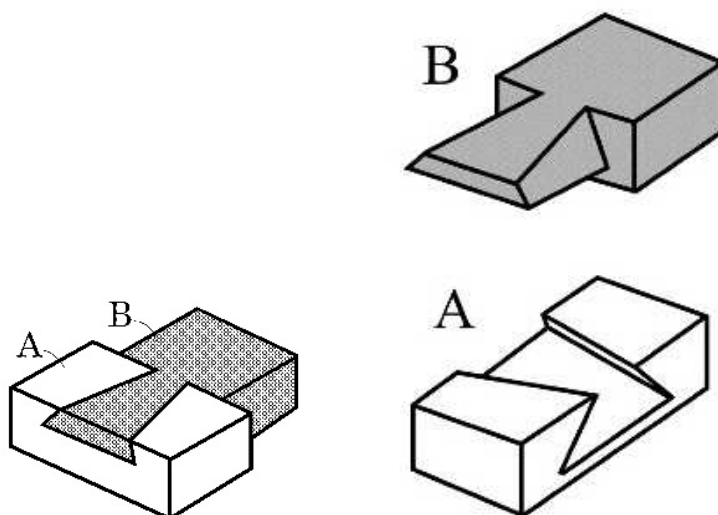
U tekstu "Mozgalice iz KVANTA" našao sam sljedeće probleme.

Dano je devet mogućih otvora za kreiranje čepa i rješenje (v. sl.).

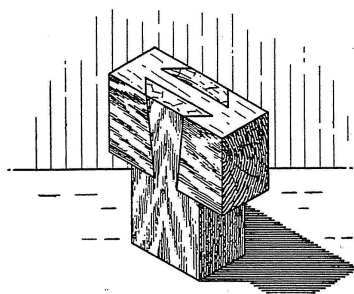


Ilustrirajmo i utjecaj Perelmanove kocke.

U knjizi "Puzzles 101" Nobuyuki Yoshigahara objavio je sljedeće tijelo i rješenje (v. sl.).



U knjizi radova iz časopisa "Zanimljive mozgalice" koju je izdao De Agostini nalazi se i ovakvo tijelo (v. sl.):



Oni koji su upoznati s Perelmanovom zagonetkom u drvu (vidi moju sliku matematičke igračke) vjerojatno mogu objasniti kako sastaviti jedan lastin rep.

Međutim, poznavanje pravog odgovora na tu zagonetnu konstrukciju samo povećava nečiju zbunjenost kada pokušavate shvatiti kako sastaviti spoj lastin rep s duplim čepom na suprotnoj strani.

Ovaj drugi čep onemogućuje dijagonalno klizanje zajedno koje se koristi na dvostrukom lastinom repu.



Vjerujemo da će čitatelji i mladi Matemagičari/učenici uporabom ove knjige i

rješavanjem Perelmanovih zadataka razviti ugodnu mentalnu gimnastiku, izoštriti domišljatost i snalažljivost.

Knjiga je namijenjena zabavi mladih matematičara i onih koji će to tek postati.

Postoje i problemi koji nisu povezani s određenom temom, ali se i dalje mogu koristiti pri vježbanju i pripremi uma za složenije zadatke, tj. ozbiljan matematički rad. Problemi koji uključuju permutacije i smještaje uče sustavnom traženju rješenja.

Vizualne iluzije izoštravaju vještine promatranja. Zadatci ili problemi koji uključuju rezanje figura i sastavljanje silueta razvijaju geometrijsku maštu.

Zaključno, pred vama je jedno od ruskih remek-djela namijenjeno mladim učenicima.

nikol.radovic@geof.unizg.hr

petar.mladinic1@zg.ht.hr

Predgovor

Prvih sto zagonetki



Predgovor I. knjige

Svrha ove knjige je pružiti materijal za ugodnu mentalnu gimnastiku, izoštriti domišljatost i snalažljivost. Namijenjena je ispunjavanju slobodnog vremena mladih matematičara, knjiga. Zbirka ne sadrži isključivo matematičke zagonetke. Uz aritmetičke i geometrijske probleme, zbirka uključuje i zagonetke iz područja fizike, kozmologije i logike.

Slične zbirke već postoje na ruskom jeziku. Pojava još jedne bila bi suvišna da autor nije nastojao osvježiti tradicionalni materijal s nekoliko desetaka problema, nekih novih, nekih malo poznatih koje je sam osmislio ili preuzeo iz stranih izvora.

Problemi zahtijevaju samo osnovno znanje čitatelja i namijenjeni su prvenstveno onima koji tek trebaju učiti matematiku.¹

Drugo izdanje knjige, objavljeno 1919.-1920. u velikom broju primjeraka², ponovno je tiskano bez značajnijih promjena.

Za treće izdanje tekst je ponovno uređen, a neki problemi, iz raznih razloga, zamijenjeni su drugima.

Listopad 1924. Ya. P.

¹Za one koji su upoznati sa školskom aritmetikom, tiskana je još jedna knjiga istog autora: "Zagonetke i zanimljivosti iz svijeta brojeva", Petrograd 1923.

²Naklada: 1. izdanje 1916. - 4000 primjeraka, 2. - 40 000 primjeraka. U tim izdanjima knjiga je objavljena pod naslovom "Veseli problemi".

Drugih sto zagonetki

**Predgovor II. knjige**

Moja prva zbirka zagonetki za mlade matematičare, objavljena 1915. godine ("Veseli zadatci"), naišla je na daleko širu primjenu od očekivanog. Uspjeh prve knjige potaknuo me je, uz njezin ponovni ispis, objaviti još jednu zbirku sličnog sadržaja, kako bih mladim matematičkim entuzijastima pružio šire polje za razvoj njihovih sposobnosti.

Ova knjiga stavljena je pred čitatelja. Unatoč podnaslovu (drugih sto zagonetki), ona nema nužne veze s prvom. To je jednostavno niz drugih vježbi, općenito ne težih ili lakših od onih ponuđenih u prvoj zbirci.

Materijal je ovdje sustavno odabran da bude raznolike težine, tako da svaki mladi čitatelj može pronaći vježbe prilagođene njegovim sposobnostima. Značajan dio zadataka (oko polovice ukupnog broja) osmislio sam ja. Većina ostalih zadataka se malo koristi i prvi put se pojavljuju u ruskoj zbirci.

Poput prve knjige, ova zbirka ne teži obrazovnim ciljevima, već ima za cilj izoštriti um kroz ugodnu mentalnu gimnastiku i time pripremiti mladi um za ozbiljniji rad u budućnosti.

Ya. P.

1. Postavljanje zagonetki i zabavne permutacije

1.1. Vjeverice i zečevi

Dani su panjevi numerirani brojevima 1 do 8 kao na slici. Zečevi sjede na panjevima 1 i 3, a vjeverice na 6 i 8. Ali iz nekog razloga, i vjeverice i zečevi nisu zadovoljni svojim položajima i žele zamijeniti panjeve: vjeverice žele sjediti na mjestima zečeva, a zečevi na mjestima vjeverica. To mogu učiniti skačući s panja na panj - ali samo duž linija označenih na dijagramu.



Kako su to mogli učiniti?

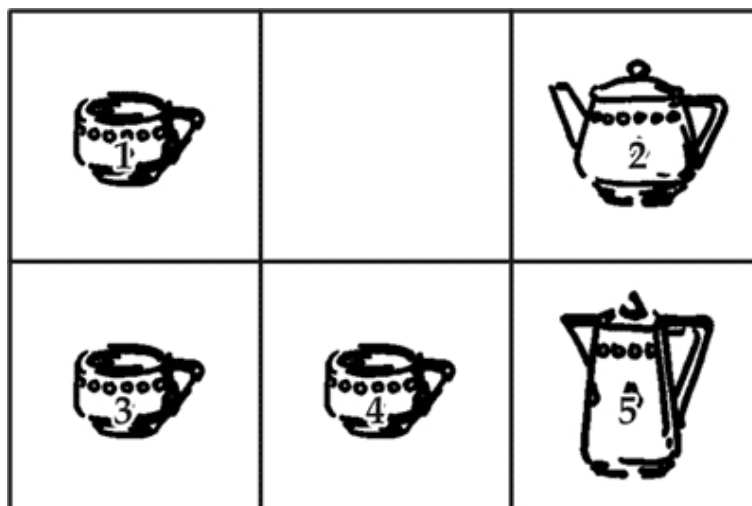
Vrijede sljedeća pravila:

- 1) Moguće je skakati s panja na panj samo duž linija označenih na dijagramu i svaka životinja može napraviti nekoliko skokova zaredom.
 - 2) Dvije životinje ne mogu stati na jedan panj, pa mogu skočiti samo na slobodan panj.
- Imajte na umu da životinje žele zamijeniti mjesta u što manjem broju skokova. Međutim to nije moguće napraviti u manje od 16 skokova.

1.2. Pribor za čaj

Jednom sam morao cijelu večer čekati vlak na maloj stanici. Nije bilo knjiga, novina, nikoga s kim bih razgovarao, a nisam znao kako ispuniti sate čekanja. Srećom, sjetio sam se intrigantnog problema na koji sam nedavno naišao u jednom stranom časopisu. Problem je bio sljedeći:

Stol je podijeljen na šest kvadrata, od kojih svaki, osim jednog, sadrži po jedan predmet. Koristio sam pribor za čaj i u kvadrate sam rasporedio tri šalice, čajnik i vrč za mlijeko, kao što je prikazano na slici.



Suština problema je zamijeniti položaje čajnika i vrča za mlijeko, premještajući predmete s jednog kvadrata na drugi prema određenim pravilima:

- 1) Premjestite predmet samo na kvadrat koji je prazan;
- 2) Ne pomičite predmete dijagonalno preko kvadrata;
- 3) Ne pomičite jedan predmet na drugi;
- 4) Ne stavljajte više od jednog predmeta u kvadrat, čak ni privremeno.

Ovaj problem ima mnogo rješenja, ali zanimljivo je pronaći najkraće - to jest, zamijeniti čajnik i vrč mlijeka u što manjem broju poteza.

Dok sam tražio ovo najkraće rješenje, nisam primijetio kako je večer prošla; morao sam napustiti stanicu a da te večeri nisam pronašao najkraće rješenje.

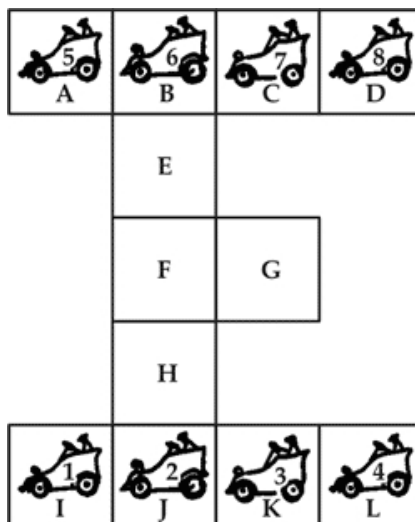
Možete li pronaći rješenje?

Za svaki slučaj, upozorit ću vas da je željeni najmanji broj poteza i dalje više od dvanaest, iako manji od petnaest.

1.3. Automobilska garaža

Naš crtež prikazuje plan automobilske garaže s prostorom za dvanaest automobila. Ali prostor je toliko nezgodan, toliko malen, da upravitelj garaže stalno nailazi na poteškoće. Evo jedne od njih.

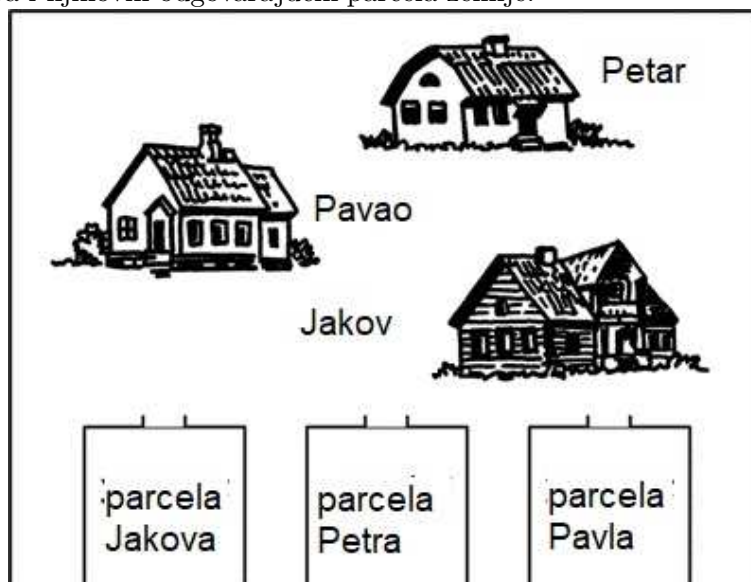
Pretpostavimo da je osam automobila parkirano na ovdje prikazanim pozicijama. Kako automobili 1, 2, 3 i 4 mogu zamijeniti mjesta s automobilima 5, 6, 7 i 8? I kojom metodom zamjene će to provesti u najmanje poteza?



Imajte na umu da se dva automobila ne mogu kretati istovremeno i da dva automobila ne mogu istovremeno biti na istom mjestu.

1.4. Tri ceste

Tri brata - Petar, Pavao i Jakov - dobili su tri parcele zemlje za obradu, smještene blizu jedna drugoj, nedaleko od njihovih domova. Dijagram prikazuje lokacije kuća Petra, Pavla i Jakova i njihovih odgovarajućih parcela zemlje.



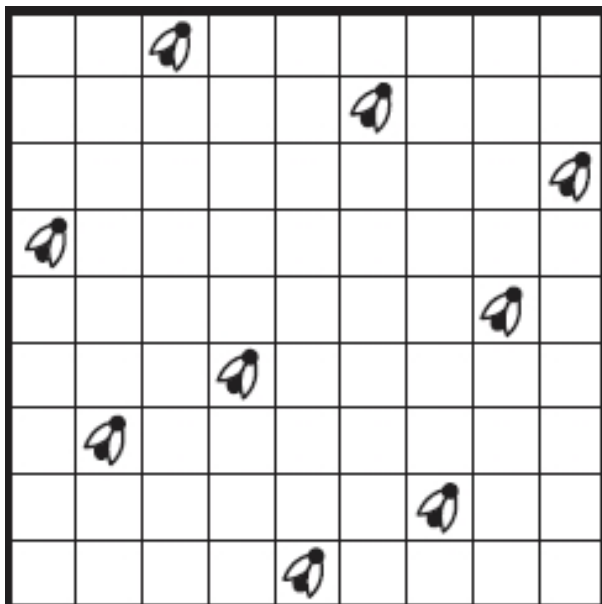
Primjećujete da parcele nisu baš povoljno smještene za one koji ih obrađuju, ali braća se nisu mogla dogovoriti o zamjeni. Svaki je postavio povrtnjak na svojoj parceli, a budući da su se najkraći putevi do vrtova križali, ubrzo su započele prepirke među braćom, koje su na kraju prerasle u svađu.

Želeći izbjeći bilo kakve sukobe, braća su odlučila pronaći put do svojih parcela tako da se njihovi putevi ne križaju.

Možete li mi reći koje su to rute?

1.5. Muhe na zavjesi

Devet muha sletjelo je na zavjesu oslikanu kvadratićima. Muhe su nasumično raspoređene tako da se nikoje dvije muhe nisu nalazile u istom redku, stupcu ili dijagonali (v. sl.).



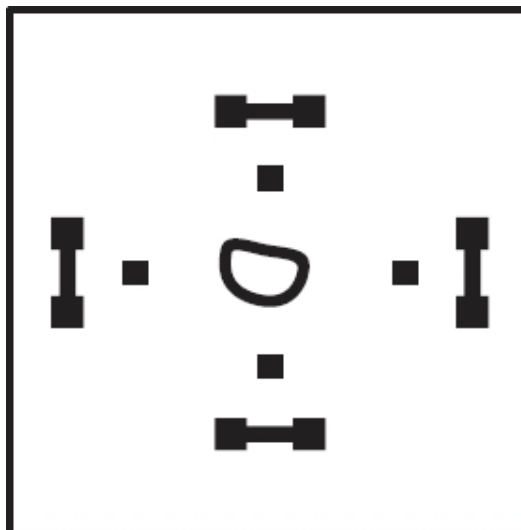
Nakon nekoliko minuta, tri muhe promijenile su svoje položaje i prešle su u susjedne, prazne kvadrate; preostalih šest ostalo je na svojim mjestima.

I zanimljivo: iako su se tri muhe pomaknule na druga mjesta, svih devet muha ponovno je bilo raspoređeno tako da se nijedan par nije nalazio u istom vodoravnom, okomitom ili dijagonalnom redu.

Možete li odrediti koje su se tri muhe pomaknule i koje kvadrate su odabrale?

1.6. Ljetni stanovnici i krave

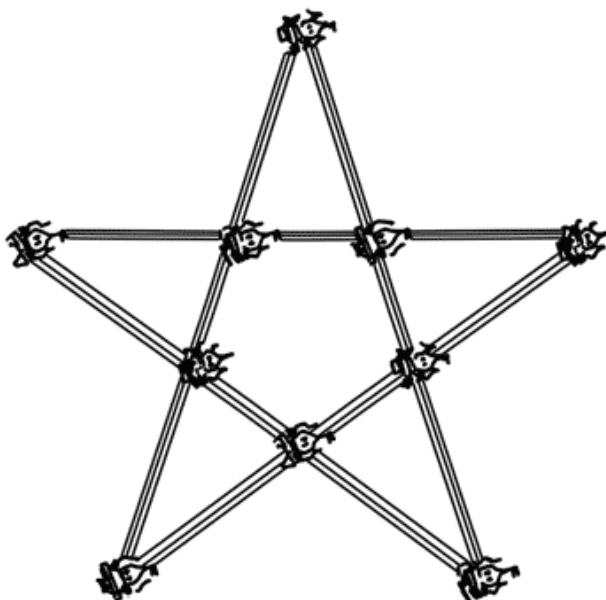
Oko jezera su smještene četiri ljetne kućice, dok se četiri štale za krave nalaze bliže samoj obali. Vlasnici kućica žele izgraditi neprekinutu ogradu koja će spriječiti kravama pristup jezeru, ali će istovremeno omogućiti svim stanovnicima kućica slobodan i nesmetan prolaz do obale.



Je li to moguće? Ako jest, kako bi ograda trebala biti izgrađena da bude što kraća i stoga što jeftinija?

1.7. Deset kuća

Netko je htio izgraditi 10 kuća povezanih jakim zidovima; zidovi su trebali biti raspoređeni u pet ravni linija, s četiri kuće u svakoj liniji. Arhitekt koji je angažiran predstavio je plan prikazan na slici.



No, klijent nije bio zadovoljan ovim planom: s ovim rasporedom, svakoj kući se moglo pristupiti izvana, a želio je da barem jedna ili dvije kuće, ako ne i sve, budu zaštićene zidovima od vanjskog napada.

Arhitekt je prigovorio da se ovaj uvjet ne može ispuniti, budući da se 10 kuća moralo smjestiti, četiri na svakoj od pet linija. Ali klijent je inzistirao.

Arhitekt je dugo razmišljao o ovom problemu i konačno ga riješio.

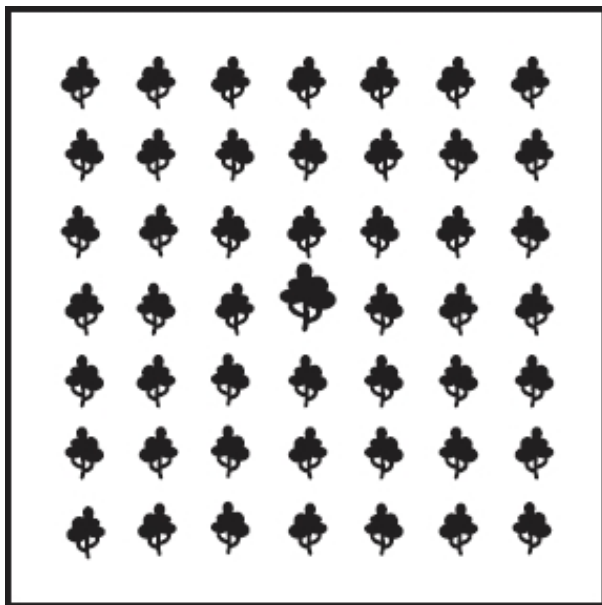
Možda ćete i vi imati dovoljno sreće pronaći raspored 10 kuća s pet ravni linija koje ih povezuju, pri čemu je ispunjen traženi uvjet.

1.8. Drveće u vrtu

U vrtu je posađeno 49 stabala kao što je prikazano na slici. Vrtlar je utvrdio da je stabala previše te želi ukloniti višak kako bi olakšao sadnju cvjetnjaka.

Pozvao je radnika i dao mu sljedeće upute:

”Ostavite samo 5 redova stabala, 4 stabla u svakom redu. Ostatak posjecite i uzmite ih kao ogrjev za svoj trud.”



Kad je rezanje bilo završeno, vrtlar je izašao pregledati posao. Na njegovu žalost, vrt je bio gotovo uništen: umjesto 20 stabala, radnik je ostavio samo 10, nakon što je posjekao 39 stabala!

”Zašto ste posjekli toliko? Rečeno vam je da ostavite 20 stabala”, ukorio ga je vrtlar.

”Ne, ne 20, rečeno mi je da ostavim 5 redova od po 4 stabla. Upravo sam to i učinio. Pogledajte.”

I doista: vrtlar se zapanjio kad je vidio da 10 preostalih stabala formira pet redova od po četiri stabla. Radnik je u potpunosti ispunio naredbu, a ipak je, umjesto 29 stabala, posjekao 39.

Kako je to uspio učiniti?

1.9. Bijeli miš

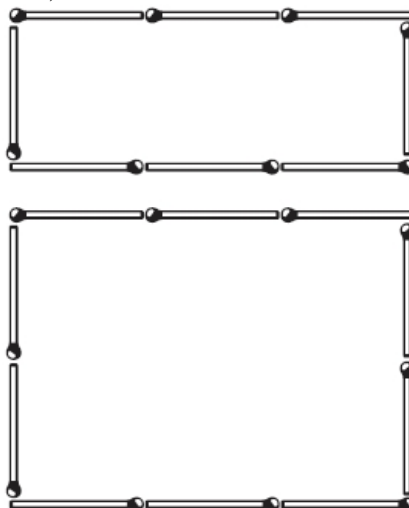
Svih 13 miševa koji okružuju ovu mačku predodređeno je da postanu njezina večera. Mačka ih želi pojesti određenim redoslijedom. Počevši od odabranog miša, broji miševe u krugu u smjeru u kojem su okrenuti i pojede svakog trinaestog miša. Nakon što pojede jednog miša, nastavlja brojati od sljedećeg miša.



S kojim mišem treba početi kako bi bijeli miš bio pojesten posljednji?

1.10. 18 žigica

Koristeći 18 žigica, lako je oblikovati dva četverokuta tako da jedan bude dvostruko veće površine od drugog (v. sl.).



Ali koristeći iste žigice, oblikujte dva takva četverokuta tako da jedan ima tri puta veću površinu od drugog.

1.11. Rješenja zadataka od 1.1. - 1.10.

Rješenje problema br. 1.1: Najkraća metoda zamjene prikazana je u nastavku. Brojevi označavaju s kojeg panja na koji treba skočiti (npr. "1-5" znači da vjeverica skače s panja 1 na panj 5).

Potrebno je ukupno 16 skokova, i to: 1-5; 3-7, 7-1; 8-4, 4-3, 3-7; 6-2, 2-8, 8-4, 4-3; 5-6, 6-2, 2-8; 1-5, 5-6; 7-1.

Rješenje problema br. 1.2: Radi praktičnosti, pribor za čaj zamijenit ćemo brojevima. Tada će problem izgledati ovako:

1		2
3	4	5

Moramo zamijeniti mjesta 2 i 5. Evo redoslijeda kojim se predmete treba premjestiti na prazan kvadrat: 2, 5, 4, 2, 1, 3, 2, 4, 5, 1, 4, 2, 3, 4, 1, 5, 2.

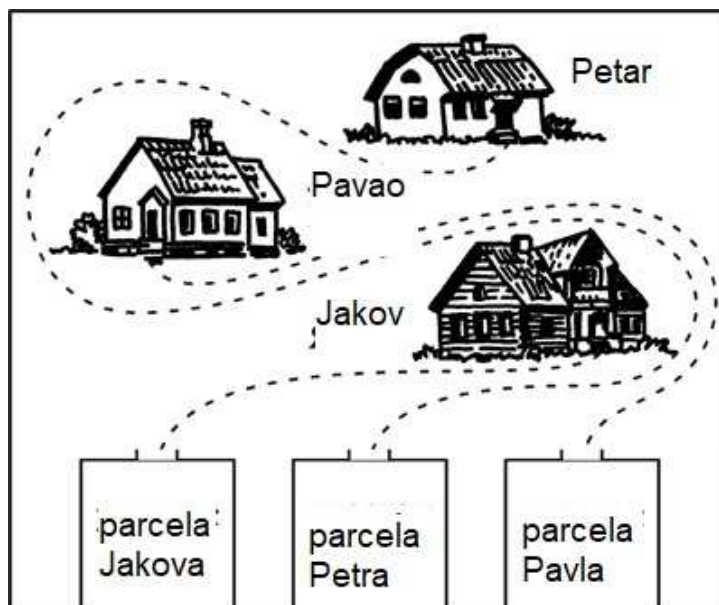
Problem se može riješiti u 17 poteza - ne postoji kraće rješenje.

Rješenje problema br. 1.3: Ova tablica prikazuje sve poteze potrebne za rješavanje problema upravitelja garaže, redoslijedom kojim se izvode. Brojevi označavaju automobile, a slova odgovarajuće odjeljke. Za rješavanje problema potrebno je ukupno 43 poteza.

Evo ih: "6 - G" znači: automobil br. 6 ide u odjeljak G i tako dalje.

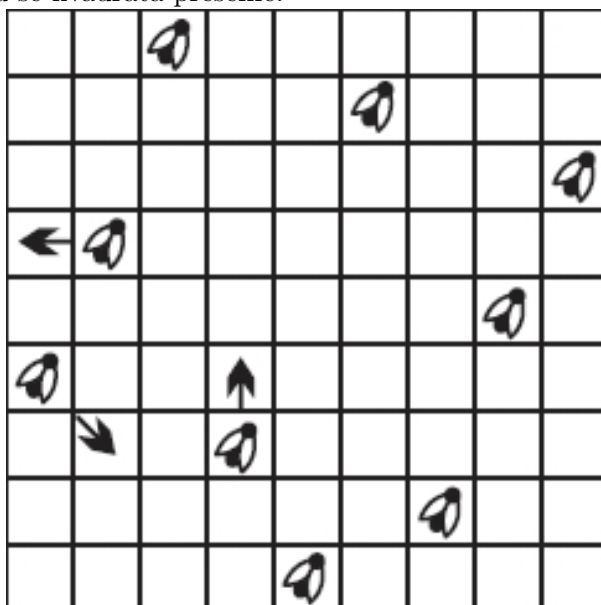
6 — G	4 — A	1 — G	3 — G
2 — B	7 — F	2 — J	6 — I
1 — E	8 — E	7 — H	2 — J
3 — H	4 — D	1 — A	5 — H
4 — I	8 — C	7 — G	3 — C
3 — L	7 — A	2 — B	5 — G
6 — K	8 — G	6 — E	3 — B
4 — G	5 — C	3 — H	6 — E
1 — I	2 — B	8 — L	5 — I
2 — J	1 — E	3 — I	6 — J
5 — H	8 — I	7 — K	

Rješenje problema br. 1.4: Na ovom dijagramu prikazana su tri puta koji se ne sijeku:

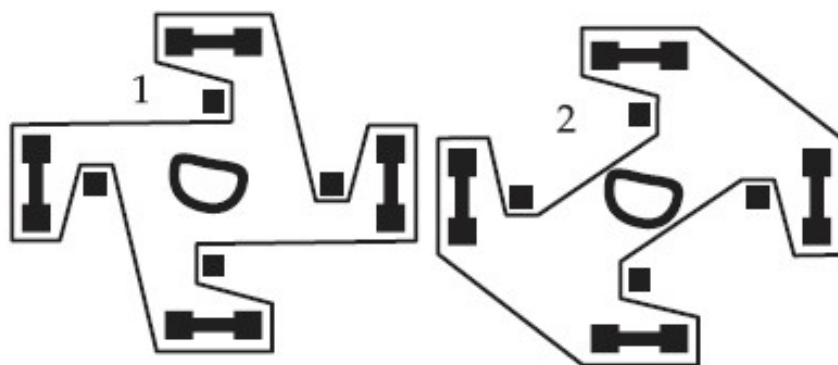


Petar i Pavao moraju ići prilično vijugavim putovima, ali barem braća izbjegavaju neželjene susrete.

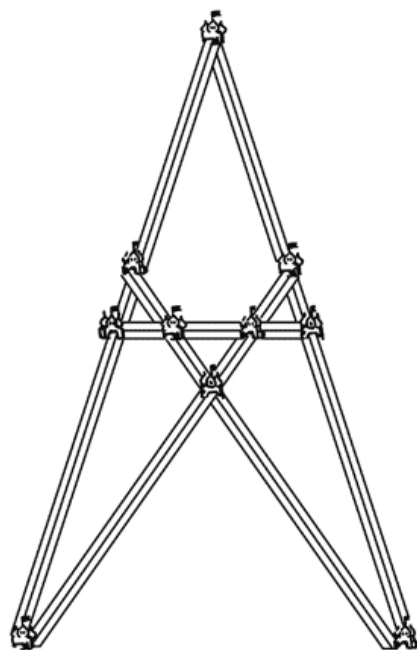
Rješenje problema br. 1.5: Strjelice na slici pokazuju koje su muhe promijenile položaj i iz kojih su se kvadrata preselile.



Rješenje problema br. 1.6: Ograda se može izgraditi na dva načina. Na slici su dana dva nacrti moguća smjera postavljanja ograde. Ograda izgrađena prema drugom nacrtu je kraća i stoga jeftinija.

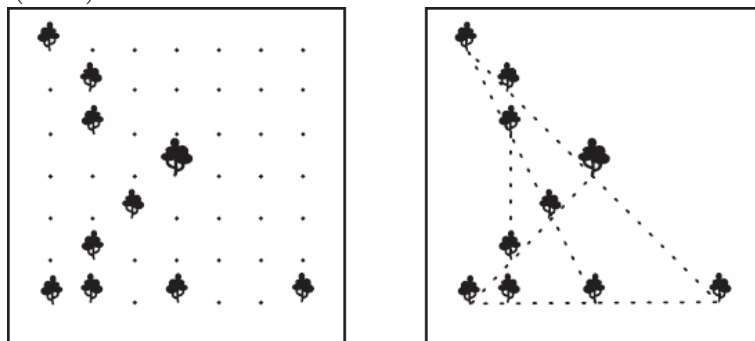


Rješenje problema br. 1.7: Ovo je jedini raspored u kojem su dvije kuće (u 3 slučaja) sigurne od napada izvana.



Vidite da je 10 kuća ovdje raspoređeno prema uvjetima zadatka ili kako je traženo u zadatku problemu: četiri na svakom od pet ravni zidova.

Rješenje problema br. 1.8: Stabla koja su ostala neposječena raspoređena su na sljedeći način (v. sl.):

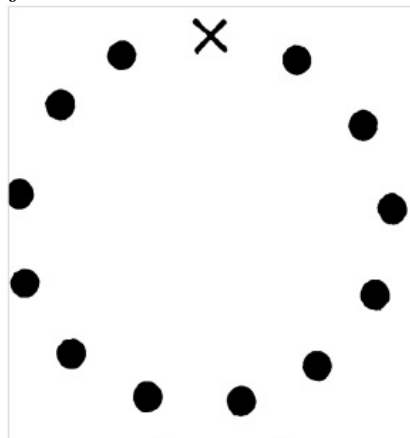


Kao što vidite, preostala stabla tvore 5 ravni redova, s 4 stabla u svakom redu.

Rješenje problema br. 1.9: Kako biste unaprijed odredili od kojeg miša početi brojati, postavite 12 točaka i jedan križić (v. sl.) oko kruga i počnite brojati od križića¹.

¹Ovu smo uputu uzeli iz knjige B. A. Kordemskog "Matematička pamet" objavljene 1955. godine.

Kružeci krugom u jednom smjeru, prekrižite svaku trinaestu točku dok ne ostane jedna točka. Ta točka određuje mjesto bijelog miša. Sada na mjesto početnog križića stavite miša kojeg mačka prvog pojede.

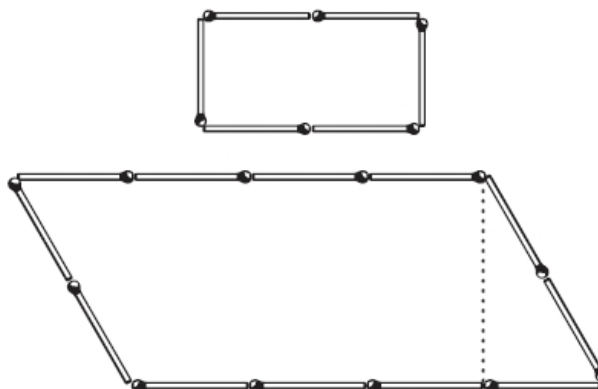


Mačka prvo mora pojesti miša koji se na crtežu rješenja nalazi označen.

Pokušajte od tog miša brojati u krug i prekrižiti svakog 13. miša. Vidjet ćete da će bijeli miš biti posljednji prekrižen.



Rješenje problema br. 1.10.



Dijagram prikazuje kako od 18 žigica oblikovati dva četverokuta, jedan tri puta veće površine od drugog. Drugi četverokut je paralelogram s visinom jednakom $1\frac{1}{2}$ žigice.

Površina paralelograma jednaka je njegovoj osnovici pomnoženoj s visinom. Osnovica našeg paralelograma sadrži 4 žigice, a visina je $1\frac{1}{2}$ žigice; znači, površina je $4 \cdot 1\frac{1}{2}$, tj. 6 takvih kvadrata, od kojih su 2 u manjem četverokutu.

Znači, donji četverokut ima površinu tri puta veću od gornjeg.

2. Deset jednostavnih zadataka

2.1. Bačve

U trgovinu je dostavljeno šest bačvi kerozina. Na slici je prikazano koliko je kanti kerozina sadržavala svaka bačva.



Prvog dana pojavila su se dva kupca. Jedan je kupio dvije cijele bačve, a drugi tri bačve, pri čemu je prvi kupio upola manje kerozina od drugoga. Nisu čak ni morali otvarati bačve.

Nakon toga od šest bačvi u skladištu ostala je samo jedna. Koja?

2.2. Do pola

Bačva je naizgled napola puna vode. Ali želite točno znati je li do pola puna, više od pola ili manje od pola. Nemate štap ili bilo koji drugi instrument za mjerenje bačve. Bačva nema slavinu. Kako možete utvrditi je li bačva točno napola puna?

2.3. Nemoguća jednakost

Kažemo da je poluprazna bačva isto što i polupuna bačva. Ali ako su polovice jednake, onda i cijele bačve moraju biti jednake.

Ako je poluprazna bačva jednaka polupunoj bačvi, zaključujemo da prazna bačva mora biti jednaka punoj.

Dakle, prazna je jednaka punoj!

Zašto je zaključak pogrešan?

2.4. Broj vlasi

Mislite li da na svijetu postoje dvije osobe s istim brojem vlasi na glavi?

Mogli biste odgovoriti da dvije potpuno ćelave osobe imaju jednak broj vlasi, jer obje nemaju nijednu vlas.

To bi bio točan odgovor, ako bismo računali i ćelave osobe.

Ali ne pitam za ljude bez vlasi, već za one s gustom kosom. Postoje li na svijetu dvije osobe s potpuno istim brojem vlasi na glavi?

Ili se možda dvije takve osobe mogu naći u Lenjingradu ili Moskvi?

2.5. Cijena uveza

Uvezana knjiga košta 2 rublje i 50 kopejki. Knjiga je 2 rublje skuplja od uveza.

Koliko košta uvez?

2.6. Cijena knjige

Ivan kupuje sve knjige koje su mu potrebne od knjižara kojeg poznaje s popustom od 20%. Počevši od 1. siječnja, cijene svih knjiga povećavaju se za 20%. Ivan će, začudo, i dalje platiti manje od ostalih kupaca koji su platili prije 1. siječnja.

Je li u pravu?

2.7. Glave i noge

Konji su pasli na livadi pod nadzorom svojih kočijaša.

Ako biste htjeli prebrojati ukupan broj nogu na livadi, izbrojali biste ukupno 82. A ako biste prebrojali glave, otkrili biste da je ukupno 26 glava - konjskih i ljudskih.

Koliko je konja bilo, a koliko kočijaša?

Treba napomenuti da na livadi nije bilo konja bez nogu ili kočijaša s invaliditetom.

2.8. Korištenje abakusa

Bez sumnje ste upoznati s korištenjem abakusa i znate da je prikazivanje iznosa od 25 rubalja vrlo jednostavan zadatak.

Ali zadatak postaje izazovniji ako dobijete poseban zahtjev: prikazati taj iznos koristeći 25 perli umjesto 7.

Pokušajte na abakusu prikazati iznos od 25 rubalja pomoću točno 25 perli.

Naravno, to se u praksi nikada ne radi, ali problem je i dalje rješiv, a odgovor je prilično zanimljiv.

2.9. Rijedak novčić

Kolekcionar rijetkih predmeta obaviješten je da je tijekom iskapanja u Rimu pronađen novčić s latinskim natpisom "55. pr. Kr."

"Novčić je, naravno, krivotvoren", odgovorio je kolekcionar.

Kako je to mogao znati a da nije vidio sam novčić, niti njegovu sliku?

2.10. Šparoge

Žena obično kupuje šparoge od piljara na tržnici u velikim svežnjevima, svaki opsega 40 centimetara. Mjeri ih dok kupuje kako bi se uvjerila da je ne vara.

Ali jednog dana, piljar nije imao svežanj od 40 centimetara, pa je kupcu ponudio dva tanka svežnja, svaki opsega 20 centimetara, za istu cijenu.

Žena je izmjerila dva svežnja i, nakon što je potvrdila da svaki doista ima opseg od 20 centimetara, platila piljaru isti iznos kao što je prethodno platila za jedan debeli svežanj.

Je li tom kupnjom ostvarila dobitak ili gubitak?

2.11. Rješenja zadataka 2.1.-2.10.

Rješenje problema br. 2.1:

Prvi kupac kupio je bačvu od 15 kanti i bačvu od 18 kanti. Drugi je kupio bačvu od 16 kanti, bačvu od 19 kanti i bačvu od 31 kante.

Doista:

$$15 + 18 = 33$$

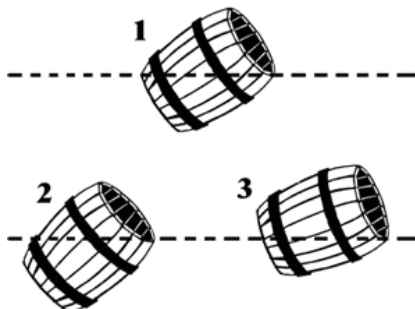
$$16 + 19 + 31 = 66,$$

tj. drugi kupac kupio je dvostruko više kerozina od prvoga.

Bačva od 20 kanti ostala je neprodana.

Ovo je jedini mogući odgovor. Ostale kombinacije ne daju potreban omjer.

Rješenje problema br. 2.2:



Najjednostavniji je način nagnuti bačvu tako da voda dosegne rub.

Ako se dio dna bačve vidi iznad površine vode, u bačvi je manje od polovice vode.

Ako je cijelo dno ispod razine vode, u bačvi je više od polovice.

A ako je gornji rub dna točno u razini vode, bačva je napunjena točno do polovice.

Rješenje problema br. 2.3: Poluprazna bačva nije $1/2$ prazne bačve, niti je polupuna bačva $1/2$ pune bačve. Izrazi polupuna i poluprazna se odnose na istu količinu tekućine, pa jednakost ne možemo samo pomnožiti s 2 i tvrditi da je prazno jednako puno.

Nije iznenađujuće da smo zbog tog nesporazuma došli do pogrešnog zaključka.

Rješenje problema br. 2.4: Prije rješavanja problema, zapitajte se:

Što je brojnije - broj ljudi na svijetu ili broj dlaka na glavi jedne osobe?

Naravno, na svijetu ima neizmjereno više ljudi nego što ima dlaka na glavi jedne osobe. Imamo samo 150 000-200 000 dlaka na glavi, dok na svijetu ima 1 800 milijuna ljudi.

A ako je tako, onda moraju postojati ljudi s istim brojem dlaka!

I ne samo u cijelom svijetu, već čak i u svakom gusto naseljenom gradu s više od 200 000 stanovnika. Moskva ima 1,5 milijuna stanovnika, što znači da deseci Moskovljana moraju imati isti broj dlaka.

Uostalom, ne može postojati 1,5 milijuna različitih cijelih brojeva, od kojih nijedan nije veći od 200 000.

Rješenje problema br. 2.5: Ljudi obično odgovore bez razmišljanja:

”Uvez košta 50 kopejki.”

Ali onda bi knjiga koštala 2 rublje, što znači da bi koštala samo 1 rublju i 50 kopejki više od uveza!

Točan odgovor: uvez košta 25 kopejki, knjiga stoji 2 rublje i 25 kopejki.

Rješenje problema br. 2.6: Ivan će, začudo, i dalje platiti manje od ostalih kupaca koji su platili prije 1. siječnja.

Dobit će popust od 20% na cijenu povećanu za 20%; drugim riječima, dobit će popust od 20% na 120%, što znači da ne će platiti 100%, već samo 96% prethodne cijene knjige.

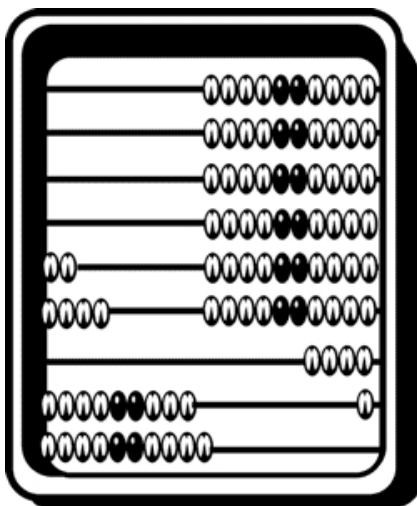
Knjigu od 3 rublje platit će 2 rublje i 88 kopejki, a ne 3 rublje.

Rješenje problema br. 2.7: Kad bi svih 26 glava na livadi bilo ljudskih, ne bismo izbrojali 82 noge, već samo 52, tj. 30 nogu manje. Zamjenom jedne ljudske glave konjskom glavom ukupan broj nogu povećao bi se za 2.

Stoga, da bismo izbrojali 82 noge, morali bismo napraviti ovu zamjenu 15 puta - tada bismo pronašli nedostajućih 30 nogu.

Dakle, od 26 glava, 15 je pripadalo konjima, a preostalih 11 ljudima.

Rješenje problema br. 2.8: Uobičajeno bismo prikazali 25 rubalja na abakusu pomoću 2 perle na žici za desetice (20 rubalja) i 5 perli na žici za jedinice (5 rubalja). Ukupno: $2 + 5 = 7$ perli.

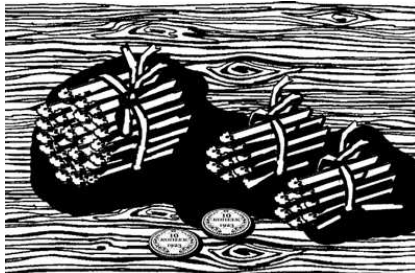


Doista: $20 \text{ rubalja} + 4 \text{ rublje} + 90 \text{ kopejki} + 10 \text{ kopejki} = 25 \text{ rubalja}$.

Broj perli je $2 + 4 + 9 + 10 = 25$.

Rješenje problema br. 2.9: Jesu li Rimljani mogli znati da će se Krist roditi 53 godina kasnije, kujući novac prije Kristova rođenja?

Rješenje problema br. 2.10: Žena je pogriješila. Dvostruki svežanj ne sadrži dvostruko više šparoga od tankog svežnja, već četiri puta više (v. sl.).



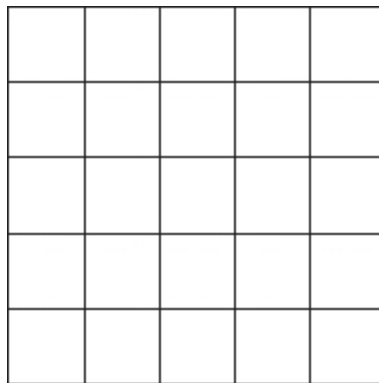
Žena je trebala platiti upola manje ili naručiti ne dva, već četiri tanka svežnja.

3. Deset težih problema

3.1. Koliko ima pravokutnika?

Koliko pravokutnika možete izbrojati na ovoj slici?

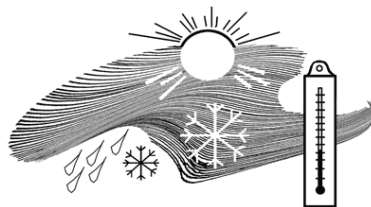
Nemojte žuriti s odgovorom. Imajte na umu da se pitanje ne odnosi samo na broj kvadrata, nego na ukupan broj pravokutnika - velikih i malih - koji se mogu izbrojati na ovoj slici.



3.2. Réaumur i Celsius

Naravno, znate razliku između Réaumurove i Celzijeve temperaturne ljestvice.

Recite mi: jesu li stupnjevi na Réaumurovom termometru uvijek veći od onih na Celzijevom termometru?



3.3. Stolar i tesari

Zaposleno je šest tesara i jedan stolar.

Svaki je tesar zaradio 20 rubalja, a stolar je zaradio 3 rublje više od prosječne zarade svih sedam radnika.

Koliko je dakle stolar zaradio?

3.4. Devet znamenki

Napišite devet znamenki redom: 1 2 3 4 5 6 7 8 9.

Možete, bez promjene njihovog redoslijeda, umetnuti znakove plus i minus između znamenki tako da zbroj bude točno 100.

Lako je, na primjer, dobiti 100 umetanjem + i – šest puta: $12+3-4+5+67+8+9 = 100$.

Ako želite umetnuti + ili – samo četiri puta, možete dobiti i 100.

$$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100.$$

Međutim, pokušajte dobiti 100 koristeći + i – samo tri puta!

Mnogo je teže. Ipak, sasvim je moguće; samo morate biti strpljivi.

3.5. Knjiški moljac

Na mojoj knjižnoj polici nalaze se Puškinova djela u osam svezaka, svezak do sveska.

Vraćajući se s dače¹, bio sam razdražen kad sam otkrio da je knjižni moljac ovog ljeta marljivo bušio mog Puškina, uspijevajući izgristi put od prve stranice prvog sveska do posljednje stranice trećeg sveska.

Koliko je stranica ukupno crv pojeo, ako prvi svezak ima 700 stranica, drugi 640, a treći 670?

3.6. Zbrajanje i množenje

Bez sumnje ste više puta primijetili neobično svojstvo jednakosti:

$$2 + 2 = 4$$

$$2 \cdot 2 = 4.$$

To je jedini primjer u kojem su zbroj i umnožak dvaju cijelih, međusobno jednakih brojeva jednaki.

Međutim, možda niste svjesni da postoje mješoviti brojevi (iako ne jednaki) s istim svojstvom:

$$3 + 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

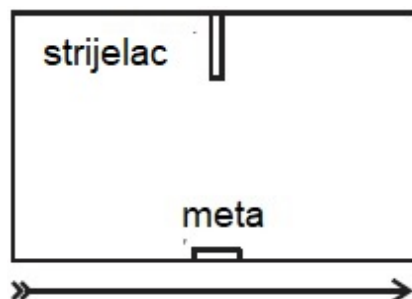
$$3 \cdot 1\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

Pokušajte pronaći više primjera takvih brojeva. Da ne mislite da je vaša potraga uzaludna, reći ću vam da postoji popriličan broj takvih brojeva.

3.7. Gađanje na parobrodu

Dobar strijelac stoji na jednoj strani parobroda, a meta je postavljena na suprotnoj strani. Parobrod se kreće kao što je prikazano dugom strjelicom na priloženom crtežu.

¹Dača je ruski naziv za vikendicu ili kuću za odmor izvan grada.



Strijelac je savršeno nanišanio. Hoće li pogoditi metu?

3.8. Pod vodom

Vaga ima kamen mase točno 2 kilograma na jednoj tavi i željezni uteg od 2 kilograma na drugoj.

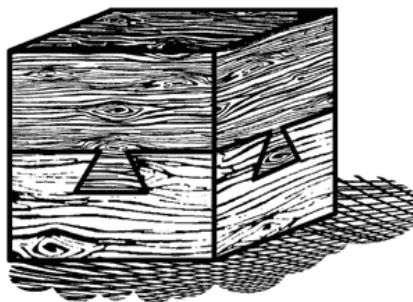
Pažljivo spuštam vagu pod vodu.

Ostaju li tave uravnotežene?

3.9. Kako je napravljeno?

Na slici je drvena kocka izrađena ili složena od dva komada drva tako da gornja polovica kocke ima izbočine koje se uklapaju u udubljenja u donjoj polovici.

Pogledajte oblik i položaj izbočina i objasnite: kako je stolar uspio spojiti dva komada?



3.10. Brzina vlaka

Sjediš u vagonu vlaka i želiš znati koliko brzo putuje.

Možeš li to odrediti po zvuku kotača?

3.11. Rješenje zadataka od 3.1. - 3.10.:

Rješenje problema br. 3.1: Na ovoj slici nalazi se 225 različito postavljenih pravokutnika.

Rješenje problema br. 3.2: Ako govorimo o stupnjevima temperature, onda je, naravno, stupanj Réaumura uvijek veći od stupnja Celzija, točno za $\frac{1}{5}$; stoga, ako je u vašoj sobi 16 stupnjeva Réaumura, onda je to Celzijevih 20 stupnjeva.

Ali to ne znači da na pločici termometra na kojoj su označene podjele (na "ljestvici"), duljina stupnjeva uvijek treba biti veća na Rëaumurovu termometru nego na Celzijevu termometru.

Duljina podjele ovisi o količini žive u balonu termometra i debljini cijevi. Što je više žive u balonu i što je cijev tanja, to se živa više diže u cijevi kada se zagrijava i veći je razmak između dviju podjela skale.

U tom smislu, "stupanj" može imati širok raspon duljina i sasvim je razumljivo da je takav stupanj Rëaumura često manji od stupnja Celzija.

Rješenje problema br. 3.3: Lako je saznati prosječnu zaradu sedam radnika; da biste to učinili, višak od 3 rublje podijelite podjednako među šest tesara.

Dakle, svakom od šest tesara dodamo 50 kopejki na njegovih 20 rubalja; to je prosječna zarada svih sedam radnika.

Iz ovoga saznajemo da je stolar zaradio 20 rubalja i 50 kopejki + 3 rublje, tj. 23 rublje i 50 kopejki.

Rješenje problema br. 3.4: Evo kako možete dobiti 100 iz niza od devet znamenki i tri znaka + i -: $123 - 45 - 67 + 89 = 100$.

Doista:

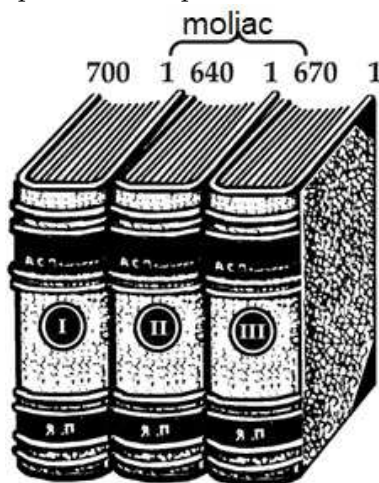
$$\begin{array}{r} +123 \\ +89 \\ \hline 212 \end{array} \quad + \begin{array}{r} 45 \\ 67 \\ \hline 112 \end{array} - \begin{array}{r} 212 \\ 112 \\ \hline 100 \end{array}.$$

Problem nema drugih rješenja.

Međutim, ako imate strpljenja, pokušajte s drugim kombinacijama.

Rješenje problema br. 3.5: Čini se da bi jednostavno zbrajanje brojeva stranica triju svezaka riješilo problem. Ali nemojte žuriti s rješenjem.

Primijetite kako su knjige raspoređene na polici i kako su stranice raspoređene.



Vidite da je prva stranica prvog sveska uz stranicu 640 drugog sveska, a posljednja stranica trećeg sveska uz stranicu 1 drugog sveska.

Ako se crv ukopao od prve stranice prvog sveska do posljednje stranice trećeg sveska, tada bi progrizao samo 640 stranica srednjeg sveska, plus četiri korice - ne više.

Rješenje problema br. 3.6: Postoji bezbroj parova takvih brojeva. Evo nekoliko primjera:

$$\begin{array}{ll}
4+1\frac{1}{3}=5\frac{1}{3}; & 5+1\frac{1}{4}=6\frac{1}{4}; \\
4\times 1\frac{1}{3}=5\frac{1}{3}; & 5\times 1\frac{1}{4}=6\frac{1}{4}; \\
11+1,1=12,1; & 9+1\frac{1}{8}=10\frac{1}{8}; \\
11\times 1,1=12,1; & 9\times 1\frac{1}{8}=10\frac{1}{8}; \\
21+1\frac{1}{20}=22\frac{1}{20}; & 101+1,01=102,01; \\
21\times 1\frac{1}{20}=22\frac{1}{20}; & 101\times 1,01=102,01.
\end{array}$$

Rješenje problema br. 3.7: Naravno, dobar strijelac će pogoditi metu - sve dok se parobrod kreće jednoliko po pravcu.

Takvo kretanje broda ne može ni na koji način utjecati na let metka.

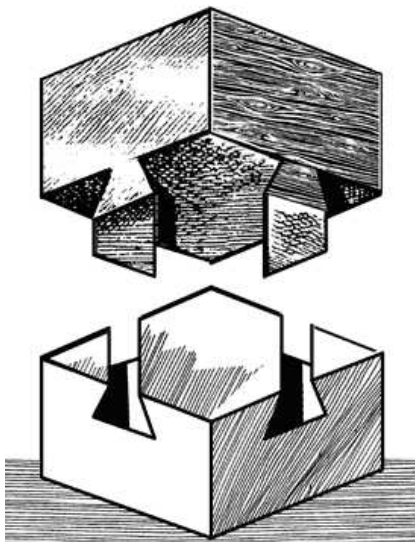
Drugačiji bi ishod bio da se, u samom trenutku pucnja, brod naglo zaustavi, uspori, ubrza ili promijeni kurs: tada metak možda ne će pogoditi metu.

Rješenje problema br. 3.8: Svaki predmet uronjen u vodu postaje lakši: on "gubi" onoliko težine koliko je teška istisnuta voda.

Poznavajući ovaj zakon (koji je otkrio Arhimed), lako možemo odgovoriti na problem.

Kamen od 2 kilograma zauzima veći volumen od željeznog utega od 2 kilograma jer je kamen, granit, lakši od željeza. Stoga će kamen istisnuti veći volumen vode od utega i, prema Arhimedovom zakonu, izgubit će više težine u vodi nego uteg.

Rješenje problema br. 3.9: Drvena kocka se vrlo lako otvara, kao što se može vidjeti na slici.



Trik je u tome što izbočine i udubljenja nisu raspoređeni u križ, kako bi se nekomе moglo nehotice učiniti pri pregledu gotovog proizvoda, već paralelno, pod kutom.

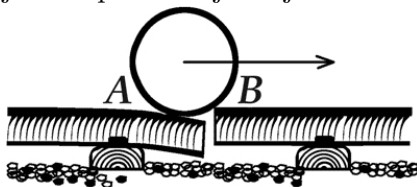
Ove izbočine je vrlo lako umetnuti u odgovarajuća udubljenja sa strane.

Rješenje problema br. 3.10: Vjerojatno ste primijetili, naravno, da kada se vozite u vagonu vlaka, stalno osjećate ritmičan trzaj; nikakve opruge ga ne mogu učiniti neprimjetnim.

Ti se trzaji javljaju jer se kotači lagano tresu na spoju dviju tračnica, a taj se trzaj prenosi na cijeli vagon.

Stoga samo trebate izbrojati koliko trzaja vagon doživi u minuti kako biste saznali koliko je tračnica vlak prošao. Sada preostaje samo pomnožiti taj broj s duljinom tračnice i

dobit ćete udaljenost koju je vlak prešao u jednoj minuti.



Kada željeznički kotač prođe spoj tračnica, kraj A se savija prema dolje, dok kraj B ostaje ravan. To je izvor trzaja koji osjećaju oni koji se voze u vagonu.

Tipična duljina tračnice je oko $8\frac{1}{2}$ metara². Pomoću sata izbrojite broj udaraca u minuti, pomnožite taj broj s $8\frac{1}{2}$, zatim sa 60 i podijelite s 1000 - to će vam dati broj kilometara koje vlak prijeđe na sat.

Budući da je to otprilike polovica, dovoljno je jednostavno podijeliti broj udaraca u minuti s 2 kako biste otprilike odredili koliko kilometara vlak prijeđe na sat.

²Na nekim željeznicama tračnice su dugačke 6 metara. Nakon izlaska iz vlaka na stanici, duljinu tračnica možete mjeriti u koracima; svakih 8 koraka može se uzeti kao 5 metara.

4. Optičke iluzije

4.1. Tajanstveni crtež



Pogledajte ova dva lica.

Počnite pomicati knjigu lijevo i desno, promatrajući crtež bez prestanka. Dogodit će se nešto neobično: lica kao da oživljavaju - počet će pomicati zjenice lijevo i desno, a istovremeno će okretati usta i nos.

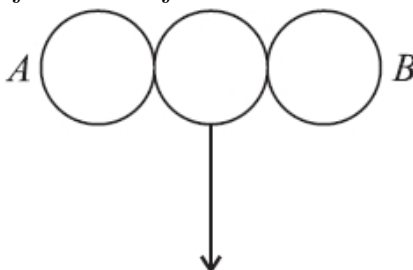
Zašto se to događa?

4.2. Tri novčića

Posložite tri novčića (identična ili različita) jedan do drugoga kao na slici. Ono što ću vas zamoliti da s njima učinite na prvi pogled čini se vrlo jednostavnim. Ono što ćete sljedeće naučiti bit će još iznenađujuće.



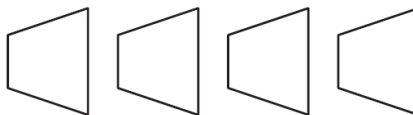
Evo problema: pomaknite srednji novčić prema dolje tako da između njega i svakog od preostala dva bude razmak jednak udaljenosti između A i B (v. sl.).



Pri rješavanju problema trebali bi se osloniti samo na procjenu okom, odnosno ne smijete koristiti neko pomagalo (šestar, metar, papir, ...). Nije potrebna velika preciznost: ako pogriješite za samo 1 centimetar, problem će se smatrati ispravno riješenim.

4.3. Četiri oblika

Koji je od četiri oblika najveći, a koji najmanji?



Odgovorite koristeći samo procjenu okom.

4.4. Koji je dulji?

Na slici su uz vlak nacrtane tri figure. Odgovorite na ovo pitanje: ako ih izmjerite pomoću komada papira ili šestara koja će figura biti dulja?

Naravno, problem je vrlo jednostavan kada ga stvarno riješite. Ali pokušajte unaprijed predvidjeti koja je figura dulja, bez mjerenja, a zatim se testirajte.

Odgovor će biti ugodno iznenađenje.



4.5. Opseg prsta

Koliko je puta opseg vašeg prsta - primjerice, srednjeg prsta - manji od opsega vašeg zapešća?

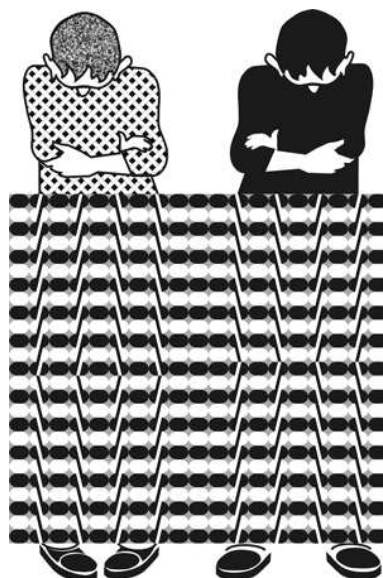
Pokušajte odgovoriti na ovo pitanje, a zatim provjerite svoj odgovor komadićem konca ili trakom papira.

Mogu vam unaprijed reći da ćete biti prilično zbunjeni rezultatima.

Zašto?

4.6. Krive noge

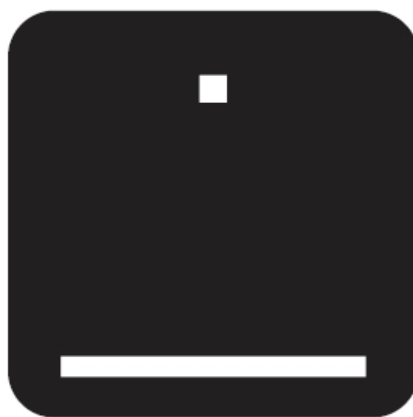
Zašto ove dvije osobe imaju tako krive noge?



4.7. Iznenadenje

Zatvorite jedno oko, a drugim gledajte bijeli kvadrat na vrhu priloženog crteža. Nakon deset ili petnaest sekundi primijetit ćete nešto potpuno neočekivano.

Što točno?



4.8. Balon na vrući zrak

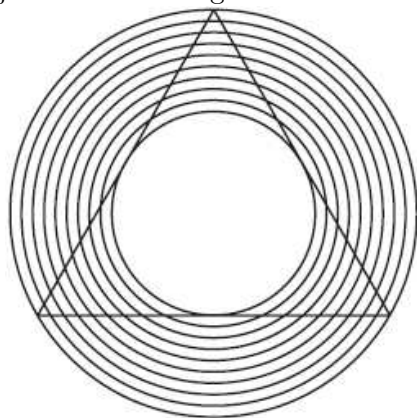
Tvornički dimnjak na slici zaklanja dio užeta za koje je vezan balon.

Ali čini se da je umjetnik pogriješio - je li užo desno od dimnjaka produžetak lijevog dijela užeta? Ispravi crtež.



4.9. Koji pravci?

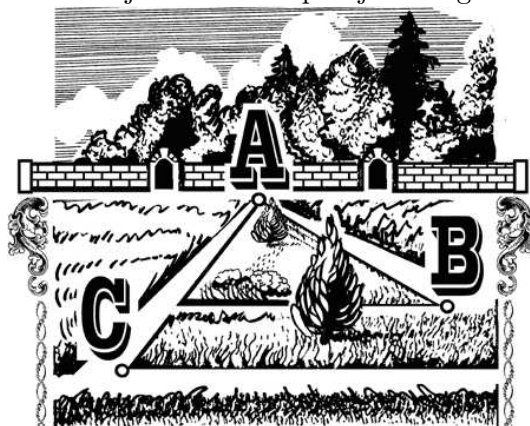
U kojem su smjeru zakrivljene stranice ovog trokuta?



4.10. Vrtne staze

Što je dulje: udaljenost između točaka A i C ili između A i B ?

Prvo dogovorite, pa tek onda mjerite kako bi provjerili odgovor. Jeste li bili u pravu?

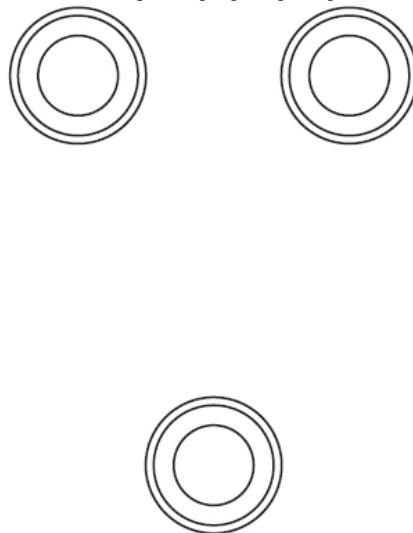


4.11. Rješenje zadataka od 4.1.-4.10.:

Rješenje problema br. 4.1: Zjenice na ovim crtežima kao da se pomiču iz istog razloga iz kojeg se filmske scene oživljavaju.

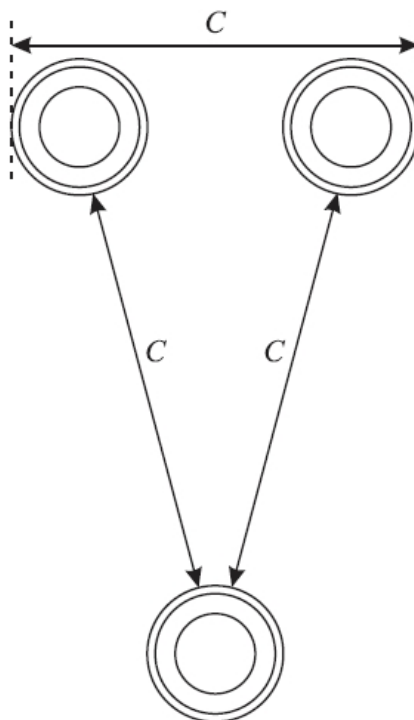
Kada pogledamo crtež s desne strane, a zatim brzo pomaknemo pogled ulijevo, početni vizualni dojam ne nestaje odmah, već se zadržava na trenutak. Kada izbljedi i zamijeni ga novi, prirodno bi se trebalo činiti kao da su se zjenice na crtežu pomaknule iz jednog kuta oka u drugi.

Rješenje problema br. 4.2: Vaše rješenje je vjerojatno bilo nešto poput ovoga:



Čini se da u potpunosti zadovoljava problem, zar ne?

Ali pokušajte izmjeriti udaljenosti šestarom - vidjet ćete da ste promašili za gotovo pola! A evo i ispravnog rasporeda novčića - iako se našem oku čini potpuno pogrješnim (v.sl.).



Što su krugovi većeg ili duljeg polumjera, to je optička iluzija stvarnija. Eksperiment

također dobro funkcionira ako koristite krugove različitih polumjera.

Rješenje problema br. 4.3: Sve četiri figure su iste veličine, iako se čini da se smanjuju s lijeva na desno.

U svakom paru, figura s desne strane izgleda manja od lijeve jer se lijeva figura širi prema desno.

Rješenje problema br. 4.4: Ovo je zanimljiva optička iluzija: lik čovjeka koji hoda ispred je točno iste duljine kao i lik čovjeka u cilindru.

Čovjek ispred izgleda daleko veći u usporedbi s čovjekom u cilindru samo zato što je čovjek ispred prikazan kako hoda u daljini.

Navikli smo da predmeti postaju manji kako se udaljavaju; stoga, kada u daljini vidimo ljudsku figuru u prirodnoj veličini, nehotice zaključujemo da je to čovjek velikih ili povelikih proporcija, budući da se čini velikim čak i iz velike udaljenosti.

Rješenje problema 4.5: Rezultat mjerenja zbunit će vas jer će otkriti veliku pogrešku u vašoj procjeni.

Vjerojatno ste mislili da je opseg prsta 5-6 puta manji od opsega zapešća. Međutim, lako je izravno provjeriti da je opseg zapešća samo oko tri puta veći od opsega prsta.

Teško je objasniti zašto nastaje ova optička iluzija.

Rješenje problema br. 4.6: Noge ovih ljudi uopće nisu krive!

Možete provjeriti jesu li ravne pomoću ravnala - svih osam linija savršeno su ravne i međusobno paralelne.

Možete provjeriti i bez ravnala: držite knjigu u razini očiju i pogledajte duž linija nogu - jasno ćete vidjeti da su noge ravne.

Prividna zakrivljenost neobična je optička iluzija koja je posebno izražena kada se crtež gleda sa strane.

Rješenje problema br. 4.7: Neočekivani fenomen je da će nakon 10 - 15 sekundi gledanja donja bijela pruga nestati i na njenom mjestu će se pojaviti crna pozadina!

Nakon 1-2 sekunde, pruga će se ponovno pojaviti, zatim ponovno nestati, samo da bi se ponovno pojavila i tako dalje.

Ovaj tajanstveni fenomen objašnjava se umorom očiju.

Rješenje problema br. 4.8: Crtež je apsolutno točan. Postavite ravnalo na užu i vidjet ćete da su, suprotno očitom, oba dijela užeta se nastavljaju jedan na drugi.

Rješenje problema br. 4.9: Linije uopće nisu zakrivljene prema unutra ni prema van, nego izgledaju konkavno jer ih pod kutom presjeca niz lukova.

Rješenje problema br. 4.10: Suprotno očitom, $AC = AB$.

5. Deset neugodnih situacija

5.1. Okrutni zakon

Nekada davno živio je zao vladar koji je odbijao pustiti ikoga u svoj dvor.

Stražar, naoružan od glave do pete, bio je postavljen na mostu preko granične rijeke i bilo mu je naređeno da ispituje svakog putnika: "Zašto dolaziš?"

Ako bi putnik lagao, stražar ga je bio dužan uhvatiti i objesiti na mjestu.

Ako bi putnik odgovorio istinu, nije bilo bijega: stražar ga je bio dužan odmah utopiti u rijeci.



Takav je bio surovi zakon okrutnog vladara i ne čudi što se nitko nije usudio približiti njegovom dvoru.

Ali unatoč tome, seljak se mirno približio čuванom mostu na zabranjenoj granici.

"Zašto dolaziš?"

Stražar ga je strogo zaustavio, spremajući se pogubiti drznika koji je bezobzirno išao u sigurnu smrt.

Ali odgovor je bio takav da zbunjeni stražar, strogo provodeći okrutni zakon, nije mogao ništa učiniti protiv pametnog seljaka.

Koji je bio odgovor?

5.2. Milosrdni zakon

U jednoj zemlji postojao je običaj.

Prije pogubljenja, svaki je na smrt osuđeni zločinac izvlačio ždrijeb kako bi se mogao možda spasiti od smrti. Dva papirića ubacila su se u kutiju: jedan s oznakom "Život", drugi "Smrt". Ako bi osuđenik izvukao prvi papirić, dobio bi pomilovanje; ako bi imao nesreću izvući papirić s oznakom "Smrt", kazna bi se izvršavala.

Izvjesci čovjek koji je živio u toj zemlji imao je neprijatelje. Oni su ga nevinog optužili za zločin i uspjeli da ga sud osudi na smrt.

Štoviše, ti neprijatelji nisu htjeli ostaviti nevinom čovjeku ni najmanju šansu za spasenje. Noć prije pogubljenja izvadili su papirić s oznakom "Život" iz ladice i zamijenili ga papirićem s oznakom "Smrt".

To je značilo da bez obzira koji papirić osuđenik izvuče, ne može izbjeći smrt.

Tako su mislili njegovi neprijatelji.

Ali imao je prijatelje koji su saznali za plan njegovih neprijatelja.

Uspjeli su upozoriti osuđenika da su oba ždrijeba u ladici označena sa "Smrt". Prijatelji su ga nagovarali da sudcima otkrije prijevaru svojih neprijatelja i inzistira na pregledu ladice.

Ali, na njegovo zaprepaštenje, osuđenik je zamolio prijatelje da zavjeru njegovih neprijatelja drže u strogoj tajnosti, uvjeravajući ih da će, ako to učini, sigurno biti spašen. Prijatelji su ga smatrali luđakom . . .

Sljedećeg jutra, osuđenik je, ne rekavši sudcima o zavjeri svojih neprijatelja, izvukao ždrijeb i bio pušten na slobodu!

Kako je uspio tako sretno izaći iz svoje naizgled beznadne situacije?

5.3. Učitelj i učenik

Ono što je opisano u nastavku navodno se dogodilo u staroj Grčkoj.

Učitelj mudrosti, sofist Protagora, obvezao se podučiti Quantla svim trikovima pravnog umijeća. Između učitelja i učenika postignut je dogovor prema kojem je učenik bio dužan platiti svom učitelju naknadu odmah nakon prvog uspjeha, tj. nakon prvog uspješno riješenog slučaja.

Quantl je već završio cijeli tečaj nastave. Protagora je očekivao isplatu, ali učenik se nije žurio prihvatiti svoj prvi slučaj.

Što je trebalo učiniti?

Učitelj se konačno dosjetio ideje da naplati dug od učenika putem suda.

Protagora je tužio učenika. Zaključio je da ako dobije slučaj, novac treba naplatiti na temelju sudske presude; ako izgubi slučaj i, posljedično, njegov učenik pobijedi, tada bez riječi novac mora ponovno platiti Quantlu, kako je dogovoreno - da se isplati nakon prvog uspješnog slučaja u kojem se učenik pojavi.

Međutim, učenik je, naprotiv, smatrao Protagorin slučaj potpuno beznadnim. Očito je doista nešto usvojio od svog učitelja i ovako je zaključio: ako bude osuđen na plaćanje, ne bi bio obavezan platiti prema sporazumu - uostalom, izgubio je prvi slučaj; ako bi, međutim, slučaj bio odlučan u njegovu korist, onda opet ne bi bio obavezan platiti - na temelju sudske presude.

Došao je dan suđenja. Sudac je bio u velikim poteškoćama. Međutim, nakon dugog vijećanja, sudac je konačno pronašao rješenje: presudu koja bi, iako ni na koji način ne krši uvjete sporazuma između učitelja i učenika, istovremeno bi učitelju omogućila da primi dogovorenu naknadu.

Kakva je bila sudska presuda?

5.4. U močvari

Odred francuskih vojnika, tijekom kampanje u Alžiru, našao se u području bez vegetacije. Tlo je toliko bilo močvarno da, iako su mogli hodati po njemu, nisu mogli nigdje

sjediti. Umorni odred krenuo je naprijed u potrazi za prikladnim mjestom za odmor, ali desetcima kilometara protezalo se isto močvarno tlo.

Kako bi se mogli odmoriti, ako nije bilo ni jednog suhog mjesta u blizini, ničega na što bi mogli staviti nogu, ili išta na što bi mogli sjesti?

Ipak, jedan je vojnik uspio smisliti sretnu ideju koja je spasila cijeli odred iz njihove nevolje. Vojnici su se udobno smjestili i odmorili.

Kako? Pogodite!

5.5. Trojica izviđača

Trojica pješaka izviđača jednom su se našla u jednako teškoj situaciji. Trebali su prijeći na suprotnu obalu rijeke ali nije bilo mosta.

Istina, dva dječaka vozila su se u kanuu po rijeci, spremna pomoći vojnicima. Ali kanu je bio toliko malen da je mogao podnijeti težinu samo jednog vojnika: čak ni vojnik i jedan dječak nisu mogli istovremeno ući u čamac bez rizika da ga potope. Vojnici uopće nisu znali plivati. činilo bi se da je u takvim uvjetima samo jedan vojnik mogao prijeći rijeku. U međuvremenu, sva tri izviđača ubrzo su se sigurno našla na suprotnoj obali i vratila kanu dječacima.

Kako su to učinili?

5.6. Previše predaka

Imam oca i majku. Moj otac i moja majka, naravno, također su imali oca i majku.

Dakle, vraćajući se tri generacije unatrag, nalazim četiri pretka.

Svaki od moja dva djeda i svaka od moje dvije bake također su imali oca i majku.

Stoga, u četvrtoj generaciji imam osam izravnih predaka. Vraćajući se pet, šest, sedam i tako dalje, nalazim da broj mojih predaka stalno raste i izuzetno je brojan.

Konkretno:

u 2. pokoljenju 2 pretka			
3	»	4	»
4	»	8	»
5	»	16	»

u 6. pokoljenju 32 pretka

7	»	64	»
8	»	128	»
9	»	256	»
10	»	512	»
11	»	1024	»
12	»	2048	»
13	»	4096	»
14	»	8192	»
15	»	16384	»
16	»	32768	»
17	»	65536	»
18	»	131072	»
19	»	262144	»
20	»	524288	»

Vidite da sam prije dvadeset generacija već imao cijelu vojsku izravnih predaka, više od pola milijuna. I sa svakom sljedećom generacijom taj se broj udvostručuje.

Ako brojimo, kako je općeprihvaćeno, tri generacije po stoljeću, onda je na početku naše ere, prije 19 stoljeća, na Zemlji morao živjeti bezbroj mojih predaka: može se izračunati da je njihov broj morao dosegnuti 18 znamenki!

Što dalje gledamo u prošlost, broj je mojih predaka trebao biti veći.

Tijekom ere prvih faraona, njihov broj morao je dosegnuti nevjerojatne razmjere.

U kamenom dobu, koje je prethodilo egipatskoj povijesti, moji su pretci vjerojatno već bili skućeni na globusu.

Ali vi, čitatelji, imali ste jednako toliko izravnih predaka. Dodajte ih mojim i dodajte pretke svih svojih poznanika i dodajte pretke svih ljudi koji danas žive na Zemlji i lako možete zamisliti strašne skućene uvjete u kojima su živjeli naši pretci: doslovno nije bilo dovoljno mjesta za njih na globusu!

Možete li im pokazati izlaz iz ove neugodne situacije?

5.7. Čekanje tramvaja

Tri brata, vraćajući se kući iz kazališta, približila su se tramvajskim tračnicama kako bi se ukrkali u prvi tramvaj koji naiđe.

Tramvaj se nije pojavio, pa je najstariji brat predložio da pričekaju.

”Umjesto da stojimo ovdje i čekamo”, odgovorio je srednji brat, ”idemo naprijed. Kad nas tramvaj sustigne, onda ćemo uskočiti; a u međuvremenu će dio putovanja već biti iza nas - brže ćemo stići kući.”

”Ako ćemo već ići”, prigovorio je najmlađi brat, ”nemojmo ići naprijed, nego u suprotnom smjeru: tada ćemo, naravno, prije sresti tramvaj koji dolazi; brže ćemo stići kući.”

Budući da se braća nisu mogla međusobno uvjeriti, svaki je učinio svoje: najstariji je ostao čekati, srednji brat je išao naprijed, a najmlađi se vratio.

Koji je od trojice braće prvi stigao kući? Koji je od njih postupio mudrije?

5.8. Gdje je gost?

Je li moguće smjestiti 11 gostiju na 10 stolica tako da na svakoj stolici sjedi jedna osoba?

Mislite da je to nemoguće? Ne, moguće je: samo se morate usredotočiti na to.

Učinite ovo. Postavite prvog gosta na prvu stolicu. Zatim zamolite jedanaestog gosta da privremeno sjedne na istu prvu stolicu.

Nakon što smjestite ova dva gosta na prvu stolicu, vi smjestite:

3. gost			na 2. stolicu		
4.	»	»	3.	»	
5.	»	»	4.	»	
6.	»	»	5.	»	
7.	»	»	6.	»	
8.	»	»	7.	»	
9.	»	»	8.	»	
10.	»	»	9.	»	

Kao što vidite, deseta stolica ostaje prazna. Na nju smjestite jedanaestog gosta, koji je privremeno sjedio na prvoj stolici.

Sada ste sretno izbjegli neugodnu situaciju: smjestili ste svih 11 gostiju na 10 stolica.

Ipak: gdje je otišao taj jedan gost?

5.9. Bez utega

Deset kilograma maslaca dostavljeno vam je kući. Želite kupiti samo pet kilograma. Jedan od vaših susjeda ima vagu, ali ni vi, ni dostavljač, ni itko od vaših susjeda nema utega.

Možete li bez ikakvih utega izvagati pet kilograma od ukupno deset kilograma maslaca?

5.10. Netočna vaga

Zamislite da kada konačno shvatite kako vagati maslac bez utega, vaš susjed, koji vam je posudio vagu, dođe i kaže da su njegove vage vrlo nepouzidane: ne možete se osloniti na njihovu točnost.

Možete li, čak i na netočnoj vagi i bez utega, ispravno izvagati 5 kilograma od ukupno 10 kilograma?

5.11. Rješenja zadataka od 5.1. - 5.10.

Rješenje problema br. 5.1. Na stražarovo pitanje: "Zašto dolaziš?", seljak je odgovorio: "Bit ću obješen na ovim vješalima."

Ovaj je odgovor zbunio stražara. Što bi trebao učiniti sa seljakom?

Objesiti ga? Ali seljak je rekao istinu, a za istinit odgovor naredba nije bila da ga se objesi, već da ga se utopi. Ali utopiti ga je također bilo nemoguće: u tom slučaju, seljak je lagao, a za lažno svjedočenje naredba je bila da ga se objesi.

Dakle, stražar nije mogao ništa učiniti snalažljivom seljaku.

Rješenje problema br. 5.2. Prilikom izvlačenja ždrijeba, osuđenik je učinio sljedeće: uzeo je papirić iz ladice i, ne pokazujući ga nikome, poderao ga.

Sudci, želeći utvrditi što je napisano na uništenom komadu papira, morali su iz ladice izvaditi preostali komad papira: pisalo je "Smrt". Stoga su sudci zaključili da na pode-ranom komadu papira mora pisati "Život" (uostalom, nisu znali ništa o zavjeri).

Dok su pripremali nevinog osuđenika za sigurnu smrt, njegovi su neprijatelji osigurali njegovo spasenje.

Rješenje problema br. 5.3. Presuda je bila sljedeća: učiteljev zahtjev je odbijen, ali mu je dano pravo da ponovno podnese tužbu na novoj osnovi - naime, zato što je učenik dobio svoj prvi slučaj.

Ovaj drugi slučaj mora se odlučno odlučiti u učiteljevu korist.

Rješenje problema br. 5.4. Vojnici su sjedili . . . jedan drugome na koljenu! Poredali su se u krug, a svaki je vojnik sjedio na koljenu svog susjeda.

Mislite li da je posljednji vojnik morao sjediti u močvari?

Nikako: u kružnoj formaciji uopće nema "zadnjeg" vojnika: svaki vojnik sjedi na koljenu svog susjeda, a krug sjedećih vojnika se zatvara.

Ako vam se ovo čini sumnjivim, pokušajte stvoriti takav krug s nekoliko desetaka pri-jatelja. Moći ćete se sami uvjeriti da je snalažljivi vojnik pronašao stvarno, a ne prividno rješenje problema.

Rješenje problema br. 5.5. Potrebno je bilo sljedećih šest putovanja:

1. putovanje. Oba dječaka stižu na suprotnu obalu i jedan od njih donosi kanu izviđačima (drugi ostaje na drugoj obali).
2. putovanje. Dječak koji je donio kanu ostaje na ovoj obali, a prvi vojnik ulazi u kanu i prelazi na suprotnu obalu. Kanu se vraća s drugim dječakom.
3. putovanje. Oba dječaka prelaze rijeku i jedan od njih se vraća kanuom.
4. putovanje. Drugi vojnik prelazi na suprotnu obalu. Kanu se vraća s dječakom.
5. putovanje - ponavljanje 3.
6. putovanje. Treći vojnik prelazi na suprotnu obalu. Kanu se vraća s dječakom, a dječaci nastavljaju prekinutu vožnju kanuom niz rijeku.

Sada su sva tri vojnika na drugoj obali.

Rješenje problema br. 5.6. Apsurdan rezultat koji smo dobili pri brojanju naših predaka objašnjava se činjenicom da smo previdjeli jednu vrlo jednostavnu činjenicu. Nismo uzeli u obzir da naši daleki preci mogu biti u krvnom srodstvu i stoga imati zajedničke pretke.

Moj otac i moja majka, možda čak u petom ili šestom koljenu, imali su zajedničkog djeda, koji je možda bio i vaš predak, dragi čitatelju.

Ovo razmatranje poništava sve naše izračune i svodi bezbrojne horde naših dalekih predaka na vrlo skroman broj, koji ne bi predstavljao prijetnju obitelji.

Rješenje problema br. 5.7. Mlađi brat, vraćajući se uz prugu, ugledao je tramvaj kako mu dolazi u susret i uskočio u njega. Kad je ovaj tramvaj stigao do mjesta gdje je čekao stariji brat, ovaj je uskočio.

Malo kasnije, isti tramvaj sustigao je srednjeg brata ispred sebe i smjestio ga. Sva tri brata našla su se u istom tramvaju - i, naravno, stigla su kući u isto vrijeme.

Medutim, najstariji brat postupio je najmudrije: mirno čekajući na jednom mjestu, manje se umarao od ostalih.

Rješenje problema br. 5.8. Nedostajući gost je drugi gost, koji je bio nezapažen prilikom dodjeljivanja stolica: nakon 1. i 11. gosta, odmah smo prešli na 3. i sljedećeg, preskačući 2. Tako smo uspjeli smjestiti 11 gostiju na 10 stolica, jednu osobu po stolici.

Rješenje problema br. 5.9. Problem se u biti svodi na dijeljenje 10 kilograma maslaca na dva jednaka dijela. Stavite list papira na svaku tavu i dodajte im još maslaca dok se vaga ne uravnoteži.

Jasno je da svaka tava sada sadrži točno 5 kilograma - pod pretpostavkom da je vaga točna.

Rješenje problema br. 5.10. Čak i s netočnom vagom, isto se može postići, ali na složeniji način.

Prvo, podijelite deset kilograma maslaca na dva dijela/paketa tako da budu približno (na oko) jednaki. Zatim uzmite jedan od tih dijelova i stavite ga na tavu vage, a u drugu tavu dodajte kamenčiće ili što god želite, dok se tave ne uravnoteže.

Zatim izvadite prvi dio maslaca iz tave i zamijenite drugim dijelom. Ako tave vage ostanu u istom položaju, tada su oba dijela maslaca jednaka, budući da se međusobno zamjenjuju po masi. U ovom slučaju, naravno, svaki od njih teži točno 5 kilograma.

Ako tave nisu u ravnini, prebacite malo maslaca s jedne na drugu i ponavljajte to dok obje tave ne budu savršeno jednake na vagi.

Sličan pristup može se koristiti s netočnom vagom: prebacite maslac iz jednog paketa u drugi dok oba paketa ne povuku kazaljku vage na istu liniju.

6. Vješto rezanje i šivanje. Dvaput mjeri, jednom reži

6.1. Piratska zastava

Na slici je piratska zastava. Dvanaest uzdužnih pruga na njoj označavaju koliko pirati imaju zarobljenika, tj. pirati imaju 12 zarobljenika. Kada zarobe nove zarobljenike, pirati dodaju na zastavu odgovarajući broj novih pruga. Obrnuto, za svakog zarobljenika kojeg izgube, oduzimaju jednu prugu.



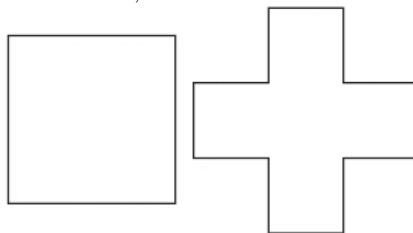
Ovaj put, pirati su izgubili dva zarobljenika i stoga moraju ponovno sašiti zastavu tako da bude 10 pruga umjesto 12.

Možete li predložiti jednostavan način rezanja zastave na dva dijela tako da, nakon šivanja, rezultat bude zastava s 10 pruga?

Na taj način, nijedan komadić materijala ne bi se trebao izgubiti, a zastava bi trebala zadržati svoj pravokutni oblik.

6.2. Crveni križ

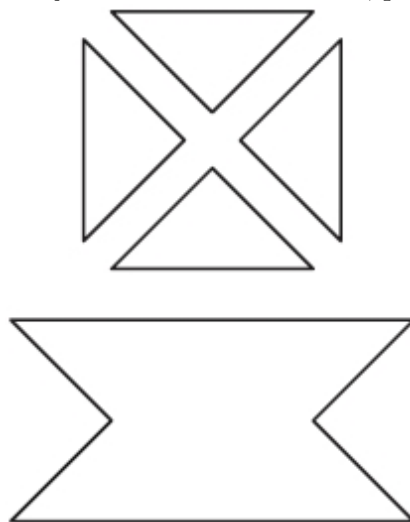
Medicinska sestra imala je kvadratni komad crvene tkanine od kojeg je trebala sašiti križ. Željela je ponovno sastaviti kvadrat kako se nijedan komad crvene tkanine ne bi bacio. Nakon duge potrage uspjela je izrezati kvadrat na samo četiri dijela, od kojih je sastavila križ. Imao je samo dva šava, svaki u obliku ravne linije.



Pokušajte učiniti isto s kvadratnim komadom papira.

6.3. Ostatci

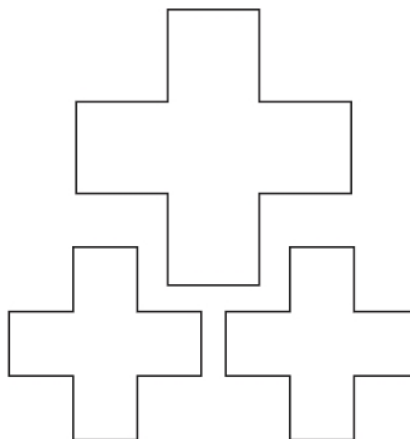
Druga medicinska sestra imala je ostatke crvene tkanine, poput onih prikazanih na slici.



Sestra je uspjela sašiti križ od tih ostataka bez rezanja. Kako?

6.4. Dva križa od jednog

Treća medicinska sestra imala je gotov crveni križ od tkanine; ali bio je prevelik, pa je iz njega izrezala drugi, manji, tako da je novi križ bio u cijelosti izrađen od jednog komada tkanine.



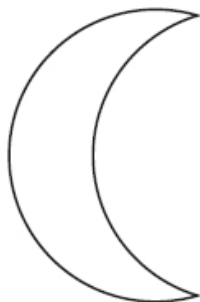
Kad je križ izrezan, medicinska sestra, skupljajući ostatke - bilo ih je samo četiri - primijetila je da od njih može sastaviti još jedan križ, bez rezanja ijednog komada, i to potpuno iste veličine.

Tako je umjesto jednog križa imala dva manja iste veličine: jedan čvrsti, drugi složeni. Možete li mi reći kako je medicinska sestra to učinila?

6.5. Mjesečev polumjesec

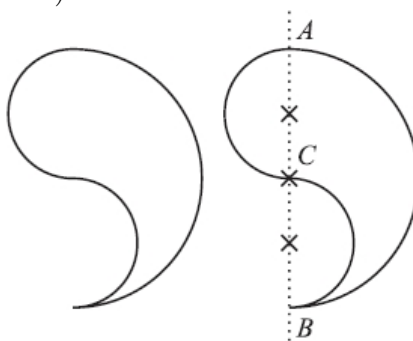
Polumjesec na slici treba podijeliti na 6 dijelova crtanjem samo 2 ravne linije.

Kako to učiniti?



6.6. Dijeljenje zarezom

Ovdje vidite široki zarez (v. sl.).



Nacrtana je dužina AB . Dužina je podijeljena na 4 dijela. Nacrtane su:

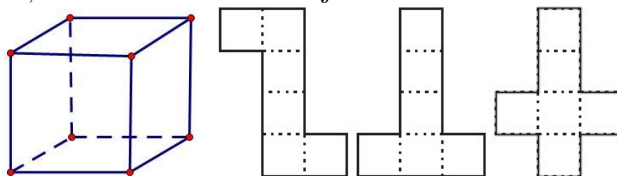
- polukružnica promjera AC (lijevo od dužine AB)
- polukružnice promjera AB i CB (desno od dužine AB) kao na slici.

Zadatak je presjeći ovaj lik jednim lukom na dva identična dijela.

Ovaj lik je također zanimljiv jer se od dva takva lika može složiti krug. Kako?

6.7. Rasklapanje kocke

Ako kartonsku kocku prerežete po rubovima tako da se može rasklopiti i stavite na stol sa svih šest kvadrata, dobit ćete lik sličan sljedećim trima:



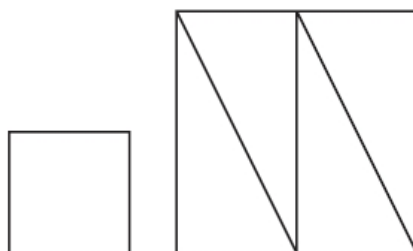
Zanimljivo je brojati: koliko se različitih likova može složiti na ovaj način?

Drugim riječima: na koliko se načina kocka može rasklopiti na ravnini?

Upozoravam nestrpljivog čitatelja da postoji barem deset različitih likova.

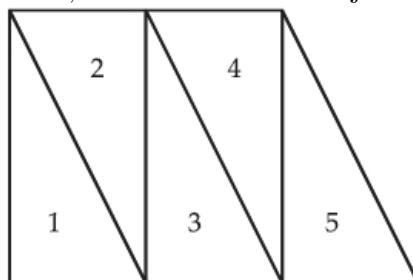
6.8. Izrada kvadrata

Možete li složiti kvadrat od pet komada papira ovog oblika (v. sl.)?



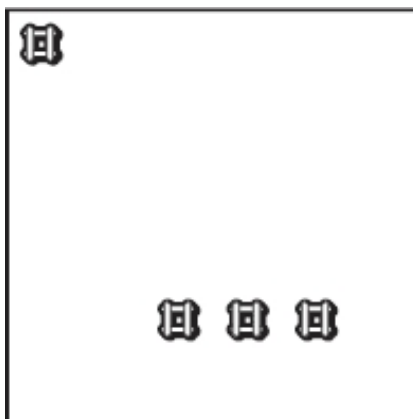
Ako ste shvatili kako riješiti ovaj problem, pokušajte složiti kvadrat od pet identičnih trokuta istog oblika kao oni s kojima smo upravo radili (jedna kateta je dvostruko dulja od druge).

Možete prepoloviti jedan trokut, ali ostala četiri moraju se koristiti neizrezana.



6.9. Četiri bunara

Na parceli oblika kvadrata nalaze se četiri bunara, kao na slici: tri blizu jedan drugome blizu ruba parcele i jedan u kutu.



Parcelu su zakupla četiri zakupca, koji su odlučili podijeliti je među sobom, ali na način da svi imaju parcele potpuno istog oblika i da svaki ima bunar.

Je li to moguće?

6.10. Kamo je nestao mali kvadrat?

Na kraju rješavanja problema o rezanju oblika, pokazat ću čitatelju zanimljiv primjer rezanja, gdje dio oblika nestaje tko zna kamo.

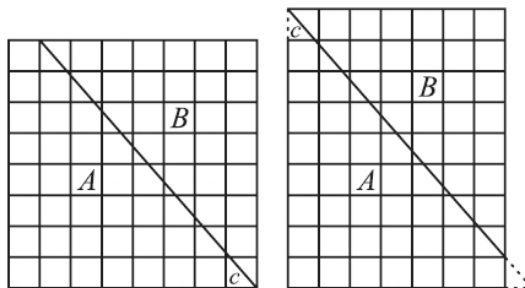
Na mrežastom papiru nacrtam kvadrat podijeljen na 64 mala kvadrata. Zatim nacrtam dijagonalu s lijeva na desno, počevši od točke gdje se prvi i drugi kvadrat susreću na vrhu i završavajući u donjem desnom kutu velikog kvadrata.

Suprotni kraj ove dijagonale podijeli će kvadrate na dva trokuta.

Donji trokut označit ćemo s C . Označit ćemo cijelu lijevu stranu crteža s A , a desnu stranu s B .

Sada režem crtež duž dijagonale i pomičem desnu stranu dijagonalno uz rez tako da se podigne za jedan red kvadrata. Na vrhu će biti mali prazan trokut, a na dnu, desno, stršit će trokut C .

Uzimam škare, odrežem stršeći mali trokut C i stavljam ga na vrh, gdje ostaje prazan trokut.



Savršeno se uklapa.

Sada imamo pravokutnik sa 9 kvadrata visine i 7 kvadrata širine.

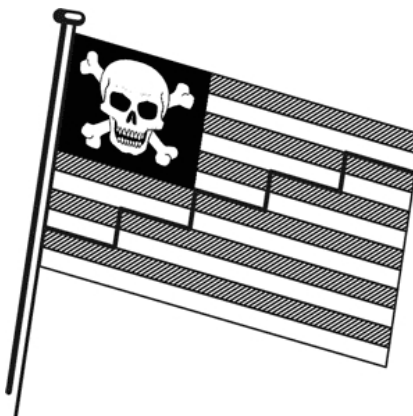
Ali $7 \cdot 9 = 63$.

To znači da naš pravokutnik sada sadrži samo 63 kvadrata, dok ih je prije bilo 64.

Gdje je nestao taj jedan kvadrat?

6.11. Rješenja zadataka od 6.1. - 6.10.

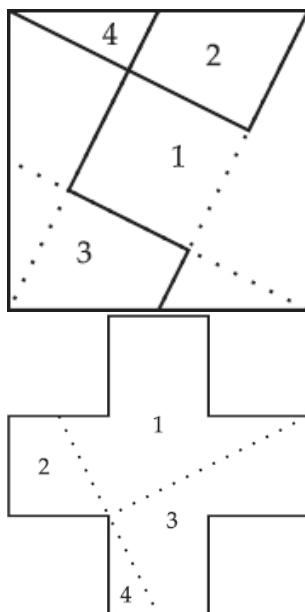
Rješenje problema br. 6.1. Izrežite zastavu duž stepenaste linije naznačene ovdje na slici.



Sada je sve što preostaje učiniti pomaknuti donji dio zastave prema gore za jedan korak i sašiti ga. Dobivena zastava više ne će imati 12 pruga, već 10. Postat će izduženija, ali ne će nedostajati niti jedan komad tkanine.

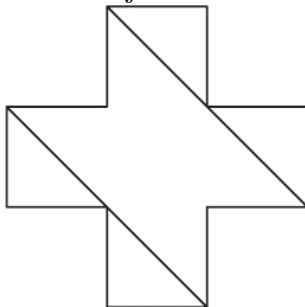
Rješenje problema br. 6.2. Sestra je izrezala kvadratni komad tkanine na četiri dijela na sljedeći način (isprekidana linija pokazuje kako je označila linije rezanja: od kutova kvadrata do središta stranica).

Od ova četiri dijela sestra je sašila križić (v. sl. donju).

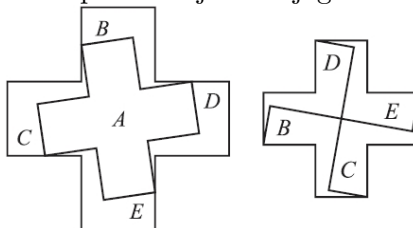


Kao što vidite, ima samo dva šava.

Rješenje problema br. 6.3. Evo kako je medicinska sestra sašila križ od ostataka:

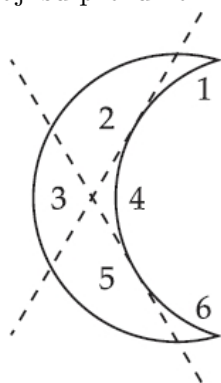


Rješenje problema br. 6.4. Način na koji je sestra izrezala mali križ od velikog i napravila drugi križ od ostataka prikazan je na dijagramima ovdje:

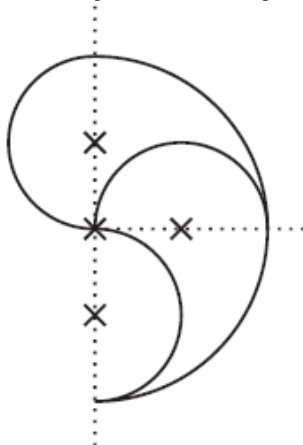


Rješenje problema br. 6.5. Izradite kao što je prikazano na priloženom crtežu.

To će rezultirati sa šest dijelova, koji su prenumerirani radi jasnoće.



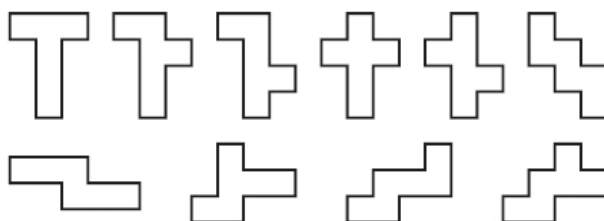
Rješenje problema br. 6.6. Rješenje je vidljivo iz priložene slike. Oba dijela odvojenog "zareza" su međusobno jednaka jer su sastavljeni od identičnih dijelova.



Sljedeća slika prikazuje kako formirati krug od dva "zareza" - jednog bijelog i jednog crnog.

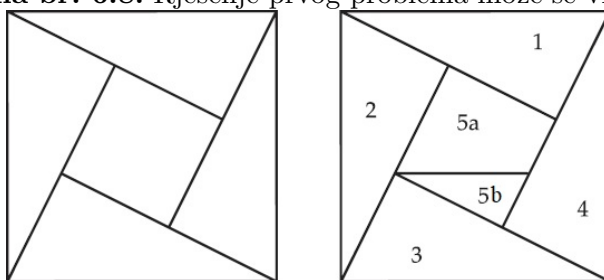


Rješenje problema br. 6.7. Ovdje su prikazane sve različite mreže kocke (v. sl.). Ima ih 10:

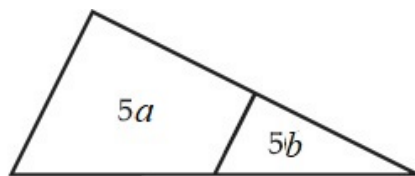


Slike 1 i 5 mogu se rotirati; time se dodaju još dvije mreže, a ukupan broj će biti 12 umjesto 10.

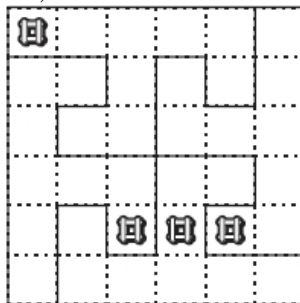
Rješenje problema br. 6.8. Rješenje prvog problema može se vidjeti na slici.



Evo kako konstruirati kvadrat od pet trokuta (v. sl.). Jedan trokut je prethodno izrezan, kao što je prikazano na slici ispod.

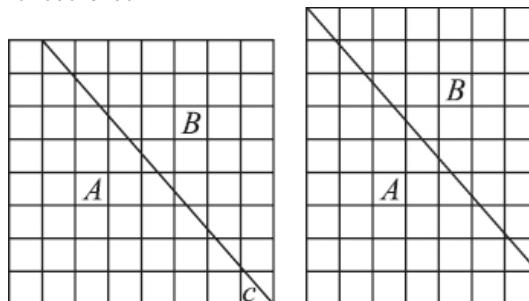


Rješenje problema br. 6.9. Način podjele zemljišta između četiri zakupca označen je punim linijama na crtežu (v. sl.).



Parcele su prilično neobičnog oblika, ali za sva četiri zakupca potpuno su identične i svaka ima bunar.

Rješenje problema br. 6.10. Tajna misterioznog nestanka 64. kvadrata odmah se otkriva ako pažljivo izrežete crtež.



Pažljivo pogledajte priloženi crtež: primijetit ćete da pravokutnik nije sastavljen od 64 kvadrata, kao što se čini iz loše izvedenog crteža.

”Kvadrati” smješteni duž reza uopće nisu kvadrati: svaki od ovih likova je nešto veći po površini od odgovarajućeg kvadrata, a zbroj ovih viškova predstavlja nedostajuću površinu navodno nedostajućeg kvadrata¹.

Prijevara će postati jasnija ako lik ne podijelite na 64 kvadrata, već na samo $4 \cdot 4 = 16$ kvadrata. Obrnuto, što je lik podijeljen na više dijelova, to je teže uočiti pogrešku.

¹Lažna dijagonala zapravo nije ravna linija, već uski paralelogram čija je površina točno jednaka 1 (odnosno površini jednog kvadratića).

7. Deset teških problema

7.1. Jeftin čuvar

Zakupnik velikog voćnjaka trebao je otići na cijeli dan, baš kad su jabuke bile zrele i najprimamljivije onima koji su voljeli jesti na tuđi račun.

Trebao je unajmiti čuvara za jedan dan. Škrti zakupnik dugo je tražio najjeftinijeg čuvara, dok nije pronašao onog koji uopće nije tražio novac, već se zadovoljio plaćanjem u jabukama. To je zadovoljilo zakupnika.

”Morat ćete čuvati cijeli dan, bez smjene ili pauze, bez odlaska ikamo. Imat ćete vremena za spavanje kasnije, kad ne budete na dužnosti.”

”U redu, bit ću na dužnosti bez smjene. Ali ne ćete morati platiti ravnomjerno: platit ćete za svaki sljedeći sat, dvostruko više od prethodnog.”

”To bi bilo moguće; ali koliko želite za prvi sat?”

”Ima li što manje? Samo mi dajte jednu jabuku za prvi sat, i to je dovoljno. Za drugi stavi dvije jabuke, i to je dovoljno. Za treći, četiri, i to je dovoljno. Za četvrti . . .”

”U redu”, zakupnik se brzo složio. ”Ako je ovaj čudak toliko pošten koliko je i nepromišljen, onda se čini da sam dobro obavio posao: za nekoliko desetaka jabuka, unajmio sam čuvara na cijeli dan”, pomislio je odlazeći.

Čuvar je ostao na poslu, a zakupnik je mirno otišao, sretan što na svijetu postoje ljudi koji ne znaju brojiti. Kad se dan kasnije zakupnik vratio u svoj voćnjak, ugledao je kola na vratima na koja je njegov čuvar utovarao vreću za vrećom jabuka.

”Što je ovo!” obrecnu se zakupnik.

”Unajmio sam te da čuvaš, a ne da pljačkaš. Gdje носиš moje jabuke?”

”Bile su tvoje, sada su moje”, mirno odgovori čuvar. ”Vjerojatno si zaboravio dogovor?”

”Dogovor? Ali prema našem dogovoru, trebao si dobiti cijelu hrpu jabuka u jednom danu?

Ne znaš brojiti . . .”

”I ne samo jedan utovar. Ne znaš brojiti.”

”Ne samo jedan utovar! Kakve gluposti! Jesu li to sve jabuke u mom voćnjaku?”

”Ne samo tvoje. Ne bi mogao kupiti dovoljno jabuka u cijelom gradu da me isplatiš. Trebalo bi barem tri tisuće utovara.”

”Tri tisuće utovara jabuka? U jednom danu? Ne razumijem . . .”

A ti, čitatelju, razumiješ li? Tko od njih nije znao brojiti: čuvar ili zakupnik? Ili možda nijedan?

7.2. Seljanka i lokomotiva

Željeznički strojovođa dugovao je seljanki mlijeko i izbjegavao je platiti dug.

Mljekarica je dugo čekala i konačno shvatila što učiniti.

Jednog dana, kada je para već bila priređena i vlak je trebao krenuti, stala je pokraj lokomotive i izjavila strojovođi:

”Plati dug odmah ili ne ću pustiti vlak!”

Strojovođa se, naravno, samo nasmijao na takvu prijetnju.

Ali žena je ozbiljno namjeravala zaustaviti vlak.

I što se dogodilo?

Strojovođa je pokušao pokrenuti vlak, ali lokomotiva se nije pomaknula. Motor je radio, ali vlak je stajao mirno, kao začaran.

”Daj mi novac i pustit ću vlak!” trijumfalno je izjavila seljanka.

Strojovođa je bio prisiljen platiti dug u cijelosti; tek tada se vlak pokrenuo.

Što je bilo ”čarobnjaštvo” mljekarice i kako je uspjela?

7.3. Bumbarovo putovanje

Bumbar kreće na dugo putovanje. Iz svog gnijezda leti ravno na jug, prelazi rijeku i konačno, nakon punog sata putovanja, slijeće na obronak prekriven mirisnom djetelinom.

Ovdje, leteći od cvijeta do cvijeta, bumbar ostaje pola sata.

Sada je vrijeme da posjeti vrt u kojem je bumbar jučer primijetio grmove ogrozda u cvatu.

Vrt leži zapadno od obronka, a bumbar žuri ravno tamo. Tri četvrt sata kasnije, već je bio u vrtu.

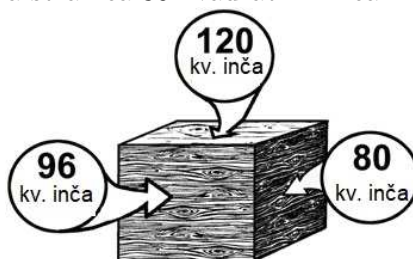
Ogrozd je bio u punom cvatu, a bumbaru je trebalo sat i pol da posjeti sve grmove.

A onda, bez daljnjeg odlaganja, bumbar je najkraćim putem odletio kući, u svoje rodno gnijezdo.

Koliko je dugo bumbar bio odsutan?

7.4. Kutija

Imam kutiju i mogu vam reći da joj je poklopac površine 120 kvadratnih inča, prednja strana 96 kvadratnih inča, a stranica 80 kvadratnih inča.



Možete li odrediti dimenzije moje kutije, tj. koliko je duga, široka i visoka?

7.5. Dva lanca

Pronađena su dva komada željeznog lanca, sastavljena od identičnih karika. Jedan komad, kada se rastegne, dug je 36 centimetara, a drugi 22 centimetra. Debljina karike je pola centimetra. Dugi lanac ima 6 karika više od kratkog. Koliko karika ima svaki lanac?

7.6. Vreće brašna

Mlinar je trebao izvagati pet vreća brašna.

Imao je vagu, ali nedostajali su neki utezi, što je onemogućavalo vaganje bilo čega manjeg od 100 kilograma. Vreće su težile oko 60 kilograma svaka.

Mlinar se nije dao obeshrabriti i počeo je vagati vreće dvije po dvije, u parovima. Pet vreća moglo se kombinirati u 10 različitih parova; stoga je bilo potrebno deset vaganja.

Dobiveni rezultati, poredani od najmanjeg prema najvećem, bili su:

110 kg, 112 kg, 113 kg, 114 kg, 115 kg, 116 kg, 117 kg, 118 kg, 120 kg i 121 kg.

Ali koliko teži svaka vreća pojedinačno? Kako to može saznati?

Mlinar je ovaj zadatak prilično brzo obavio. Vjerojatno možete pretpostaviti kako je riješen.

7.7. Tri kćeri i dva sina

Ujak je došao posjetiti svoja dva nećaka i tri nećakinje, koje dugo nije vidio.

Mali Volođa i njegova mlađa sestra Ženja prvi su izašli, a dječak je ponosno objavio ujaku da je dvostruko stariji od svoje sestre.

Zatim je istrčala Nadja, a njezin otac, koji je ušao s njom, rekao je gostu da su dvije kćeri zajedno dvostruko starije od sina.

Kad se Aljoša vratio iz škole, njegov otac je objavio da su dva sina zajedno dvostruko starija od dvije kćeri zajedno.

Lida je stigla posljednja i, vidjevši gosta, radosno je uzviknula: "Ujače, stigao si taman na vrijeme za moj rođendan! Danas sam napunila 21 godinu!"

"I znaš što još", dodao je otac, "upravo sam shvatio da su moje tri kćeri zajedno dvostruko starije od oba moja sina."

Koliko su godina imali svaki sin i kći?

7.8. Dvije svijeće

Odjednom su se u cijelom stanu ugasila električna svjetla - žice su otkazale. Kako ne bih prekidao posao, upalio sam dvije svijeće, koje sam za svaki slučaj držao na stolu, i radio uz njihovo svjetlo dok se ožičenje nije popravilo.

Dan kasnije, trebao sam znati točno koliko dugo su svjetla bila ugašena. Zaboravio sam na satu zabilježiti trenutak nestanka struje i trenutak njezina ponovnog uključivanja. Također se nisam mogao sjetiti duljine svijeća. Znao sam samo da je jedna svijeća bila

deblja od druge: ona bi potpuno izgorjela za pet sati, dok bi tanja izgorjela za četiri sata.

”Koliko su dugi bili?” upitao sam ih.

”Jedna je bila vrlo mala, a druga veća.”

”Koliko puta veća?”

”Dvostruko dulja? Zar se toga ne sjećate?” navaljivao sam.

”Točno četiri puta dulja”, dobio sam odgovor.

Dakle, sve što sam znao bilo je da je jedan ostatak svijeće bio četiri puta dulji od drugog.

Je li moguće na temelju toga utvrditi koliko dugo su svijeće gorjele?

7.9. Devetsto naklona

U jednoj školi bilo je dvostruko više djevojčica nego dječaka.

Ravnatelj je uveo običaj: svako jutro svaki bi se dječak naklonio ravnatelju, svakom od svojih kolega iz razreda i svakoj djevojčici; svaka se djevojčica također morala nakloniti ravnatelju, svakoj od svojih prijateljica i svakom dječaku.

Ovaj se ceremonijalni običaj strogo poštivao i stoga se svako jutro moglo izbrojati 900 naklona.

Koliko je dječaka i koliko djevojčica bilo u školi?

7.10. Radžino nasljedstvo

Neki radža¹, na smrti, ostavio je svoje dijamante sinovima.

Oporuka je sastavljena na sljedeći način:

najstariji sin dobiva jedan dijamant i sedmi dio preostalih; drugi sin dobiva dva dijamanta i sedmi dio preostalih; treći sin dobiva tri dijamanta i sedmi dio preostalih; četvrti sin dobiva četiri dijamanta i sedmi dio preostalih. I tako dalje.

Dakle, nasljedstvo je podijeljeno među sinovima bez ostatka.

Koliko je sinova radža imao i koliko je dijamanta ostavio?

7.11. Rješenja zadataka od 7.1. - 7.10.

Rješenje problema br. 7.1. Čuvar je izračunao potpuno točno: doista je imao pravo na više od tri tisuće utovara jabuka - koliko god to nevjerojatno zvučalo.

Doista. Pratimo kako se nagrada čuvara povećavala sa svakim satom.

Za prvi sat, čuvar je imao pravo na 1 jabuku, za drugi sat - 2 jabuke, za treći - 4 jabuke, za četvrti - 8, za peti - 16, za šesti - 32, za sedmi - 64, za osmi - 128, za deveti - 256, za deseti - 512.

¹Radža je povijesni vladarski i plemićki naziv koji u prijevodu s hindskog i sanskrtu znači ”kralj” ili ”vladar”.

Zasad se čini da nagrada ne prijete zakupniku propašću: za prvih 10 sati, čuvar je imao pravo na samo oko tisuću jabuka.

Ali nastavimo računati.

Do 11. sata, čuvar je imao 1024 jabuke, 2048 do 12., 4096 do 13., 8192 do 14., 16384 a do 15.

Broj jabuka impresivno raste, ali još uvijek daleko od tri tisuće kola.

Nastavite čitati.

Do 16. sata stiglo je 32768 jabuka.

Do 17. sata stiglo je 65536 jabuka.

Do 18. sata stiglo je 131072 jabuke.

Do 19. sata stiglo je 262144 jabuke.

Do 20. sata stiglo je 524288 jabuka.

Zakupnik već duguje čuvaru preko milijun jabuka. Ali dan još nije propušten - ostala su još četiri sata.

U 21. satu trebalo je platiti 1 048 576 jabuka.

U 22. satu trebalo je platiti 2 097 152 jabuke.

U 23. satu trebalo je platiti 4 194 304 jabuke.

U 24. satu trebalo je platiti 8 388 608 jabuka.

Sada je sve što preostaje zbrojiti sve te brojeve od 1 do 8 388 608. Ukupno je 16 777 215 jabuka.

Dakle, prema dogovoru, čuvaru se dugovalo gotovo 17 milijuna jabuka u jednom danu! Samo da bi se taj broj jabuka izbrojio brzinom od jedne u sekundi, trebalo bi šest mjeseci neprekidnog brojanja!

Pod pretpostavkom 10 jabuka po kilogramu, sve jabuke koje se duguju čuvaru težile bi 1 677 721 kilogram, odnosno 1 677 tona. To bi iznosilo oko 80 kola natovarenih jabukama ili - uz pretpostavku pola tone po kolima - preko 3000 kola.

Sigurno je mogao naći čuvara za manje novca?

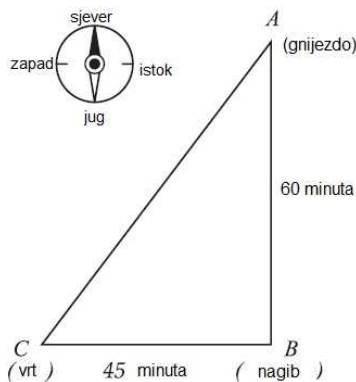
Rješenje problema br. 7.2. Seljanka je zaustavila vlak prolivenim uljem na tračnice ispred lokomotive. Kotači lokomotive ne mogu se kotrljati po skliskim tračnicama; okreću se na mjestu, ali se ne kotrljaju naprijed jer nema trenja, jer trenje između kotača i tračnica omogućuje pokretanje lokomotive.

Sjetite se koliko je teško hodati po glatkom ledu: stopala vam klize, ne nalazeći oslonac, i ne možete se pomaknuti. Iz istog razloga, lokomotiva se ne može kretati po skliskim tračnicama.

Kad je strojovođa platio dug, seljanka je "skinula čaroliju" posipajući pijesak po nauljenim tračnicama.

Ova se priča, naravno, mogla dogoditi samo u davna vremena; moderne lokomotive imaju posebne pješčanike, iz kojih strojovođa, koristeći poseban uređaj, sipa pijesak na tračnice kada postanu skliske, primjerice, od kiše.

Rješenje problema br. 7.3. Problem bi bilo vrlo lako riješiti kada bismo znali koliko je bumbaru trebalo da odleti iz vrta do svog gnijezda. To nije navedeno u problemu, ali geometrija će nam pomoći da to sami shvatimo.



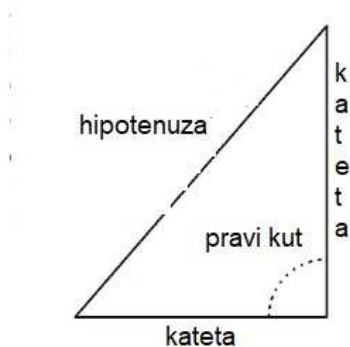
Nacrtajmo bumbarov put. Znamo da je bumbar u početku letio "ravno prema jugu" 60 minuta. Zatim je letio "prema zapadu" 45 minuta, tj. pod pravim kutom u odnosu na svoj prethodni put. Odatle se "najkraćim putem", tj. ravnom linijom, vraćao do gnijezda.

Imamo pravokutni trokut² ABC , u kojem su poznate obje "katete", AB i BC , i trebamo odrediti treću stranicu, "hipotenuzu", AC .

Prema Pitagorinu poučku, ako su katete u omjeru 3 : 4, hipotenuza je pet puta veća od iste osnovne jedinice.

Primjerice, ako su katete trokuta duge 3 i 4 metra, tada je hipotenuza 5 metara; ako su katete duge 9 i 12 kilometara, tada je treća stranica duga 15 kilometara i tako dalje. U našem slučaju, vrijeme leta duž jedne katete iznosi $3 \cdot 15$ minuta, a duž druge $4 \cdot 15$ minuta za put duž hipotenuze potrebno je $5 \cdot 15$ minuta.

Dakle, znamo da je bumbarov let od vrta do gnijezda trajao 75 minuta, odnosno $1 \frac{1}{4}$ sata.



Sada je lako izračunati koliko je bumbar bio odsutan. Vrijeme leta bilo je: $1 \text{ sat} + \frac{3}{4} \text{ sata} + 1 \frac{1}{4} \text{ sata} = 3 \text{ sata}$.

Zaustavljanja su mu trajala:

$$\frac{1}{2} \text{ sata} + 1 \frac{1}{2} \text{ sata} = 2 \text{ sata}.$$

$$\text{Ukupno: } 3 \text{ sata} + 2 \text{ sata} = 5 \text{ sati}.$$

Rješenje problema br. 7.4. Površina poklopca jednaka je umnošku duljine i širine kutije; površina bočne stijenke - visina $\cdot$ širina; površina prednje stijenke - visina $\cdot$ duljina.

Stoga znamo da je

²U pravokutnom trokutu stranica nasuprot pravog kuta naziva se *hipotenuza*, a ostale dvije *katete*.

$$\text{duljina} \cdot \text{širina} = 120$$

$$\text{visina} \cdot \text{širina} = 80$$

$$\text{visina} \cdot \text{duljina} = 96.$$

Pomnožimo prve dvije jednakosti. Dobivamo:

$$\text{duljina} \cdot \text{visina} \cdot \text{širina} \cdot \text{širina} = 120 \cdot 80.$$

Podijelimo ovu novu jednadžbu trećom:

$$\frac{\text{duljina} \cdot \text{visina} \cdot \text{širina} \cdot \text{širina}}{\text{duljina} \cdot \text{visina}} = \frac{120 \cdot 80}{96}$$

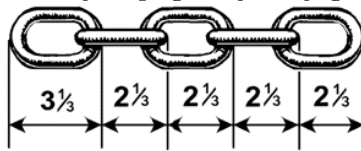
Skraćivanjem razlomka i izvođenjem operacija dobivamo:

$$\text{širina} \cdot \text{širina} = 100.$$

Slijedom toga, širina kutije = 10.

Znajući to, lako je odrediti da je visina kutije = $80/10 = 8$, a duljina = $96/8 = 12$.

Rješenje problema br. 7.5. Ne ćete riješiti ovaj jednostavan problem osim ako prvo shvatite što čini duljinu lanca. Pažljivo pogledajte dijagram:



Vidite da duljinu rastegnutog lanca čini puna širina prve karike, kojoj se sa svakom novom dodanom karikom ne dodaje puna širina karike, već širina umanjena za dvostruku debljinu karike.

Sada prijeđimo na naš problem.

Znamo da je jedan lanac 14 centimetara duži od drugog i ima 6 karika više od njega.

Dijeljenjem 14 sa 6 dobivamo $2 \frac{1}{3}$. To je širina jedne karike, minus dvostruka debljina.

Budući da je debljina karike poznata - pola centimetra - onda je, dakle, puna širina svake karike = $2 \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3 \frac{1}{3}$ centimetra.

Sada je lako odrediti od koliko se karika sastojao svaki lanac. Iz dijagrama možemo vidjeti da ako od lanca duljine 36 centimetara oduzmemo dvostruku debljinu prve karike, tj. 1 centimetar, i ostatak podijelimo s $2 \frac{1}{3}$, dobivamo broj karika u ovom lancu:

$$35 : 2 \frac{1}{3} = 15.$$

Slično tome, možemo pronaći broj karika u lancu duljine 22 centimetra:

$$21 : 2 \frac{1}{3} = 9.$$

Rješenje problema br. 7.6. Mlinar je započeo rješavanje zbrajanjem svih 10 brojeva.

Dobiveni zbroj, 1156 kilograma, nije ništa manje od četiri puta veća masa vreća: uostalom, uključuje težinu svake vreće četiri puta. Dijeljenjem s 4 dobivamo da svih pet vreća zajedno teži 289 kilograma.

Sada, radi praktičnosti, označimo vreće brojevima po redoslijedu njihove težine. Najlakša vreća je br. 1, druga je br. 2 i tako dalje. Najteža vreća je br. 5.

Lako je vidjeti da u nizu brojeva: 110 kg, 112 kg, 113 kg, 114 kg, 115 kg, 116 kg, 117 kg, 118 kg, 120 kg, 121 kg - prvi broj sastoji se od mase dviju najlakših vreća: br. 1 i br. 2;

Drugi broj je mase vreća br. 1 i br. 3. Posljednji broj je mase dviju najtežih vreća, 4 i 5, a pretposljednji broj je mase 3 i 5.

Dakle:

1 i 2 zajedno teže 110 kg

1 i 3 zajedno teže 112 kg

3 i 5 zajedno teže 120 kg

4 i 5 zajedno teže 121 kg

Lako je, dakle, pronaći zbroj masa 1, 2, 4 i 5: on iznosi $110 \text{ kg} + 121 \text{ kg} = 231 \text{ kg}$. Oduzimanjem ovog broja od ukupne mase svih vreća (289 kg), dobivamo masu vreće 3, odnosno 58 kilograma.

Zatim, od zbroja masa vreća 1 i 3, tj. od 112, oduzimamo već poznatu masu vreće 3; dobiva se masa vreće 1: $112 \text{ kg} - 58 \text{ kg} = 54 \text{ kg}$.

Slično tome, masu vreće broj 2 dobivamo oduzimanjem 54 kg od 110 kg, tj. od zbroja masa vreća broj 1 i broj 2.

Dobivamo: masa vreće broj 2 je $110 \text{ kg} - 54 \text{ kg} = 56 \text{ kg}$.

Od zbroja masa vreća broj 3 i broj 5, tj. od 120, oduzimamo masu vreće broj 3, koja iznosi 58 kg; dobivamo da vreća broj 5 teži $120 \text{ kg} - 58 \text{ kg} = 62 \text{ kg}$.

Preostaje odrediti masu vreće broj 4 od zbroja masa vreća broj 4 i broj 5, tj. od 121 kg. Oduzimanjem 62 od 121 dobivamo da vreća broj 4 teži 59 kg.

Dakle, evo masa vreća:

54 kg, 56 kg, 58 kg, 59 kg, 62 kg.

Rješenje problema br. 7.7. Znamo da je Volođa dvostruko stariji od Ženje, a Nadja i Ženja zajedno su dvostruko starije od Volođe. To znači da su Nadjine i Ženjine godine zajedno četiri puta starije od Ženje.

To izravno povlači da je Nadja tri puta starija od Ženje.

Zatim znamo da je zbroj Aljošinih i Volođinih godina dvostruko veći od zbroja Nadjinih i Ženjinih godina.

Ali Volođine godine su dvostruko veće od godina Ženje, a zbroj Nadjinih i Ženjinih godina je četiri puta veći od Ženje. Stoga su Aljošine godine + dvostruko veće od Ženje = osam puta veće od Ženje.

To je: Aljoša je šest puta stariji od Ženje.

Konačno, znamo da je zbroj Lidinih, Nadjinih i Ženjinih godina jednak zbroju Volođinih i Aljošinih godina.

S tablicom ispred nas:

Lida ima 21 godinu.

Nadja je 3 puta starija od Ženje,

Volođa je 2 puta stariji od Ženje,

Aljoša je 6 puta stariji od Ženje.

Možemo reći da je $21 \text{ godina} + 3 \text{ puta starija od Ženje} + \text{Ženjine godine} = 4 \text{ puta starija od Ženje} + 12 \text{ puta starija od Ženje}$.

Ili: $21 \text{ godina} + 4 \text{ puta starija od Ženje} = 16 \text{ puta starija od Ženje}$.

Dakle, 21 godina = 12 puta starija od Ženje, i stoga, Ženja ima $21/12 = 1 \frac{3}{4}$ godine. Sada je lako odrediti da Volođa ima $3 \frac{1}{2}$ godine, Nadja ima $5 \frac{1}{4}$ godina, a Aljoša ima $10 \frac{1}{2}$ godina.

Rješenje problema br. 7.8. Radi jasnoće, nacrtajmo dvije svijeće jednu pored druge: debelu koja može izgorjeti za 5 sati i tanku koja može izgorjeti za 4 sata.

Zasjenite izgorjele dijelove obje svijeće, ostavljajući ogarke nezasjenjenima.

Lako je vidjeti da bi izgorjeli dio tanke svijeće trebao biti $\frac{5}{4}$ izgorjelog dijela debele svijeće; drugim riječima, zasjenjeni višak tanke svijeće iznosi $\frac{1}{4}$ izgorjelog dijela debele svijeće.

Međutim, duljina ovog viška iznosi $\frac{3}{4}$ duljine debelog ogarka. Drugim riječima, naučili smo da je $\frac{3}{4}$ duljine debelog ogarka jednako $\frac{1}{4}$ izgorjelog dijela debele svijeće.

To znači da je $\frac{4}{4}$ od toga (tj. cijeli krak) $\frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$ debele svijeće.

Dakle, ogarak debele svijeće je $\frac{1}{3}$ izgorjelog dijela, odnosno $\frac{1}{4}$ cijele duljine svijeće.

Posljedicno, $\frac{3}{4}$ debele svijeće je izgorjelo. A budući da je cijela svijeća mogla izgorjeti za 5 sati, $\frac{3}{4}$ je gorjelo $(5 \cdot \frac{3}{4}) = \frac{15}{4} = 3 \frac{3}{4}$ sata.

Odgovor: svijeće su gorjele $3 \frac{3}{4}$ sata.

Rješenje problema br. 7.9. Svaki se učenik svakodnevno klanjao svim ostalim učenicima i ravnatelju.

Naravno, nisu se klanjali sebi, ali su se klanjali ravnatelju, pa se svaki učenik svakodnevno klanjao onoliko puta koliko je bilo djece u školi.

To znači da je ukupan broj naklona jednak kvadratu broja djece.

Dakle, znamo da je 900 broj djece pomnožen sa samim sobom.

Koji je broj, pomnožen sa samim sobom, jednak 900?

Očito, 30.

A budući da je bilo dvostruko više djevojčica nego dječaka, među 30 djece bilo je 20 djevojčica i 10 dječaka.

Provjerimo ovo.

Djevojčice su se svojim prijateljicama klanjale $19 \cdot 20 = 380$ puta, a dječacima $20 \cdot 10 = 200$ puta.

Dječaci dječacima $9 \cdot 10 = 90$, djevojčice $10 \cdot 20 = 200$.

Ukupno: $380 + 200 + 90 + 200 = 870$ naklona.

Dodajući još 30 naklona ravnatelju, dobivamo točno 900.

Rješenje problema br. 7.10. Problem se mora riješiti od kraja.

Najmlađi sin je dobio onoliko dijamantata koliko je bilo sinova, plus $\frac{1}{7}$ ostatka; ali budući da nakon njegove isplate više nije ostalo dijamantata, njegov je dio bio jednak ukupnom broju sinova.

Sljedeće: prethodni sin je dobio jedan dijamant manje nego što je bilo sinova, plus $\frac{1}{7}$ preostalih dijamantata. Stoga je ono što je najmlađi sin dobio $\frac{6}{7}$ ovog "ostatka" (a sav "ostatak" je $\frac{7}{7}$).

Iz toga slijedi da broj dijamantata najmlađeg sina mora biti djeljiv sa 6 bez ostatka.

Pretpostavimo da ih je bilo 6 i provjerimo je li taj broj prikladan.

Ako je najmlađi sin dobio 6 dijamana, onda je bio šesti sin, a ukupno je bilo 6 sinova.

Peti sin je dobio 5 dijamana + $1/7$ od 7, tj. $5 + 1 = 6$.

Nadalje: 12 dijamana je $6/7$ preostalog udjela četvrtog sina;

Ukupni ostatak je 14 dijamana, a četvrti sin dobio je $4 + 1/7$ od $14 = 6$.

Izračunavamo ostatak nakon trećeg sina: 18 je $6/7$ ovog ostatka: stoga je ukupni ostatak 21.

Udio trećeg sina bio je $3 + 1/7$ od $21 = 6$.

Slično tome, saznajemo da su drugi i prvi sin također dobili po 6 dijamana.

Dakle, radža je imao 36 dijamana i 6 sinova.

Testirali smo broj 6 i otkrili da zadovoljava uvjete problema.

Nakon što smo isprobali 12, 18 i 24, uvjereni smo da ti brojevi nisu prikladni, a radža je teško mogao imati više od dva tuceta djece.

8. Deset problema o zemlji i nebu

8.1. Jug posvuda!

Postoji šaljiva priča¹ o Turčinu koji se navodno jednom našao u "najistočnijoj zemlji". Turčin opisuje ovu nevjerojatnu zemlju ovako:

"Ispred nas je istok, a istok je i sa svake strane. A zapad? Možda mislite da je zapravo vidljiv, poput neke točke, jedva se pomiče u daljini? Nije istina! A iza nas je istok! Ukratko, svuda i svuda je beskrajni istok!"

Zemlja koja bi sa svih strana bila okružena istokom, naravno, ne može postojati.

Ali postoji mjesto na globusu koje je okruženo jugom: u svim smjerovima od ovog mjesta proteže se "jedan beskrajni jug".

Na prvi pogled to se čini nemogućim, ali treba samo malo razmisliti da bi se shvatilo da takvo izvanredno mjesto na globusu postoji.

Engleska zastava viori se sada na ovom nevjerojatnom mjestu, a siguran sam da čak znate i ime čovjeka koji ju je postavio. Gdje je to mjesto?

Da vam pomognem u pogađanju, dodat ću da uopće nije vruće, čak ni toplo, iako je sa svih strana okružena jugom.

8.2. Telefonom

Uspostavljena je telefonska linija između New Yorka i San Francisca u Americi, tako da stanovnici New Yorka, na atlantskoj obali, mogu razgovarati telefonom sa stanovnicima San Francisca, na pacifičkoj obali.

Uredi u Sjevernoj Americi otvoreni su od 10:00 do 16:00 sati. Koliko sati dnevno uredski radnici u New Yorku i San Franciscu mogu međusobno voditi poslovne razgovore telefonom?

8.3. Gdje počinju dani u tjednu?

U nedjelju su gosti ostali nakon ponoći.

"Vrijeme je za polazak", najavio je jedan, "sutra je ponedjeljak, a ja moram rano na posao."

"Sutra je utorak", ispravio ga je domaćin s osmijehom.

"Što misliš? Zar danas nije nedjelja?"

"Ne, već je ponedjeljak: upravo je otkucalo dvanaest!"

"Aha, dakle, to misliš! Pa, naravno, budući da je ponoć, već je ponedjeljak."

¹Kuzma Prutkov

”Ne svugdje”, ubacio se drugi gost, mornar. ”Ovdje u Moskvi je ponedjeljak, ali u Lenjingradu je još uvijek nedjelja: tamo je pola jedanaest.”

”Tako je”, složio se domaćin. ”Sada je ponedjeljak samo istočno od nas: u Nižnjem, u Permu, u Krasnojarsku . . .”

”U Krasnojarsku je ponedjeljak počeo prije četiri sata”, objasnio je mornar.

”A u Petropavlovsku je ponedjeljak počeo prije osam sati.”

Usput, gdje mislite da je ponedjeljak došao najranije?

”Doista!” uzviknuo je domaćin.

”A evo još jednog zanimljivog pitanja: što dalje na istok idete, ponedjeljak dolazi ranije. U međuvremenu, zapadno od nas još uvijek je nedjelja. Dakle, granica između nedjelje i ponedjeljka mora negdje ležati: uostalom, Zemlja je okrugla. Gdje je ta granica?”

”Gdje počinju dani u tjednu?”, pitao je mornar.

”Ne znam kako riješiti ovaj problem”, primijetio je jedan gost, ”ali podsjeća me na zanimljivu priču Edgara Allana Poea o ’tri nedjelje u jednom tjednu’.

Dva mornara vratila su se s putovanja oko svijeta i sreli se. Jedan je oplovio globus od zapada do istoka, drugi od istoka do zapada; obojica su se sreli na istoj točki istog dana.

”Ali svaki od dvojice putnika taj je dan nazvao drugačije.”

Čovjek koji je oplovio Zemlju od zapada prema istoku napravio je dodatni krug oko Zemljine osi; vidio je izlazak sunca dodatni put i stoga je njegov broj dana bio jedan više. Uvjeran da je nedjelja bila jučer, dok je stigla tek danas.

Drugi mornar, dolazeći s istoka i stoga se uvijek krećući protiv Zemljine rotacije, napravio je jedan krug manje oko Zemljine osi nego što je Zemlja uspjela napraviti u istom vremenu; vidio je izlazak sunca jedan put manje i njegov broj dana bio je jedan manje. Stoga je uvjeren da će nedjelja stići tek sutra, iako je već stigla danas.

Dakle, u jednom tjednu postoje tri nedjelje: jučer, danas i sutra . . .

”To je moguće samo u fantastičnoj priči!”, odgovorio je mornar svom gostu.

”U romanu Julesa Vernea Put oko svijeta za 80 dana, junak je također izgubio broj dana i nije shvatio da je stigao cijeli dan ranije.”

Međutim, takve su pogrješke bile moguće u putovanjima iz drevnih vremena.

Upravo se to dogodilo Magellanovim suputnicima: nakon što su oplovili svijet, vratili su se u četvrtak u Portugal umjesto u petak. Ali ništa slično tome nije se moglo dogoditi ovih dana.

”Zašto ne?” odjekivali su glasovi.

”To će vam postati jasno ako prvo odgovorite na pitanje: gdje počinje ponedjeljak?”

I doista, čitatelju: gdje na globusu prvi put počinju dani u tjednu?

Gdje se prijelaz s jednog dana na drugi događa najranije?

8.4. Utrka sa Zemljom

Može li se osoba natjecati sa Zemljom u njezinoj dnevnoj rotaciji oko svoje osi?

Može li osoba "pretrčati Zemlju"², ako ne pješice, onda, primjerice, u brzom automobilu?

Također odgovorite na sljedeća pitanja:

Može li osoba na Zemlji vidjeti Sunce kako izlazi sa zapada?

I je li Koltsov bio u pravu kada je uzviknuo: Ali, avaj, sunce ne će izaći sa zapada!

8.5. Zalazak Sunca

Pogledajte ovdje prikazanu sliku - zalazak Sunca - i recite mi: je li ispravno nacrtana?



U ovom crtežu postoji nedosljednost koju trebate otkriti.

8.6. Turska zastava

Bez sumnje ste upoznati s turskom zastavom. Prikazuje polumjesec sa zvijezdom između krajeva. Primjećujete li veliku nedosljednost u dizajnu turske zastave? Što je to?



8.7. Ovo nije šala

Gdje je na Zemlji život najlakši?

Pitanje se čini kao zagonетка ili šaljiv problem, poput pitanja: "Zašto ptica leti?"

Ali naše pitanje nije baš takvo. Ako pažljivo razmislite o tome, onda se može odgovoriti sasvim racionalno i razumno.

Koje?

²Točnije, ne prestići, već zaostati za Zemljom, tj. kretati se po njezinoj površini u smjeru suprotnom od njezina kretanja, tako brzo da sebi produžite duljinu dana.

8.8. Zalazak Mjeseca

Vidite tropski krajolik s neobičnom slikom polumjeseca na horizontu. Je li ova slika ispravno nacrtana? Postoji li ovdje neka nedosljednost?



Je li Mjesec ovdje ispravno nacrtan?

8.9. Bojni brod

Bojni brod istisnine 20 000 tona ...

Ali možda ne znate što su "istisnina" i "tona"?

Istisnina se odnosi na masu vode koju brod istisne kada pluta.

A budući da plutajuće tijelo, prema Arhimedovu zakonu, istisne točno onoliko vode kolika je masa, "istisnina" izravno označava masu samog broda.

A što je "tona"? To je jedinica mase, 1 000 kilograma.

Kada pročitate da brod ima "istisninu od 20 000 tona", to znači da sam brod (i voda koju istiskuje kada pluta) ima masu 20 000 tona.

Dakle, bojni brod istisnine 20 000 tona, prethodno usidren u Arhangelsku, stigao je u ekvatorijalne vode.

Poznato je da svi objekti postaju lakši kako se približavaju ekvatoru. Razlika u težini između geografske širine Arhangelska i ekvatora je $1/250$, što znači da će uteg od 1 kilograma iz Arhangelska, prenesen na ekvator, težiti 4 grama manje.

Možete li predvidjeti koliko će tona vode naš bojni brod istisnuti u ekvatorijalnim vodama?

8.10. Parobrod i plivač na Mjesecu

Na Mjesecu sve teži šest puta manje nego na Zemlji, budući da je Mjesečeva gravitacijska sila na objekte šest puta slabija od Zemljine.

Tijelo mase 1 kilogram na Mjesecu bi težilo kao tijelo mase samo 160 grama na Zemlji.

Zamislite jezero na Mjesecu koje sadrži slatku vodu. Parobrod se lansira u ovo jezero, koje se, među Zemljinim slatkovodnim jezerima, nalazi uronjen do dubine 3 metra.

Koliko duboko će naš parobrod biti u ovom Mjesečevom jezeru?

Je li vjerojatnije da će se osoba koja ne zna plivati utopiti - u Zemaljskom jezeru ili u našem zamišljenom Mjesečevom jezeru?

8.11. Rješenja zadataka od 8.1. - 8.10.

Rješenje problema br. 8.1. Mjesto na Zemlji s kojeg se jug proteže u svim smjerovima je Sjeverni pol! Doista, Sjeverni pol je najsjevernija točka na globusu, a sve točke oko njega leže južnije.

Kada je hrabri polarni istraživač Peary 1909. godine na ovoj točki postavio englesku zastavu, bio je okružen jugom sa svih strana: "svugdje i svugdje beskrajni jug."

Rješenje problema br. 8.2. Odgovor: Ne 6 sati, već puno manje, i evo zašto.

Vremenska razlika između New Yorka i San Francisca je $3\frac{1}{4}$ sata. Kada se njujorške banke otvore - dakle, u 10 sati ujutro - ljudi u San Franciscu još spavaju: tamo je petnaest do 7 sati ujutro.

Tek u petnaest do jedan može njujorški uredski službenik nazvati svog kolegu u San Franciscu, gdje su se uredi upravo otvorili. U 4 sata popodne njujorški službenici su već napustili svoje urede, a stanovnici San Francisca ne mogu ih nazvati telefonom, iako je u tom gradu samo petnaest do jedan.

Dakle, uredi ova dva grada mogu međusobno razgovarati $2\frac{3}{4}$ sata dnevno, iako su otvoreni 6 sati.

A kad bi postojao telefon između Lenjingrada i Petropavlovska, bilo bi ga gotovo potpuno nemoguće koristiti!

Vremenska razlika između ovih gradova je 10 sati, pa kada su Lenjingradčani budni, Petropavlovčani spavaju i obrnuto.

Morao bi se noću buditi da bi razgovarao ovim međugradskim telefonom.

Rješenje problema br. 8.3. Sat je u Moskvi otkucao dvanaest - upravo je stigao ponedjeljak; zapadno od Moskve, nedjelja se još uvijek proteže posvuda, a istočno ponedjeljak.

Ali na sferičnoj Zemlji, istok i zapad se neizbježno susreću; stoga negdje mora postojati granica koja odvaja nedjelju od ponedjeljka.

Ta granica doista postoji i naziva se "Međunarodna datumska granica". Prolazi kroz Beringov tjesnac i proteže se preko voda Tihog oceana u nazubljenoj liniji, čiji je točan položaj određen međunarodnim dogovorima.

Duž ove zamišljene linije, koja presijeca Tihi ocean, događa se prva promjena dana, mjeseca i godine na globusu. Ovdje su, takoreći, ulazna vrata našeg kalendara: oдавде dolaze nedjelje i ponedjeljci, siječnji i veljače; ovdje leži i kolijevka Nove godine.

Ranije nego bilo gdje drugdje na Zemlji, svaki novi dan u tjednu stiže ovdje: rođen, on trči prema zapadu, kruži oko svijeta i ponovno se vraća u svoje rodno mjesto - ovaj put kako bi skliznuo s površine našeg planeta i nestao u vječnosti.

Od svih zemalja svijeta, Rusija je prva koja dočekuje svaki novi dan na svom teritoriju: na rtu Dežnev, svaka "nedjelja", novorođena u vodama Beringovog tjesnaca, ulazi u naseljeni svijet kako bi započela svoj marš kroz sve dijelove svijeta.

I ovdje, na istočnom kraju ruske Azije, dani umiru, ispunivši svoju 24-satnu službu.

Karlo V. se jednom pohvalio da sunce nikada ne zalazi u njegovim dominionima.

Mogli bismo, s većim pravom, biti ponosni što posjedujemo kolijevku dana u nastajanju; unutar Rusije, prvi dan u tjednu koji se mijenja iz jednog u drugi događa se na cijeloj čvrstoj zemlji.

Znači, ovdje se događa promjena dana u tjednu.

Što rade mornari kada prođu ovu "datumsku granicu"?

Kako ne bi izgubili pojam o danima, poput Magellanovih suputnika, mornari moraju preskočiti jedan dan u tjednu kada putuju s istoka na zapad; a kada prelaze datumsku granicu sa zapada na istok, isti dan u tjednu broje dva puta - to jest, nakon nedjelje ponovno slave nedjelju.

Zato su priče koje su ispričali Edgar Allan Poe u "Tri nedjelje u jednom tjednu" i Jules Verne u svom romanu "Put oko svijeta za 80 dana" nemoguće u stvarnosti.

Rješenje problema br. 8.4. Prestizanje Zemlje u njezinoj dnevnoj rotaciji oko svoje osi sasvim je moguće u modernom trkaćem automobilu koji se kreće brzinom većom od 200 kilometara na sat (55 metara u sekundi) ili, još bolje, u avionu sposobnom letjeti brzinom od 300 kilometara na sat ili više.

Naravno, to nije moguće na ekvatoru, gdje se točke kreću brzinom od 460 metara u sekundi; nemoguće je čak ni na geografskoj širini Lenjingrada (60°), gdje se točke na Zemljinoj površini kreću brzinom od 230 metara u sekundi.

Ali to je sasvim moguće na geografskim širinama od 83° i više. Ovdje će vozač koji juri od istoka prema zapadu vidjeti sunce kako nepomično visi na nebu, ne približavajući se zalasku Sunca³.

Zemlja se, naravno, nastavlja okretati, ali vozač će putovati isto toliko u suprotnom smjeru i stoga će ostati nepomičan u odnosu na sunce.

Pri još većoj brzini, vozač bi mogao prestići Zemlju i svjedočiti novom čudu: Sunce ne izlazi s istoka, već sa zapada!

Zemlja ispod kotača automobila i dalje bi se rotirala od zapada prema istoku, ali bi se sam automobil okretao oko Zemljine osi od istoka prema zapadu.

Rješenje problema br. 8.5. Nedosljednost u crtežu je u tome što polumjesec nije okrenut prema Suncu.

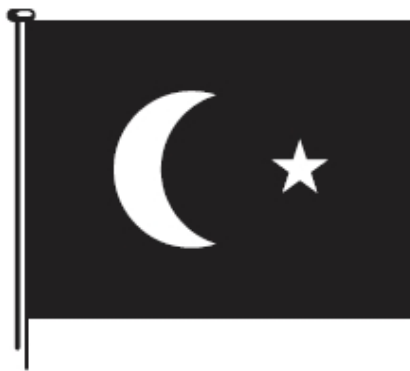
Uostalom, Mjesec je osvijetljen Suncem, tako da ne može biti okrenut od njega svojom neosvijetljenom stranom ...

"Većina slikara", primjećuje o tome poznati francuski astronom Flammarion, "to još ne zna, jer ne prođe godina a da se veliki broj Mjeseca ne pojavi u Pariškom salonu (izložbenoj dvorani)."

Rješenje problema br. 8.6. Jasna neskladnost s turskom zastavom jest da je zvijezda na slici postavljena preblizu polumjeseca. U tom položaju mjesec i zvijezda ne mogu biti na nebu. Mjesec je neproziran, pa se zvijezda ne može vidjeti kroz njegovu površinu; stoga nijedna zvijezda ne može sjati unutar Mjesečeve orbite.

Slika prikazuje kako bi polumjesec i zvijezda trebali biti postavljeni da bi slika odgovarala stvarnosti. Zvijezda mora biti pomaknuta od vanjskog ruba polumjeseca za više od promjera punog Mjeseca. Pa ipak, na turskoj zastavi zvijezda sja točno između krajeva polumjeseca!

³Osoba može prestići Zemlju pješice - na 50 kilometara od pola.



Rješavanje problema 8.7. Od svih mjesta na Zemlji, život je, naravno, najlakši na ekvatoru - iz jednostavnog razloga što tamo sve postaje lakše.

Lokomotiva mase 60 tona u Moskvi postaje 60 kilograma teža po dolasku u Arhangelsk, a isto toliko lakša u Odesi.

Pa tko krade tih 60 kilograma iz lokomotive?

Primarno ih krade "centrifugalna sila"; ona smanjuje težinu bilo kojeg objekta u blizini ekvatora za $1/250$ u usporedbi s težinom istog objekta na polovima.

A budući da je Zemlja malo ispupčena na ekvatoru, tj. površina tamo je malo dalje od središta planeta, to dodatno smanjuje težinu objekata u blizini ekvatora.

Ukupno, gubitak težine na ekvatoru doseže $1/250$ težine istog objekta na polu.

Iz tog razloga, neki šaljivdžija je jednom objavio da zna način da potpuno legalno i pošteno prevari kupce.

Tajna je bila kupovati robu u ekvatorijalnim zemljama i prodavati je bliže polovima. Kilogram, kada se prenese s ekvatora na pol, dobio bi na težini punih 5 grama - osim ako ne koristite opružnu vagu (i svakako onu vaše vlastite, "južnjačke" proizvodnje) za vaganje, umjesto vage s gredom. Inače, naravno, ne bi bilo dobitka: na vagi s utezima, roba bi postala teža - ali utezi bi postali jednako teški.

Malo je vjerojatno da bi se netko mogao obogatiti takvom trgovinom - ali u biti je šaljivdžija bio u pravu, budući da se težina doista povećava s udaljenošću od ekvatora, gdje je "život najlakši na svijetu".

Rješenje problema br. 8.8. Čudno, polumjesec je na slici prikazan potpuno točno.

Ovo je tropski krajolik, a pod tropima se položaj polumjeseca razlikuje od njegovog položaja na našim geografskim širinama.

Ovdje je mladi mjesec okrenut desno, a opadajući polumjesec lijevo.

U tropskim zemljama polumjesec visi vodoravno na nebu.

To se događa iz sljedećeg razloga. U našim zemljama Sunce i Mjesec (i doista sva nebeska tijela) kreću se u nagnutim krugovima u svom svakodnevnom kretanju nekom; stoga se navečer Sunce, osvjetljavajući Mjesec, nalazi ispod horizonta pod kosim kutom: osvjetljava Mjesec desno ili lijevo, a polumjesec je okrenut lijevo ili desno.

Na ekvatoru se, međutim, nebeska tijela kreću u vertikalnim lukovima; Sunce, osvjetljavajući Mjesec, nalazi se ispod horizonta ne desno ili lijevo od njega, već ispod njega.

Mjesec je osvjetljen odozdo i zato polumjesec tamo ima oblik gondole, kao što je prikazano na našem crtežu.

Svatko tko živi na jugu - na Krimu, Kavkazu i u Turkestanu - vjerojatno je primijetio da polumjesec tamo često ima položaj na nebu sličan onome prikazanom na našem crtežu.

Rješenje problema br. 8.9. Nakon prelaska iz Bijelog mora u ekvatorijalne vode, bojni brod postaje $1/250$ lakši. Ali i voda postaje lakša za potpuno isti iznos: također teži $1/250$ manje blizu ekvatora nego u Bijelom moru.

Stoga, istisnina bojnog broda ostaje ista tijekom cijelog putovanja: 20 000 tona.

Rješenje problema br. 8.10. Parobrod bi bio šest puta lakši na Mjesecu, ali to ne znači da bi puno manje potonuo u Mjesečevom jezeru.

Uostalom, voda na Mjesecu težila bi šest puta manje nego na Zemlji. Plutajuće tijelo istisne onoliko vode koliko i samo teži (Arhimedov zakon); stoga bi dubina parobroda trebala ostati nepromijenjena: potonuo bi ista tri metra.

Slično tome, ništa se ne bi promijenilo za plivača: njegova težina bi se smanjila za isti faktor kao i težina vode koju istisne.

Posljedično, uzgon osobe bio bi isti u Mjesečevom jezeru kao i u jezeru na Zemlji.

Utapanje je jednako lako u oba.

9. Trikovi i igre

9.1. Pogađač

Dječak s povezom preko očiju nepogrešivo pogađa u kojoj ruci držite novčić od deset kopejki.

On to radi ovako.

”Uzmite novčić od deset kopejki u jednu ruku”, kaže, ”a novčić od tri kopejke u drugu.”

Nakon što ste to učinili, on nastavlja:

”U sebi udvostručite ono što vam je u desnoj ruci i utrostručite ono što vam je u lijevoj.”

Učinite kako traži; zatim vas on zamoli da zbrojite dva broja i pita je li rezultat paran ili neparan.

”Paran”, odgovorite, primjerice.

”Novčić od deset kopejki u lijevoj ruci”, odmah najavljuje i uvijek točno pogađa.

Zašto?

9.2. Aritmetički trik

Domaćin traži od jednog od svojih gostiju da napiše bilo koji troznamenkasti broj na komad papira.

”Ali nemojte mi ga pokazivati, samo ga daj svom susjedu.”

”A ti”, kaže domaćin svom susjedu, ”napiši isti broj desno od broja. Dobit ćeš dugi šesteroznamenkasti broj. Gotovo? Dodaj papir dalje.”

”Što da radim s ovim šesteroznamenkastim brojem?” pita gost koji je primio poruku.

”Podijeli ga s 13.”

”A ako se ne dijeli?”

”Hoće.”

”Ali ti čak ni ne znaš koji je moj broj!” prigovara gost. ”Nije svaki broj djeljiv s 13 bez ostatka.”

”Ali ovaj će biti djeljiv, vidjet ćeš.”

Gost počinje dijeliti, nepovjerljivo; doista, broj je djeljiv s 13 bez ostatka.

”Nemoj mi reći koliko si dobio, nego proslijedi papir susjedu”, kaže domaćin. ”Želio bih da dobiveni broj podijeliš s 11.”

”A što da radim s ostatkom?”

”Ne će biti ostatka”, izjavljuje domaćin.

I doista: nema ostatka.

"Proslijedi broj koji si dobio dijeljenjem dalje i zamoli susjeda da ga podijeli sa 7", nastavlja upućivati domaćin.

"Hoće li se stvarno opet dijeliti bez ostatka?" susjed pita zbunjeno.

"Točno", odgovara domaćin.

"Jeste li ga podijelili? Sada, molim vas, napišite rezultat na zaseban papir i dodajte mi ga."

Zatim, ne gledajući papir, domaćin ga predaje gostu koji je imao na umu broj.

"Evo broja koji ste napisali. Je li točan?"

"Točno!" uzvikuje gost u čudu. "Ali kako ste znali? Uostalom, niste vidjeli ni moj broj ni onaj koji je napisan?"

I stvarno, kako je mogao znati?

9.3. Trik s kartama

Teško je pogoditi kartu na koju mislite, a još teže, čini se, prisiliti nekog drugog da pogađa. Ali postoji način da bilo koga pretvorite u nepogrešivog pogađača karte koju ste smislili.

Iz špila igračih karata uzimate jednu kartu - recimo, dečka pik - stavljate je na stol bez da je ikome pokazujete i uvjeravate sugovornika da je može pogoditi. On, naravno, tvrdi da ne posjeduje takav dar, ali vi inzistirate.

Slijedi sljedeći razgovor između vas i njega (sjetite se, karta koja leži na stolu je dečko pik).

Počinjete:

"Postoje četiri boje. Navedite dvije od njih, bilo koje dvije koje želite."

"Karo i pik", odgovara vaš sugovornik nasumično.

"Od ove dvije, navedite jednu."

"Recimo karo", nastavlja pogađač s osmijehom.

"Dakle, ostaju samo pik. Sada špil sadrži asa, kralja, damu, dečka, desetku i devetku. Odaberite tri od ovih šest karata."

"Kralj, dama i devetka", vaš sugovornik ponovno odgovara nasumično.

"Dakle, ostaju as, dečko i desetka. Odaberite dvije od ovih."

"As i dečko."

"Sada, imenuj jednog od njih."

"Pa, as."

"Dakle, ostaje samo dečko. Evo ga!"

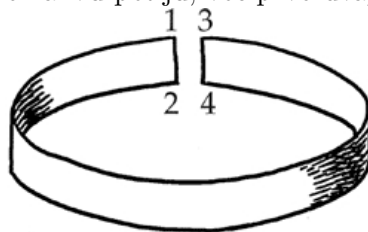
I trijumfalno okrećete kartu: boja i ime su pogođeni!

Vaš sugovornik je zbunjen: kako je uspio pogoditi kartu ...

U čemu je tajna?

9.4. Što ćete dobiti?

Izrežite traku novina širine 5 centimetara i duljine 80-100 centimetara. Zalijepite krajeve ove trake u petlju - ali ne bilo kakvu petlju, već prvo dvaput uvijte traku po dužini.

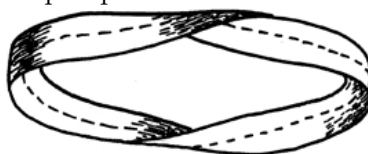


Evo kako to učiniti.

Na ovoj slici, kutovi trake su označeni brojevima; okrenite jedan kraj trake tako da vrh broj 3 nije na vrhu, nasuprot prvog kuta, već na dnu, nasuprot vrha 2. Zatim ponovno preklopite isti kraj u istom smjeru, tako da treći vrh ponovno bude na vrhu, nasuprot prvog kuta.

Kao rezultat toga, traka će biti dvaput uvijena po dužini. Sada zalijepite krajeve trake (v. sl.) i spremni ste za trik. Pokažite ovu unaprijed pripremljenu vrpцу svojim gostima i pitajte ih:

”Što se događa ako prerežete vrpću po sredini?”



Svi će vam reći da je očito da jedna petlja čini dva - ništa drugo ne treba očekivati. Ali događa se nešto neočekivano.

Što vi mislite?

9.5. Još neočekivanije

Još neočekivanije je ono što se događa prilikom rezanja još jedne papirnate petlje, zalijepjenog na malo drugačiji način. Točnije, kraj se uvija kao i prije, ali ne dva puta, već jednom (treći vrh, kada se zalijepi, bit će nasuprot drugom vrhu).

Što se događa ako takvu vrpću prerežete po dužini po sredini (v. sl.)?



Isprobajte - rezultat će vas zadiviti!

9.6. Igra 32

Ovu igru igraju dvije osobe.

Stavite 32 žigice na stol.

Osoba koja započne igru uzima jednu, dvije, tri ili četiri žigice.

Zatim druga osoba uzima onoliko žigica koliko želi, ali također ne više od četiri.

Opet, prva osoba uzima najviše četiri žigice. I tako dalje.

Tko god uzme posljednju žigicu, pobjeđuje.

Igra je vrlo jednostavna, kao što vidite. Ali ono što je zanimljivo u vezi s njom jest da osoba koja započne igru uvijek može pobijediti - ako ispravno izračuna koliko žigica treba uzeti.

Možete li im reći kako bi trebali igrati da pobijede?

9.7. Isto, ali obrnuto

Igra "32" može se modificirati: tko god uzme zadnju žigicu ne pobjeđuje, već, naprotiv, gubi.

Kako bi se ovdje trebalo igrati da bi se osigurala pobjeda?

9.8. Igra 27

Ova igra je slična prethodnima.

Također se igra između dva igrača i također se sastoji od igrača koji se izmjenjuju u igranju i uzimaju najviše četiri žigice.

Međutim, kraj igre je drugačiji: pobjednik je onaj s parnim brojem žigica na kraju igre.

I ovdje, onaj tko započinje igru ima prednost.

Može izračunati svoje poteze tako da je siguran u pobjedu.

Koja je tajna igre u kojoj svi dobivaju?

9.9. Na drugačiji način

Prilikom igranja igre 27, možete postaviti i suprotan uvjet: tako da se pobjednikom smatra onaj s neparnim brojem žigica nakon igre.

Koji je način igranja bez gubitka?

9.10. Korištenje šest žigica

Možete li od šest žigica napraviti četiri jednakostranična trokuta tako da nijedna stranica nije kraća od žigice?

Pokušajte.

I ne očajavajte ako se mučite s rješavanjem problema, jer je i dalje rješiv, čak i bez ikakvih posebnih trikova.

Ne bojte se pogrešnog predstavljanja u problemu - mora se shvatiti točno onako kako je navedeno: napravite četiri jednakostranična trokuta od šest žigica.

9.11. Rješenja zadataka od 9.1. - 9.10.

Rješenje problema br. 9.1. Kada udvostručite ili utrostručite paran broj, uvijek dobijete paran broj. S neparnim brojem je druga stvar: kada se udvostruči, postaje paran, ali kada se utrostruči, ostaje neparan.

Novčić od deset kopejki, dakle, daje paran broj i kada se udvostruči i kada se utrostruči; obrnuto, tri kopejke daju paran broj samo kada se udvostruče; kada se utrostruče, daju neparan broj.

Također znamo da dodavanje parnog broja parnom broju daje paran broj, a dodavanje parnog broja neparnom broju daje neparan broj.

Iz ovoga izravno slijedi da ako je zbroj u našem triku bio paran, tada su tri kopejke udvostručene, a ne utrostručene - to jest, bile su u desnoj ruci.

Ako je zbroj neparan, to bi značilo da su tri kopejke utrostručene i stoga su bile u lijevoj ruci.

Rješenje problema br. 9.2. Tajna trika leži u činjenici da je drugi gost, dodajući isti broj troznamenkastom broju koji je zamislio, pomnožio ga s 1001, a da toga nije bio svjestan.

Doista, ako je, primjerice, prvi gost pomislio na broj 873, onda je drugi gost dobio broj 873873.

Ali to nije ništa drugo nego $873000 + 873$, tj. $873 \cdot 1001$.

A broj 1001 je izvanredan broj: dobiva se množenjem $7 \cdot 11 \cdot 13$.

Nije stoga iznenađujuće da je domaćin s povjerenjem predložio dijeljenje takvog šestoroznamenkastog broja prvo s 13, zatim s 11, pa sa 7.

Dijeljenje uzastopno s 13, 11 i 7 isto je kao dijeljenje s $13 \cdot 11 \cdot 7$, tj. sa 1001.

Dakle, drugi gost pomnožio je broj koji je imao na umu sa 1001, a sljedeća tri gosta zajedno su podijelili broj koji je dobio sa 1001.

Zato je rezultat opet bio broj koji je imao na umu.

Rješenje problema br. 9.3. Ovaj bizaran trik je, u biti, smiješno jednostavan. Njegovo je rješenje jasno, primjerice, iz činjenice da ako odgovor na posljednje pitanje nije bio "asa" već "dečka", vaš uspjeh u pogađanju ne bi bio ništa manje briljantan.

U osnovi, cijela tajna trika je sljedeća: ovisno o tome što vam treba, usmjeravate pažnju sugovornika ili na karte koje je imenovao ili na one koje nije.

A budući da namjeravana karta neizbježno mora biti ili među onima koje su imenovane ili među onima neimenovanim, ne čudi da vaš sugovornik uvijek "pogodi" točno.

Naravno, nakon što ste ovaj trik izveli nekoliko puta zaredom, trik će biti otkriven.

Ali ako ne iskoristite sporu duhovitost svog slušatelja, možete zbuniti čak i najsnažljiviju osobu.

Rješenje problema br. 9.4. Dobivate dvije petlje, ali su jedna uvučena u drugu, poput karika u lancu (v. sl.).



Ako ponovno prerežete svaku od ovih petlji po dužini, ponovno ćete dobiti dvije petlje uvučene jedna u drugu.

Rješenje problema br. 9.5. Prilikom rezanja ove petlje po dužini, dobivamo, suprotno svim očekivanjima, ne dvije petlje, već ... jednu, dvostruko veću (v. sl.)!



Naša zakrivljena vrpca, koja ima tako zapanjujuće svojstvo da se ne odvaja prilikom rezanja, u geometriji se naziva "Möbiusova vrpca", nazvana po poznatom matematičaru 19. stoljeća.

Još jedna izvanredna značajka naše petlje je da nema prednju i stražnju stranu; "prednji" dio vrpce postupno se stapa u "stražnji dio", pa je nemoguće reći gdje jedna strana završava, a druga počinje.

Ako biste, primjerice, htjeli obojiti jednu stranu naše papirnate vrpce, recimo, crveno, a drugu ostaviti neobojenu, to ne biste mogli učiniti: naša vrpca nema dvije strane; jednostrana je¹.

Ali vratimo se rezanju naše vrpce.

Ako, nakon što ste je prerezali po dužini i dobili jednu petlju, prerežete novu petlju, dobit ćete ovaj put dvije petlje (v. sl.).



Međutim, ne ćete ih moći razdvojiti: zapletene su u složeni Gordijski čvor koji se može rezati samo škarama.

Rješenje problema br. 9.6. Jednostavnu tajnu sigurne igre prilično je lako pronaći ako pokušate igrati igru od kraja.

Lako je vidjeti da ako ostavite 5 žigica na stolu za protivnika u pretposljednem potezu, zajamčena vam je pobjeda: vaš protivnik ne može uzeti više od 4 žigice i stoga možete uzeti sve nakon njega.

Ali kako možete osigurati da možete ostaviti 5 žigica na stolu u pretposljednem potezu?

Da biste to učinili, morate ostaviti točno 10 žigica u prethodnom potezu protivnika: tada, bez obzira koliko ih uzme, ne će vam ostaviti manje od 6, a vi mu uvijek možete ostaviti 5.

Sljedeće: kako možete osigurati da vaš protivnik mora uzeti od 10 žigica?

Da biste to učinili, morate ostaviti 15 žigica na stolu u prethodnom potezu.

Dakle, uzastopnim oduzimanjem 5 žigica, učimo da na stolu trebamo ostaviti 20 žigica, a prije toga 25 žigica i konačno, prvi put 30 žigica - to jest, na početku igre, uzeti 2 žigice.

¹Usput, ovo jasno pokazuje da je definicija površine, koja se često nalazi u udžbenicima, kao "granice tijela" neodrživa; Möbiusova površina ne može omeđiti nijedno tijelo, a ipak je površina.

Dakle, evo tajne sigurne igre: prvo uzmite 2 žigice; zatim - nakon što vaš partner uzme nekoliko žigica - uzmite dovoljno da na stolu ostane 25 žigica; sljedeći put ostavite na stolu 20 žigica, zatim 15, zatim 10 i konačno 5.

Posljednja žigica uvijek će ostati vaša.

Rješenje problema br. 9.7. Ako su uvjeti igre obrnuti - tj. onaj tko uzme posljednju žigicu gubi - tada morate ostaviti 6 žigica na stolu u pretposljednjem potezu.

Tada, bez obzira koliko vaš partner uzme, ne može vam ostaviti manje od 2 ili više od 5, što znači da mu uvijek možete ostaviti posljednju žigicu u sljedećem potezu.

Ali kako možete osigurati da na stolu ostane 6 žigica?

Da biste to učinili, morate ostaviti 11 žigica u prethodnom potezu, a zatim 16, 21, 26 i 31 žigicu u prethodnom potezu.

Dakle, počinjete uzimanjem samo 1 žigice, a u sljedećim potezima ostavljate 26, 21, 16, 11 i 6 žigica za svog partnera; posljednja žigica neizbježno ide vašem protivniku.

Rješenje problema br. 9.8. Pronalaženje načina za pobjedu ovdje je nešto teže nego u igri 32.

Morate uzeti u obzir sljedeća dva faktora:

1) Ako na kraju igre imate neparan broj žigica, trebali biste protivniku ostaviti 5 žigica i vaša pobjeda je zajamčena.

Doista: u sljedećem potezu, protivnik će vam ostaviti 4, 3, 2 ili 1 žigicu; ako ostavi 4, uzimate 3 i pobjeđujete; ako ostavi 3, birate ih i pobjeđujete; ako ostavi 2, uzimate 1 i pobjeđujete.

2) Ako na kraju igre imate paran broj žigica, trebali biste protivniku ostaviti 6 ili 7 žigica.

Doista: da vidimo kako će igra ići.

Ako vam protivnik u sljedećem potezu ostavi 6 žigica, vi uzimate 1 i, sada imajući neparan broj žigica, mirno ostavljate protivniku 5 žigica, s kojima on neizbježno mora izgubiti.

Ako vam ostavi 5 žigica umjesto 6, uzimate 4 i pobjeđujete.

Ako vam ostavi 4, uzimate ih i pobjeđujete.

Ako vam ostavi 3, uzimate 2 i pobjeđujete.

I konačno, ako vam ostavi 2, pobjeđujete.

Ne može vam ostaviti manje od 2.

Sada nije teško pronaći način igre bez gubitka.

Sastoji se od toga da ako imate neparan broj žigica, morate protivniku ostaviti na stolu broj žigica koji je za 1 manji od višekratnika broja 6 - to jest, 5, 11, 17, 23;

Ako imate paran broj žigica, morate protivniku ostaviti na stolu broj žigica koji je višekratnik broja 6 ili jedan veći - to jest, 6 ili 7, 12 ili 13, 18 ili 19, 24 ili 25.

Nula se može smatrati parnim brojem; stoga, na početku igre morate uzeti 2 ili 3 žigice od 27, a zatim nastaviti u skladu s tim.

Igrajući na ovaj način, neizbježno ćete pobijediti.

Samo nemojte dopustiti da vam protivnik otme igru.

Rješenje problema br. 9.9. Ako su uvjeti igre obrnuti i pobjednik je onaj s neparnim brojem, trebali biste postupiti na sljedeći način: ako imate paran broj žigica, ostavite protivniku jedan manji od višekratnika broja 6; ako imate neparan broj, ostavite mu višekratnik broja 6 ili jedan veći.

To bi neizbježno trebalo dovesti do vaše pobjede.

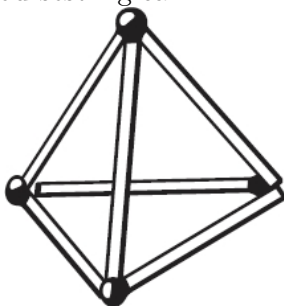
Na početku igre imate 0 žigica (tj. paran broj); stoga, u svom prvom potezu, uzimate 4 žigice, ostavljajući protivniku 23.

Rješenje problema br. 9.10. Vjerojatno ste pokušali formirati šest trokuta slažući žigice u jednoj ravni.

I, naravno, bezuspješno, jer je problem nerješiv.

Ali problem ne nameće takvo ograničenje; trokute možete rasporediti u više ravnina, tj. smjestiti ih u prostor.

Tada je rješenje vrlo jednostavno: jednostavno konstruirajte piramidu s trokutastom bazom i trokutastim stranama od šest žigica, kao što je prikazano na slici. Dobit ćete četiri jednakostranična trokuta od šest žigica.



10. Geometrijske siluete

Zabavna igra o kojoj ćemo sada raspravljati ima drevno podrijetlo.

Čak je starija od šaha, iako mnogo manje poznata.

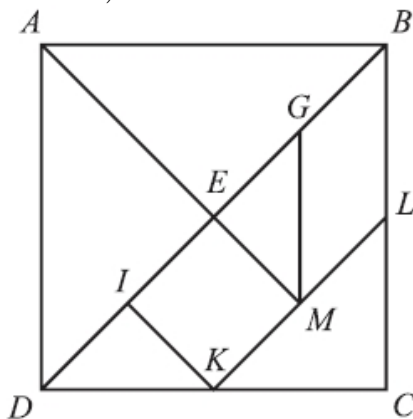
Prije četiri tisuće godina nastala je u Kini; međutim, u početku nije služila kao igra, već vjerojatno kao obrazovni alat.

Danas ova aktivnost, donekle modificirana, može poslužiti kao zabavna razonoda.

Igra se sastoji od sastavljanja bezbroj različitih oblika od određenih geometrijskih likova - "tangrama".

"Tangrami" su tako nazvani jer ih je, prema legendi, izumio izvjesni Kinez po imenu Tang. Izrezani su iz crnog kartona ili piljeni iz drveta i čine dijelove kvadrata podijeljenog na određeni način.

Evo kako izrezati kvadrat (v. sl.). Prvo spojite vrhove B i D , tj. nacrtajte "dijagonalu" BD . Zatim spojite polovišta stranica BC i DC , tj. nacrtajte dužinu KL . Spojite točku A s polovištem KL , tj. s točkom M , i spojite točku M s G , tj. s polovištem EB . Zatim spojite K s I (tj. s polovištem DE).



Sada su sve potrebne dužine nacrtane na kvadratu i možete izrezati tangrame duž njih¹.

Dobit ćete sljedeće geometrijske likove: pet trokuta (dva velika, jedan srednji i dva mala), jedan kvadrat i jedan paralelogram.

Da biste uvježbali korištenje tangrama, pomiješajte ovih sedam likova i pokušajte ih, bez gledanja u dijagram, sastaviti u kvadrat od kojeg su napravljeni.

Malo je vjerojatno da ćete odmah uspjeti. Ali nemojte odustati, strpljivo tražite rješenja.

Nakon što pronađete jedno, prijedite na rješavanje sljedećih tangramskih problema.

¹Možete izrezati dijelove tangrama, zalijepiti ih na debele listove papira i sastaviti ih u razne siluete.



Ovi problemi zahtijevaju da stvorite određenu siluetu od spomenutih sedam figura.

- 1) Ne smijete preklapati jedan tangram drugim, čak ni vrh preko vrha.
- 2) svih sedam tangramskih dijelova mora se koristiti za svaku siluetu.

Među uključenim siluetama naći ćete neke prilično karakteristične i uspješne slike, unatoč njihovoj jednostavnosti i uglatosti.

Nije ni čudo da su umjetnici poput Gustavea Doréa bili fascinirani tangram slikama, a Napoleon je, u svojoj prisilnoj samoći na otoku Svete Helene, navodno provodio sate igrajući ovu "kinesku zagonetku".

10.1. "Biljar"



Ovdje vidite geometrijske siluete dvaju igrača koji se nagnju nad biljarski stol.

Svaka silueta - i igrača i stola - sastoji se isključivo od tangrama; a svaka od ove tri siluete sadrži svih sedam tangram figura.

Možete li reći kako su te figure sastavljene?

10.2. "Orkestar"



Naš orkestar, sastavljen od 7 tangrama, uključuje bubnjara (desno), stalak za note pored njega, basista, njegov kontrabas, debelog trubača, pijanista koji sjedi za klavirom i, konačno, sam klavir.

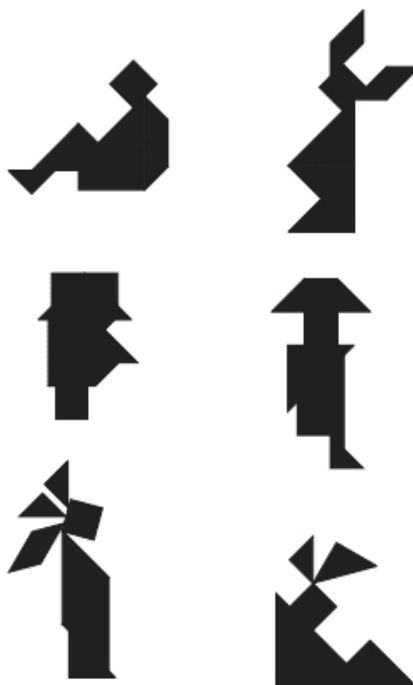
Kako su te siluete sastavljene?

10.3. Osam silueta

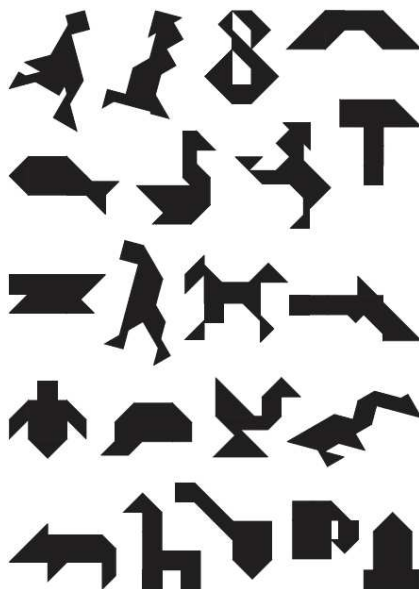
Sastavite red tangram figura na slici; one prikazuju siluete pijetla, žene, muškarca, djevojčice, krave, mačke, psa i miša.

10.4. Još šest silueta

Pokušajte sastaviti geometrijske siluete prikazane na slici koristeći tangrame: djevojka koja sjedi na travi, žena koja se gleda u ogledalo, glava u šeširu, Napoleon i dvije siluete Indijanaca.



10.5. Gdje je grješka?



U tablici su prikazane sljedeće tangramske siluete: trčeći muškarac, trčeća žena, kravata, most, riba, labud, muškarac sa šalicom, čekić, nakovanj; muškarac s rukama iza leđa; konj, revolver, košulja, šešir, kokoš, guska, prase, stolica, lula za pušenje, krigla i nadgrobni spomenik.

Jedna od ovih figura ovdje je pogrešno nacrtana: takva kakva jest, ne može se konstruirati od tangrama.

Označite jedinu figuru u našoj tablici koja se ne može konstruirati od tangrama.

10.6. Najveća figura

Ako ste uspjeli stvoriti neke ili sve gore prikazane siluete, odgovorite na sljedeća pitanja:

Koja od svih figura koje ste stvorili ima najveću površinu?

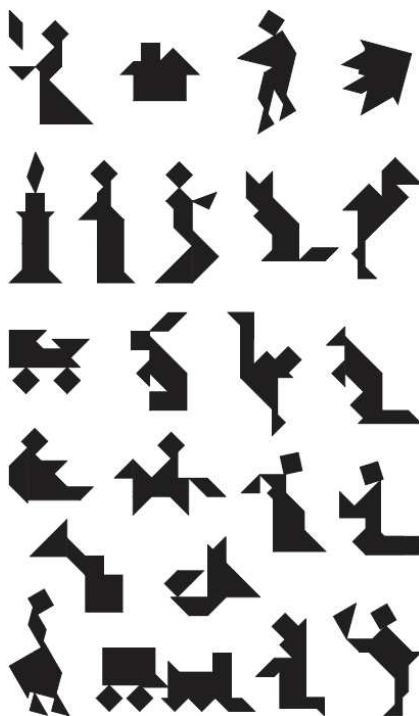
Koja od njih ima najmanju površinu?

10.7. 24 siluete

Siluete sastavljene u tablici prikazuju:

ženu pred ogledalom, kuću, mušku figuru, glavu Amerikanca, goruću svijeću, stariju ženu, mršavu mladu ženu, mačku, dizalicu, automobil, zeca, noja, klokana, sjedeću figuru, jahača na konju, ženu s torbicom, muškarca koji kleči, gramofon, jedrilicu, Nizozemku, lokomotivu s tenderom, figuru koja kleči i muškarca koji se klanja.

Kako su sve ove figure sastavljene?



10.8. Veličine tangrama

Pogledajte bliže 7 tangram figura koje su vam pomogle stvoriti toliko različitih silueta i pokušajte odgovoriti na pitanje:

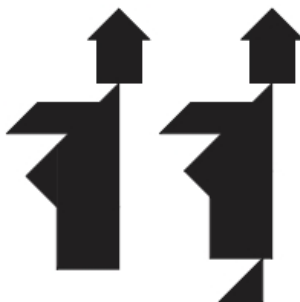
Koliko je puta površina svake tangram figure manja od površine kvadrata iz kojeg su izrezane?

10.9. Odakle je došla noga?

Evo dvije siluete napravljene od tangrama.

Vidite da jedna silueta ima nogu, a druga nema.

Pa ipak, obje figure su konstruirane od istih sedam tangrama!



Odakle je došla noga na desnoj figuri?

10.10. Dva kvadrata od jednog

Dobio sam malu kvadratnu kutiju iz Kine koja sadrži tangrame, složene u dva sloja, pri čemu svaki sloj predstavlja kvadrat.

Dakle, od 7 tangrama možete napraviti ne samo jedan kvadrat, već i dva identična.

Kako se to može učiniti?

10.11. Rješenja zadataka od 10.1. - 10.10.

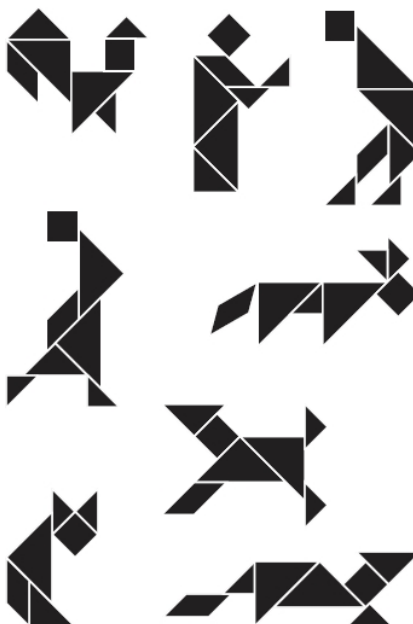
Rješenje problema br. 10.1.



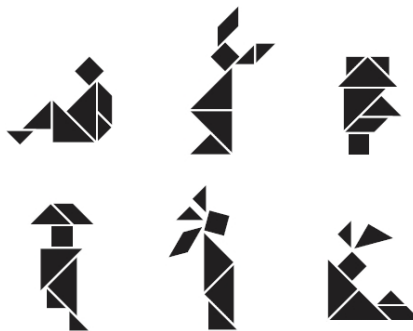
Rješenje problema br. 10.2.



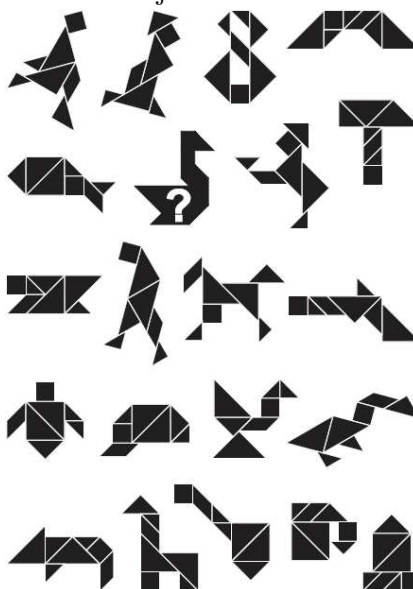
Rješenje problema br. 10.3



Rješenje problema br. 10.4. Metoda slaganja silueta prikazana je na priloženim crtežima (v. sl.).



Rješenje problema br. 10.5. Sve figure prikazane u ranijoj tablici mogu se konstruirati od tangrama (v. sl.), s izuzetkom jedne - labuda.

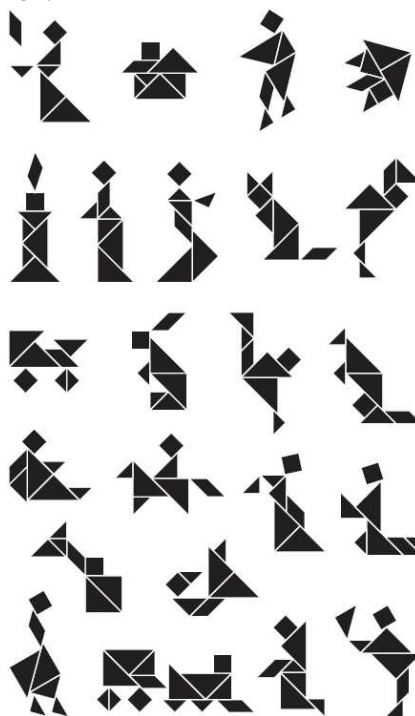


Slika prikazuje kako labud izgleda kada je pravilno konstruiran od tangramskih dijelova.



Rješenje problema br. 10.6. Sve siluete imaju istu površinu jer su sastavljene od istih dijelova. Bez obzira koliko se siluete mogu razlikovati, sve su one sastavljene od istih dijelova izvornog kvadrata i, naravno, jednake površine.

Rješenje problema br. 10.7.



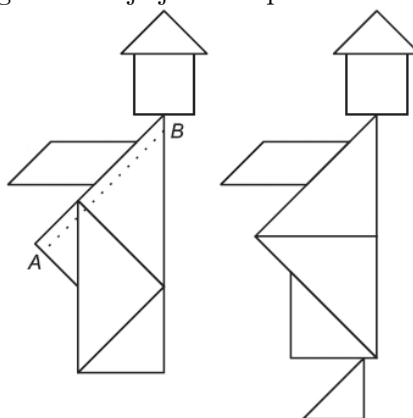
Rješenje problema br. 10.8. Površina svakog velikog trokuta iznosi $1/4$ površine kvadrata; srednji trokut je upola manji i stoga $1/8$ kvadrata.

Svaki od malih trokuta je upola manji od srednjeg trokuta, te je stoga površina svakog od njih $1/16$ površine kvadrata.

Paralelogram i kvadrat mogu se formirati od dva mala trokuta; stoga je svaka od ovih figura $1/8$ površine izvornog kvadrata.

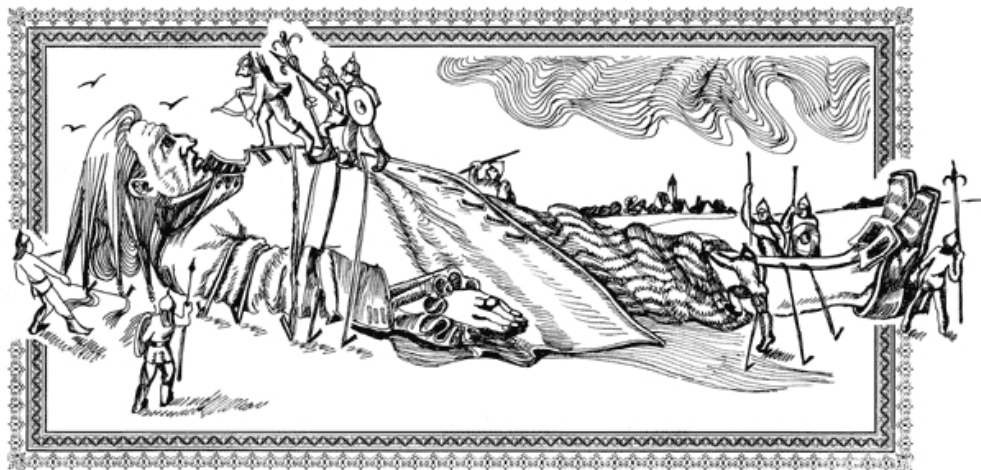
Rješenje problema br. 10.9. Priloženi crtež prikazuje kako su obje figure konstruirane.

Prva figura, bez noge, nešto je šira od druge - točnije, za širinu uske trake koju omeđuje linija AB . Površina te "noge" točno je jednaka površini te dodatne trake.



Rješenje problema br. 10.10. Jedan od dva kvadrata tvore dva velika trokuta. Nakon što se to napravi, lako je oblikovati drugi kvadrat od preostalih pet tangrama.

11. Problemi iz Guliverovih putovanja



Najnevjerovatnije stranice u Guliverovim Putovanjima u mnoge daleke zemlje nesumnjivo su one koje opisuju njegove izvanredne avanture u zemlji sićušnih Liliputanaca i u zemlji Brobdinjaga, divova.

U zemlji Liliputanaca, dimenzije - visina, širina, debljina - svih ljudi, životinja, biljaka i stvari bile su 12 puta manje od naših.

U zemlji divova, naprotiv, bile su 12 puta veće.

Zašto je autor Putovanja odabrao broj 12 lako je razumjeti ako se sjetimo da je to upravo omjer stope i inča (autor Putovanja je Englez). 12 puta manje, 12 puta veće - naizgled ne baš značajno smanjenje ili povećanje.

Međutim, razlika između prirode i života u ovim fantastičnim zemljama i onima na koje smo navikli pokazala se zapanjujućom.

Često je ta razlika toliko zbunjujuća u svojoj neočekivanosti da pruža materijal za zagonetku.

Ovdje bismo željeli ponuditi desetak takvih zagonetki našim čitateljima.

11.1. Guliverov obrok i večera

Liliputanci, čitamo u "Putovanjima", utvrdili su sljedeći obrok hrane za Gulivera:

"Dobit će dnevni obrok hrane i pića, dovoljan za prehranu 1724 podanika zemlje Liliput."

"Tristo kuhara", prepričava Guliver drugdje, "pripremalo mi je obroke. Oko moje kuće bile su kolibe u kojima se kuhalo i gdje su živjeli kuhari i njihove obitelji. Kad bi došlo vrijeme večere, uzeo bih 20 slugu i postavio ih na stol, dok je 100 ljudi posluživalo s poda: neki su posluživali hranu, ostali su donosili bačve vina i drugih pića na motkama prebačenim s ramena na rame.

Oni koji su stajali na stolu podizali su sve to po potrebi, koristeći užad i koloture."

Možete li objasniti kako su Liliputanci dobivali tako ogromne obroke?

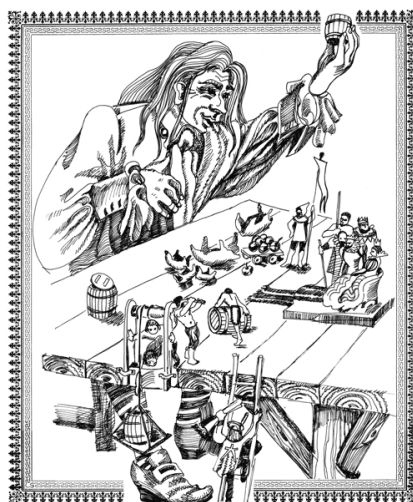
I zašto je bilo potrebno toliko puno slugu da se nahrani jedan čovjek?

Uostalom, on je samo dvanaest puta viši od Liliputanaca.

Jesu li takvi obroci i apetiti u skladu s relativnom veličinom Gullivera i Liliputanaca?

11.2. Bačva i kanta Liliputanaca

”Nakon što sam se najeo”, nastavlja Guliver, opisujući svoj boravak u zemlji Liliputanaca, ”davao sam znakove da sam žedan. Liliputanci su, s velikom spretnošću, podigli bačvu vina, najveću takvu bačvu, uz pomoć užadi do razine mog tijela, dokotrljali je do moje ruke i skinuli poklopac. Popio sam je u jednom gutljaju. Dokotrljali su mi drugu bačvu. Ispraznio sam je u jednom gutljaju, baš kao i prvu, i tražio još - ali nisu imali više.”



Slika: Guliverov ručak u zemlji Liliputanaca

Na drugom mjestu Guliver opisuje kante Liliputanaca kao ”ne veće od našeg velikog naprstka”.

Mogu li takve sitne bačve i kante postojati u zemlji u kojoj su svi predmeti samo dvanaest puta manji od normalnih?

11.3. Životinje Liliputa

”Petsto najvećih konja poslano je da me odnesu u glavni grad”, kaže Guliver o Liliputanskoj zemlji.

Ne mislite li da je 500 konja previše za tu svrhu, čak i uzimajući u obzir relativnu veličinu Gulivera i Liliputanskih konja?

Što se tiče krava, bikova i ovaca Liliputanaca, Guliver kaže nešto ništa manje zapanjujuće: kada je otišao, jednostavno ih je ”stavio u džep”.

Je li to moguće?

11.4. Tvrdi krevet

U Guliverovim putovanjima čitamo sljedeće o tome kako su Liliputanci pripremili krevet za svog divovskog gosta:

”Šest stotina madraca običnih liliputanskih dimenzija dovezeno je kolima u moje odaje, gdje su krojači krenuli s radom. Od sto pedeset madraca, sašivenih zajedno, sašiven je jedan na koji sam lako mogao stati i po duljini i po širini.

Četiri takva madraca postavljena su jedan na drugi - ali čak i na ovom krevetu bilo mi je teško spavati kao na kamenom podu.”

Zašto je Guliver smatrao ovaj krevet tako tvrdim?

I je li cijeli izračun točan?

11.5. Tri stotine krojača

”Tristo liliputanskih krojača dodijeljeno mi je sa zadatkom da mi sašiju komplet odjeće prema lokalnim uzorcima.”

Je li takva vojska krojača zaista potrebna za izradu jednog odijela za muškarca koji je samo 12 puta viši?

11.6. Guliverov brod

Guliver je napustio zemlju Liliputanaca na brodu koji se slučajno nasukao na obalu.

Liliputancima se ovaj brod činio kao monstruozno plovilo, daleko veće od najvećih brodova u njihovoj floti.

Možete li izračunati koliko je otprilike tona istisnine u liliputanskim mjerama imao ovaj brod¹?

11.7. Divovske jabuke i orasi

Čitamo u Guliverovim Putovanjima k Brobdinhagima (divovima), ”jedan dvorski patuljak ušao je s nama u vrt.

Iskoristivši povoljan trenutak dok sam se našao u šetnji pod jednim od stabala, zgrabio je granu i protresao je iznad moje glave. Pljusak jabuka, svaka veličine dobre bačve, bučno je pljuštao; jedna me udarila u leđa i srušila ...”

”Drugi put, neki nestašni školarac bacio je orah ravno u moju glavu i za dlaku promašio - a orah je bačen takvom silinom da bi mi neizbježno zdrobio lubanju, budući da je bio samo malo manji od naše male bundeve.”

Koliko mislite da su jabuka i orah iz zemlje divova mogli težiti?

¹Istisnina broda jednaka je najvećem teretu koji može podići (uključujući masu samog plovila). Tona je otprilike 62,5 funti.



Slika: Jabuke zemlje divova

11.8. Divov prsten

Među predmetima koje je Guliver donio iz zemlje divova, kaže, bio je "zlatni prsten koji mi je sama kraljica dala, ljubazno ga skinuvši s malog prsta i bacivši mi ga preko glave i oko vrata poput ogrlice."

Je li moguće da bi čak i prsten s malog prsta kraljice bio dovoljno velik da Guliveru posluži kao ogrlica?

I koliko bi, otprilike, takav prsten težio?

11.9. Knjige divova

Guliver daje sljedeće detalje o knjigama u zemlji divova:

"Smio sam posuđivati knjige iz knjižnice za čitanje, ali da bih ih čitao, morala se izraditi cijela naprava.

Stolar mi je napravio drvene ljestve koje sam mogao nositi s mjesta na mjesto. Bile su visoke 7,5 metara, a svaka stepenica dugačka 15 metara.

Kad sam izrazio želju za čitanjem, moje su ljestve postavljene oko 3 metra od zida, sa stepenicama okrenutim prema njemu, a otvorena knjiga postavljena je na pod, naslonjena na zid.

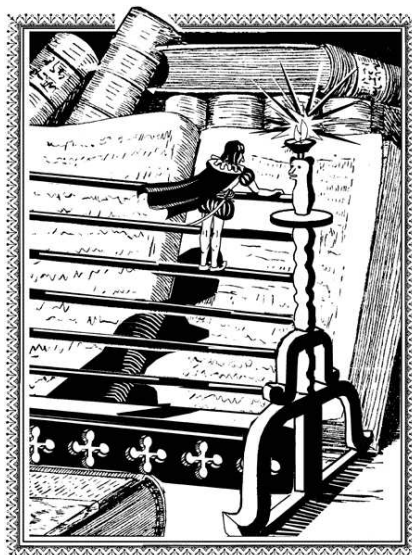
Popeo sam se na gornju stepenicu i počeo čitati od gornjeg retka, krećući se s lijeva na desno i natrag 8 ili 10 koraka, ovisno o duljini redaka.

Kako je čitanje napredovalo i retci su padali sve niže i niže u razinu mojih očiju, postupno sam se spuštao na drugu stepenicu, zatim na treću i tako dalje.

Nakon što sam pročitao do kraja stranice, ponovno sam ustao i na isti način započeo novu stranicu.

Okretao sam stranice objema rukama, što nije bilo teško, budući da papir na kojem tiskaju svoje knjige nije deblji od našeg kartona, a njihovi najveći listovi nisu dulji od 18 ili 20 stopa."

Je li sve to proporcionalno?



Slika: Guliver čita knjigu u zemlji divova

11.10. Ogrlice divova

Zaključno, pogledajmo problem ove vrste, ali preuzet izravno iz Guliverovih avantura.

Možda niste znali da broj ogrlice jednostavno označava njezin opseg u centimetrima.

Ako je opseg vašeg vrata 36 centimetara, tada će vam odgovarati samo ogrlica broj 36; ogrlica s manjim brojem bit će preuska, a ogrlica s većim brojem bit će preširoka.

Prosječni opseg vrata odrasle osobe je oko 40 centimetara.

Ako bi Guliver želio naručiti pošiljku ogrlica iz Londona za stanovnike zemlje divova, koji bi broj naručio?

11.11. Rješenja zadataka od 11.1. - 11.10.

Rješenje problema br. 11.1. Izračun je bio apsolutno točan, osim male aritmetičke pogreške.

Važno je zapamtiti da su Liliputanci bili točne, iako smanjene, slike običnih ljudi, s normalnim tjelesnim proporcijama.

Posljedično, nisu bili samo 12 puta niži, već i 12 puta uži i 12 puta mršaviji od Gulivera. Njihov je tjelesni volumen stoga bio $12^3 = 1728$ puta manji od Guliverova. I, naravno, za održavanje takvog tijela bilo je potrebno odgovarajuće manje hrane. Zato su Liliputanci izračunali da Guliveru treba obroka dovoljna za prehranu 1728 Liliputanaca (Swift je pogrešno naveo 1724).

Sada je jasno zašto je bilo potrebno toliko kuhara.

Za pripremu 1728 večera bilo bi potrebno najmanje 300 kuhara, pod pretpostavkom da jedan liliputanski kuhar može skuhati pola tuceta liliputanskih večera.

Sukladno tome, bio bi potreban i velik broj ljudi da se takav teret podigne do visine Guliverovog stola, koji je, kako se lako može izračunati, bio visok kao trokatna liliputanska kuća.

Rješenje problema br. 11.2. Bačve i kante Liliputanaca, ako bi imale isti oblik kao naše, nisu samo 12 puta manje visine od naših, već i 12 puta manje širine i debljine, te posljedično, njihov volumen je $12 \cdot 12 \cdot 12 = 1728$ puta manji.

Stoga, pretpostavljajući da naša kanta sadrži 60 čaša, lako možemo izračunati da je kanta Liliputanaca primila samo $60/1728$, ili, zaokruženo, $1/30$ čaše.

To je nešto više od čajne žličice i, doista, ne prelazi kapacitet velikog naprstka.

Ako je kapacitet kante Liliputanaca gotovo jednak čajnoj žličici, tada kapacitet vinske bačve, čak i da sadrži 10 kanti, ne bi prelazio $1/3$ čaše.

Je li čudo da Guliver nije mogao ugasiti žeđ čak ni s dvije takve bačve!

Rješenje problema br. 11.3. Već smo u prvom problemu izračunali da je Guliverov tjelesni volumen bio 1728 puta veći od Liliputanaca.

Naravno, bio je i toliko puta teži.

Prijevoz njegovog tijela konjem bio je jednako težak za Liliputance kao i prijevoz 1728 Liliputanaca. To objašnjava zašto je toliko konja moralo biti upregnuto u Guliverovu kočiju.

Životinje Liliputanaca također su bile 1728 puta manjeg volumena i stoga isto toliko puta lakše od naših.

Naša krava je visoka dva aršina² i teška 50 pud³. Krava Liliputanaca bila je manje od tri inča visoka i težila je $50/1728$ pud, ili nešto više od jedne funte.

Naravno, takva igračka krava mogla bi stati u džep, ako bi se željelo.

”Njihovi najveći konji i volovi”, prepričava Guliver prilično uvjerljivo, ”nisu bili viši od deset ili pet centimetara, njihove ovce oko centimetar i pol, njihove guske veličine naših vrabaca i tako dalje do najmanjih životinja. Njihove manje životinje bile su gotovo nevidljive mojim očima.

Vidio sam kuhara kako čupa ševu veličine naše obične muhe, ako ne i manju; drugi put sam vidio mladu djevojku kako uvlači nevidljivu nit u nevidljivu iglu.”

Rješenje problema br. 11.4. Izračun je sasvim točan.

Ako je liliputanski madrac bio 12 puta kraći i, naravno, 12 puta uži od madraca standardne veličine, tada je njegova površina bila $12 \cdot 12$ puta manja od površine našeg madraca.

Da bi legao, Guliveru je stoga trebalo 144 (okruglim brojem, 150) liliputanskih madraca. Ali takav je madrac bio vrlo tanak - 12 puta tanji od našeg.

Sada je jasno da čak ni četiri sloja takvih madraca ne bi pružila dovoljno mekan krevet: dobiveni madrac bio je tri puta tanji od našeg.

Rješenje problema br. 11.5. Guliverova tjelesna površina nije bila 12 puta veća od površine Liliputanaca, već $12 \cdot 12$, odnosno 144 puta. To postaje jasno ako zamislimo da svaki kvadratni centimetar tjelesne površine Liliputanca odgovara kvadratnom metru Guliverove tjelesne površine, a u kvadratnom metru ima 144 kvadratna inča.

Stoga bi Guliverovo odijelo zahtijevalo 144 puta više tkanine nego liliputansko odijelo, a time i odgovarajuće više radnog vremena.

²Aršin je stara mjerna jedinica za duljinu (poznata i kao turski lakat) koja iznosi između 65 i 75 centimetara, dok u prenesenom značenju označava mjeru, mjerilo ili kriterij za prosuđivanje.

³Pud najčešće označava staru rusku mjernu jedinicu za masu koja iznosi približno 16,38 kg (40 ruskih funti), ili se koristi kao skraćenica u medicini i ugostiteljstvu.

Ako jedan krojač može sašiti odijelo za dva dana, onda bi za šivanje 144 odijela (ili jednog Guliverovog odijela) u jednom danu bilo potrebno točno 300 krojača.

Rješenje problema br. 11.6. Guliverov brod mogao je podići 20 puda (60 funti); stoga je njegova istisnina $20/60 = 1/3$ tone.

Tona je težina kubnog metra vode; stoga je brod istisnuo $1/3$ kubnog metra.

Ali sve liliputanske linearne mjere su 12 puta manje od naših, dok su kubne mjere 1728 puta manje.

Lako je vidjeti da je $1/3$ našeg kubnog metra sadržavalo oko 576 kubnih metara liliputanske zemlje, a da je Guliverov brod imao istisninu od 575 tona (ili blizu toga, budući da je početni broj, 20 puda, proizvoljan).

Ovih dana, kada brodovi teški desetke tisuća tona plove oceanima, brod ove veličine ne bi nikoga iznenadio - ali vrijedi imati na umu da su u vrijeme kada su napisana Guliverova putovanja (početkom 18. stoljeća), brodovi od 500-600 tona bili rijetki.

Rješenje problema br. 11.7. Lako je izračunati da bi jabuka, koja u našoj zemlji teži oko četvrtine funte, u zemlji divova težila, proporcionalno svom volumenu, 1728 puta više, tj. 432 funte ili gotovo 11 puda! Takva jabuka, udarivši čovjeka u leđa, teško bi ga ostavila na životu, pa je Guliver prelakio izbjegao prijetnju da ga zgnječi jabuka od 11 puda.

Orah u zemlji divova težio bi 8-9 funti, pod pretpostavkom da naš orah teži oko $1/2$ zlatnika; promjer divovskog oraha mogao je biti oko 4 inča.

Čvrsti predmet težak osam funti, bačen brzinom oraha, naravno bi neizbježno zgnječio glavu čovjeka normalne veličine.

I kada na drugom mjestu Guliver prepričava da ga je obična tuča u zemlji divova trenutno oborila na tlo i da ga je tuča "brutalno udarala po leđima, bokovima i po cijelom tijelu, poput velikih drvenih kugli, kakve se koriste za igranje kroketa", to je sasvim vjerojatno, jer svaka tuča u zemlji divova mora težiti barem nekoliko funti.

Rješenje problema br. 11.8. Promjer malog ljudskog prsta normalne veličine iznosi oko $1\frac{1}{2}$ centimetra. Množenjem s 12 dobivamo promjer prstena kraljice od $1\frac{1}{2} \cdot 12 = 18$ centimetara; prsten ovog promjera ima opseg od $18 \cdot 3\frac{1}{7} =$ oko 56 centimetara. To je taman prava veličina da kroz njega stane glava normalne veličine (što se lako može provjeriti mjerenjem opsega glave u najširem dijelu komadom konca).

Što se tiče težine takvog prstena, ako običan prsten teži, recimo, jedan zlatnik, prsten istog dizajna iz zemlje divova težio bi 1728 zlatnika, ili nešto manje od pola puda.

Rješenje problema br. 11.9, Ako uzmemo u obzir dimenzije moderne knjige standardnog formata (25 centimetara duljine i 12 centimetara širine), Guliverov opis djeluje pomalo pretjerano.

Za čitanje knjige manje od 3 metra visine i 1,5 metara širine, može se bez ljestava i nema potrebe hodati 8-10 koraka udesno i lijevo.

Ali u Swiftovo vrijeme, početkom 18. stoljeća, standardni format knjiga (folija) bio je mnogo veći nego danas. Primjerice, format "Aritmetike" Magnickog, objavljen za vrijeme vladavine Petra Velikog, mjerio je oko 30 centimetara visine i 20 centimetara širine.

Povećavanjem toga za faktor 12, dobivamo impresivnije dimenzije za divovske knjige: 360 centimetara (gotovo 4 metra) visine i 240 centimetara širine (2,5 metra).

Čitanje knjige dugačke četiri metra bez ljestava je nemoguće;

Ali čak ni ovdje, prelazak s jednog retka na drugi ne bi zahtijevao 8-10 koraka, pa je Swiftov posljednji detalj nesumnjivo pretjerivanje.

Takav svezak težio bi 1728 puta više od našeg, tj. 70-80 puda.

Uz pretpostavku 500 listova, svaki list knjige divova teži oko 11-13 funti. Okretanje takvih stranica, naravno, nije teško. Slova u knjigama divova bila su visoka oko 2-3 cm; čitanje tako velikog tiska s udaljenosti od 10 stopa, kao što je to činio Guliver, vrlo je ugodno.

Rješenje problema br. 11.10. Opseg vrata divova bio je veći od opsega vrata normalne osobe za isti broj puta koliko je njegov promjer bio veći, tj. 12 puta.

I dok normalnoj osobi treba br.40, divu bi trebalo br. $40 \cdot 12 = 480$.

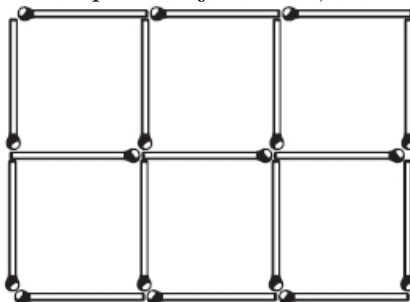


12. Problemi sa žigicama

12.1. Tri od šest

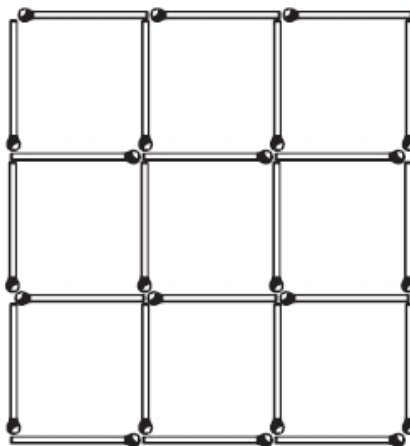
Pred vama (v. sl.) je figura sastavljena od 17 žigica. U njoj vidite šest identičnih kvadrata.

Zadatak je ukloniti pet žigica bez pomicanja ostalih, tako da ostanu samo tri kvadrata.



12.2. Ostavite pet kvadrata

U mreži žigica prikazanoj na slici, morate ukloniti četiri žigice - bez dodirivanja ostalih - tako da ostane pet kvadrata.



12.3. Ostavite četiri kvadrata

Iz iste prethodne slike (v. sl.) uklonite 8 žigica, bez pomicanja ostalih, tako da preostale žigice tvore 4 identična kvadrata.

12.4. Ostavite tri kvadrata

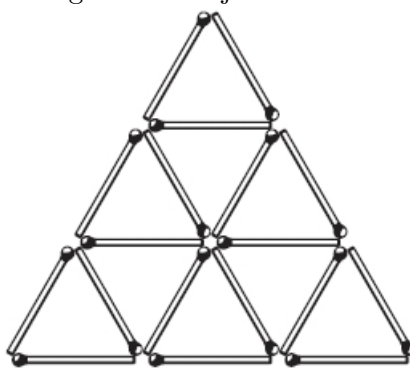
Na istoj slici (v. sl. prethodnu) uklonite 6 žigica - bez pomicanja ostatka - tako da ostanu samo 3 kvadrata.

12.5. Ostavite dva kvadrata

I na kraju, na istoj prethodnoj slici (v. sl.) uklonite 8 žigica, bez dodirivanja ostatka, tako da ostanu samo dva kvadrata.

12.6. Šest četverokuta

Na slici sa žigicama prikazanoj ovdje, potrebno je premjestiti 6 žigica s jednog mjesta na drugo kako bi se oblikovala figura sastavljena od 6 identičnih četverokuta.



12.7. Dvanaest žigica

Od dvanaest žigica oblikujte figuru koja sadrži tri identična četverokuta i dva identična trokuta.

Kako to učiniti?

12.8. Osamnaest žigica

Od 18 žigica morate oblikovati dva četverokuta tako da površina jednog bude tri puta veća od površine drugog.

Kao i u svim prethodnim problemima, žigice ne smiju biti slomljene. Oba četverokuta moraju biti odvojena, ne jedan uz drugi.

12.9. Dva peterokuta

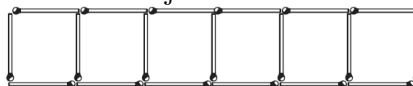
Ako ste uspjeli riješiti prethodni zadatak, pokušajte riješiti ovu zagonetku:

Koristeći 18 žigica, oblikujte dva peterokuta tako da površina jednog bude točno tri puta veća od površine drugog.

Ostali uvjeti su isti kao u prethodnom zadatku.

12.10. Od 19 do 12

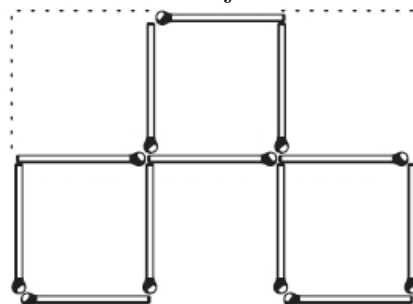
Na slici vidite kako se šest identičnih dijelova može oblikovati od 19 cijelih žigica.



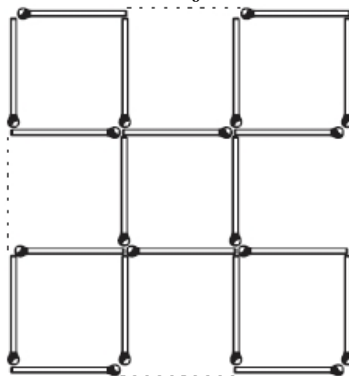
Je li moguće oblikovati šest identičnih dijelova, čak i ako su različitog oblika, s 12 cijelih žigica?

12.11. Rješenja zadatka od 12.1. - 12.10.

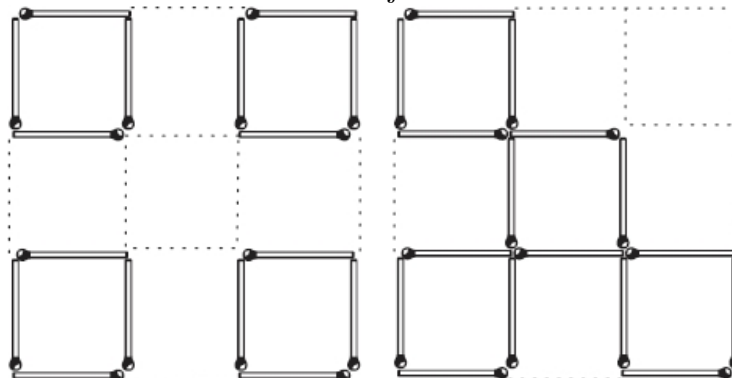
Rješenje problema br. 12.1. Može se vidjeti na crtežu.



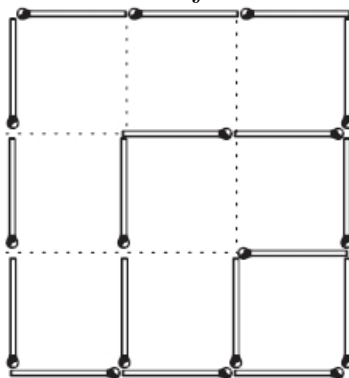
Rješenja problema br. 12.2. Može se vidjeti na crtežu.



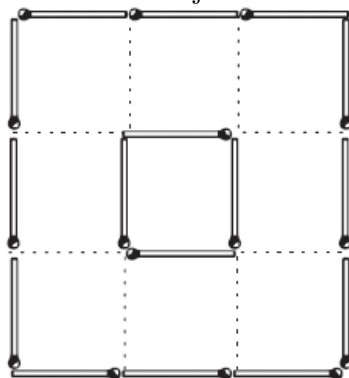
Rješenja problema br. 12.3. Može se vidjeti na crtežima.



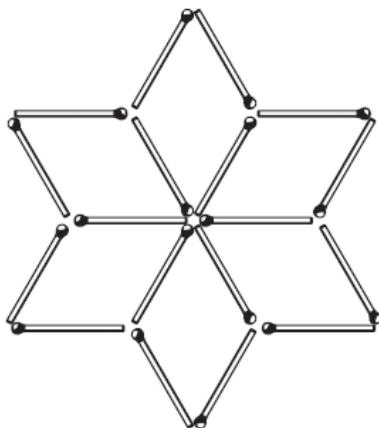
Rješenja problema br. 12.4. Može se vidjeti na crtežu.



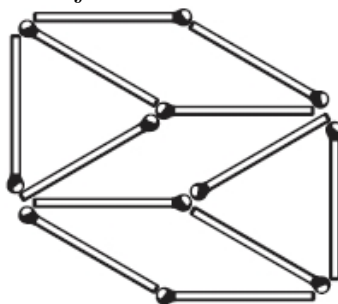
Rješenja problema br. 12.5. Može se vidjeti na crtežu.



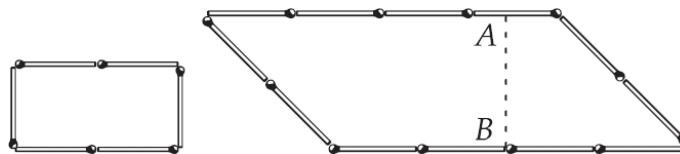
Rješenje problema br. 12.6.



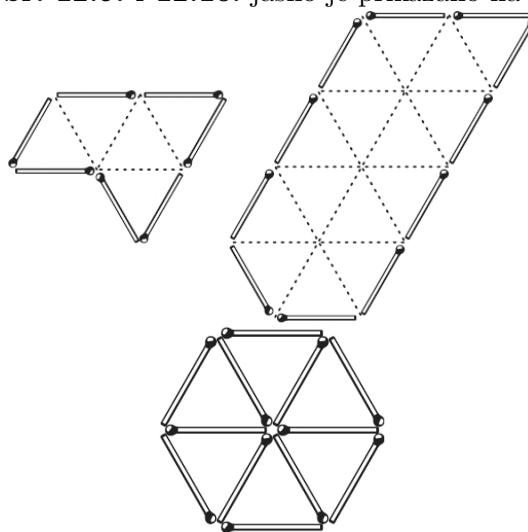
Rješenje problema br. 12.7. prikazano je na slici. To je jednakostranični šesterokut, ali nije pravilan jer mu kutovi nisu jednaki.



Rješenje zadatka br. 12.8. prikazano je na slici. Površina lijeve figure čini dva kvadrata, svaki sa stranicama duljine jedne žigice. Desni četverokut je paralelogram čija je visina $AB = 1 \frac{1}{2}$ duljine žigice. Njegova površina, prema pravilima geometrije, jednaka je njegovoj osnovici pomnoženoj s visinom: $4 \cdot 1 \frac{1}{2} = 6$ - tj. tri puta veća od površine lijevog četverokuta.



Rješenje problema br. 12.9. i 12.10. jasno je prikazano na priloženim crtežima.



13. Težina i vaganje

13.1. Težina trupca

Okrugli trupac ima masu trideset kilograma. Koliko bi težio da je dva puta deblji, a upola kraći?

13.2. Decimalna vaga

Sto kilograma željeznih čavala uravnoteženo je na decimalnoj vagi¹ željeznim utezima.

Vaga je uronjena u vodu.

Hoće li vaga biti uravnotežena i pod vodom?

13.3. Težina boce

Boca napunjena kerozinom ima masu 1000 grama.

Ista boca napunjena kiselinom ima masu 1600 grama.

Kiselina je dvostruko teža od kerozina.

Kolika je masa boce?

13.4. Sapun

Na jednu tavu vage stavlja se sapun, na drugu tri četvrtine istog sapuna i još tri četvrtine kilograma. Vaga je uravnotežena.



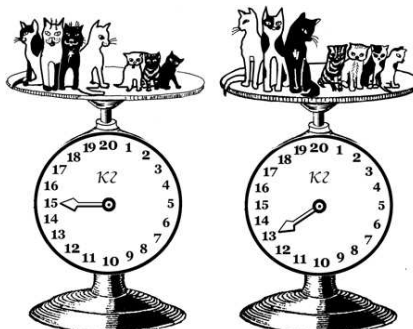
Koliko teži cijeli sapun?

Pokušajte riješiti ovaj jednostavan problem mentalno, bez olovke ili papira.

¹Decimalna vaga ima jasno označene jedinice i podjele.

13.5. Mačke i mačići

Na slici vidite da 4 mačke i 3 mačića teže 15 kilograma, a 3 mačke i 4 mačića teže 13 kilograma.



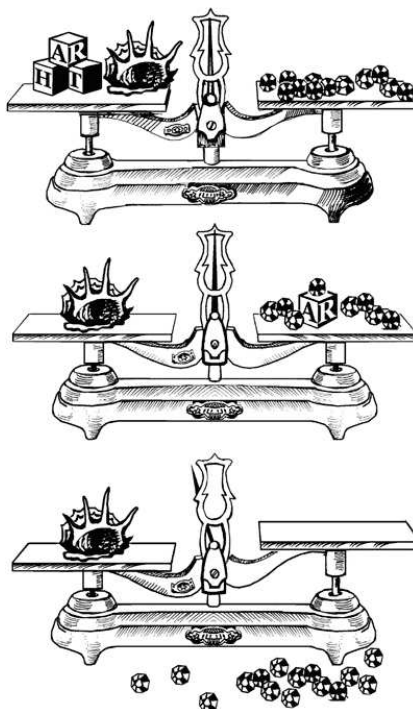
Koliko teže svaka mačka i svaki mačić zasebno?

Pokušajte riješiti ovaj zadatak i usmeno.

13.6. Školjka i perle

Slika pokazuje da su 3 dječje kocke i 1 školjka uravnotežene s 12 perli, te da je, nadalje, 1 školjka uravnotežena s 1 kockom i 8 perli.

Koliko perli treba staviti na praznu ploču vage da bi se školjka uravnotežila na drugoj ploči?

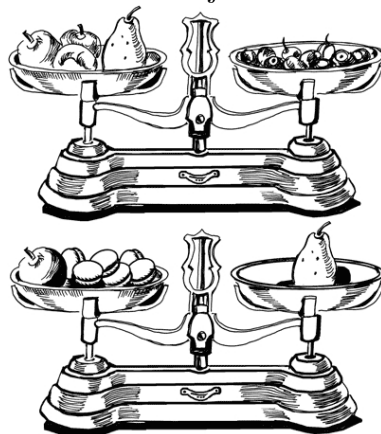


13.7. Težina voća

Evo još jednog problema u istom duhu.

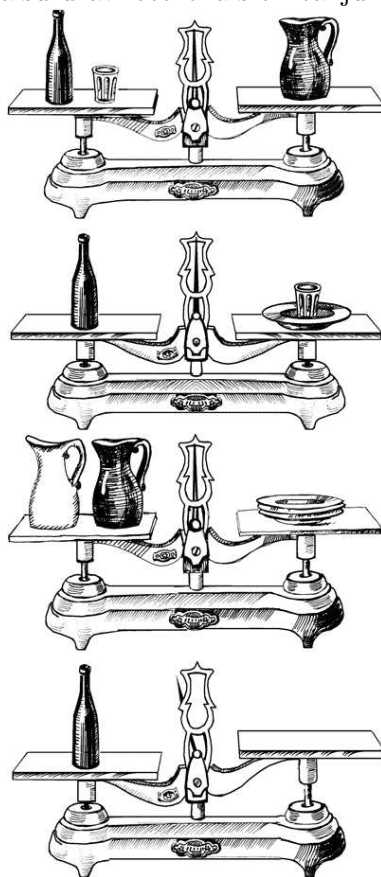
Slika pokazuje da 3 jabuke i 1 kruška teže koliko i 10 breskvi, a 6 breskvi i 1 jabuka teže koliko i 1 kruška.

Koliko je breskvi potrebno da se uravnoteži jedna kruška?



13.8. Koliko čaša?

Na slikama vidite da su boca i čaša uravnotežene vrčem; sama boca je uravnotežena čašom i tanjurićem; dva vrča su uravnotežena s tri tanjurića.



Koliko čaša treba staviti na praznu tavu vage da bi se boca uravnotežila?

13.9. S čekićem i utegom

Izvažite 2 kilograma kristalnog šećera u vrećice od 200 grama.

Imate samo jedan uteg od 500 grama i čekić mase 900 grama.



Kako možete dobiti svih 10 vrećica koristeći ovaj uteg i čekić?

13.10. Arhimedov problem

Najstarija zagonetka koja uključuje vaganje nesumnjivo je ona koju je drevni vladar Sirakuze, Hijeron, postavio slavnom matematičaru Arhimedu.

Predaja kaže da je Hijeron naručio od majstora da izradi krunu za kip i naredio mu da osigura potrebnu količinu zlata i srebra.

Kada je kruna isporučena, vaganje je pokazalo da teži isto kao i ukupna težina isporučenog zlata i srebra.

Međutim, vladar je obaviješten da je majstor sakrio dio zlata, zamijenivši ga srebrom.

Hijeron je pozvao Arhimeda i tražio ga da utvrdi koliko zlata i koliko srebra sadrži kruna.

Arhimed je riješio ovaj problem na temelju činjenice da čisto zlato gubi $1/20$ svoje težine u vodi, a srebro $1/10$.

Ako se želite okušati u ovom zadatku, pretpostavimo da je majstor dobio 8 kilograma zlata i 2 kilograma srebra te da kada je Arhimed vagao krunu pod vodom, ona nije težila 10 kilograma, već samo $9 \frac{1}{4}$ kilograma.

Pokušajte iz ovih podataka utvrditi koliko je zlata majstor sakrio.

Pretpostavlja se da je kruna izrađena od punog metala, bez ikakvih šupljina.

13.11. Rješenja zadataka od 13.1. - 13.10.

Rješenje problema br. 13.1. Uobičajeni odgovor je da trupac udvostručen u debljini, ali skraćen za pola, ne bi trebao promijeniti svoju masu.

Međutim, to je netočno.

Udvostručenje promjera učetverostručuje volumen okruglog trupca; međutim, prepolovljenje njegove duljine samo prepolovljuje volumen.

Stoga bi debeli, kratki trupac trebao biti dvostruko teži od dugog, tankog trupca, tj. težiti 60 kilograma.

Rješenje problema br. 13.2. Kada se uroni u vodu, čvrsti željezni predmet gubi $1/8$ svoje težine².

Stoga će utezi pod vodom biti $7/8$ svoje izvorne težine, a čavli će također biti $7/8$ svoje izvorne težine.

A budući da su utezi bili 10 puta lakši od čavala, bit će i 10 puta lakši pod vodom.

Posljedično, decimalna vaga ostat će u ravnoteži čak i pod vodom.

Rješenje problema br. 13.3. Iz opisa problema znamo da je, prvo, težina boce + težina kerozina = 1000 grama.

Drugo, budući da je kiselina dvostruko teža od kerozina, znamo da je težina boce + dvostruka težina kerozina = 1600 grama.

Iz ovoga je jasno da je razlika u težini od 1600 - 1000, tj. 600 grama, težina kerozina u volumenu boce.

Ali boca i kerozin zajedno teže 1000 grama; stoga boca teži $1000 - 600 = 400$ grama.

Doista, težina kiseline ($1600 - 400 = 1200$ grama) dvostruko je veća od težine kerozina.

Rješenje problema br. 13.4. $3/4$ komada sapuna + $3/4$ kilograma teži isto kao i cijeli komad sapuna.

Ali cijeli komad sapuna sadrži $3/4$ komada + $1/4$ komada.

Stoga $1/4$ komada teži $3/4$ kilograma.

Posljedično, cijeli komad teži četiri puta više od $3/4$ kilograma, odnosno 3 kilograma.

Rješenje problema br. 13.5. Uspoređujući oba vaganja, lako je vidjeti da zamjena jedne mačke s jednim mačićem smanjuje težinu tereta za 15 - 13, odnosno 2 kg.

Stoga je mačka 2 kg teža od mačića.

Znajući to, zamijenimo sve četiri mačke mačića tijekom prvog vaganja: tada ćemo imati $4 + 3 = 7$ mačića, a kazaljka će se pokazivati $2 \cdot 4$, odnosno 8 kg manje, umjesto 15 kilograma.

To znači da 7 mačića teži $15 - 8 = 7$ kilograma.

Iz ovoga je jasno da mačić teži 1 kilogram, dok odrasla mačka teži $1 + 2 = 3$ kilograma.

Rješenje problema br. 13.6. Usporedimo prvo i drugo vaganje. Vidite da možemo zamijeniti školjku u prvom vaganju s 1 kockom i 8 perli, jer imaju istu težinu.

Tada bismo imali 4 kocke i 8 perli na lijevoj tavi, a to bi bilo uravnoteženo s 12 perli.

Sada, uklanjanjem 8 perli iz svake tave, ne ćemo poremetiti ravnotežu, ostavljajući nam 4 kocke na lijevoj tavi i 4 perle na desnoj.

Stoga, kocka i perla teže isto.

Sada je jasno koliko perli teži školjka: zamjenom (u drugom vaganju) 1 kocke na desnoj tavi perlom, nalazimo da težina školjke = težina 9 perli.

Naš rezultat je lako provjeriti: tijekom prvog vaganja zamijenite kocke i školjke na lijevoj tavi odgovarajućim brojem perli: dobivate $3 + 9 = 12$, kao što se i očekivalo.

Rješenje problema br. 13.7. Tijekom prvog vaganja, zamijenimo jednu krušku sa šest breskvi i jednom jabukom.

²Nisam uključio ovaj broj u opis problema jer stvarna vrijednost gubitka - osmina, desetina ili dvadesetina - nije relevantna za rješenje.

To možemo učiniti jer kruška teži isto kao šest breskvi i jedna jabuka.

Završit ćemo s četiri jabuke i šest breskvi u lijevoj šalici, a deset breskvi u desnoj šalici. Nakon što iz svake šalice izvadimo šest breskvi, nalazimo da četiri jabuke teže isto kao četiri breskve.

Drugim riječima, jedna breskva teži isto kao jedna jabuka.

Sada je lako vidjeti da je težina kruške jednaka težini sedam breskvi.

Rješenje problema br. 13.8. Ovaj se problem može riješiti na različite načine. Evo jednog načina.

Tijekom trećeg vaganja, zamijenimo svaki vrč s jednom bocom i jednom čašom (iz prvog vaganja vidimo da bi vaga trebala ostati u ravnoteži).

Tada ćemo saznati da su dvije boce i dvije čaše uravnotežene s tri tanjurića.

Na temelju drugog vaganja možemo zamijeniti svaku bocu s jednom čašom i jednim tanjurićem.

Tada ćemo otkriti da su četiri čaše i dva tanjurića uravnoteženi s tri tanjurića.

Uklanjanjem dva tanjurića iz svake posude, saznajemo da su četiri čaše uravnotežene s jednim tanjurićem.

Posljedično, boca je uravnotežena (usp. drugo vaganje) s pet čaša.

Rješenje problema br. 13.9. Postupak vaganja je sljedeći.

Prvo se na jednu posudu stavi čekić, na drugu uteg i dovoljno kristalnog šećera da se posude uravnoteže.

Jasno je da kristalni šećer teži $900 - 500 = 400$ grama.

Ista se operacija ponavlja još tri puta; preostali šećer teži $2000 - (4 \cdot 400) = 400$ grama.

Sada preostaje samo podijeliti svaku od pet dobivenih vrećica od 400 grama na pola, na dvije vrećice jednake težine.

To se radi vrlo jednostavno bez utega: sadržaj vrećice od 400 grama ulijte u dvije posude postavljene na različite strane dok se vaga ne uravnoteži.

Rješenje problema br. 13.10. Kad bi kruna koju smo naručili bila u cijelosti izrađena od čistog zlata, težila bi 10 kg izvan vode, a pod vodom bi izgubila 20-ti dio te težine, odnosno pola kilograma.

Međutim, u stvarnosti znamo da kruna ne gubi $1/2$ kg, već $10 - 9 \frac{1}{4} = 3/4$ kg.

To je zato što sadrži srebro, metal koji u vodi ne gubi 20-ti dio, već 10-ti dio svoje težine.

Sadržaj srebra u kruni trebao bi biti takav da ne gubi $1/2$ kg, već $3/4$ kg - $1/4$ kg više.

Ako mentalno zamijenimo 1 kg zlata u našoj kruni od čistog zlata srebrom, kruna će u vodi izgubiti više nego prije, za $1/10 - 1/20 = 1/20$ kg.

Stoga, da bi se postiglo potrebno povećanje gubitka težine od $1/4$ kg, potrebno je zamijeniti srebrom onoliko kilograma zlata koliko $1/20$ kg sadrži $1/4$ kg; ali $1/4 : 1/20 = 5$.

Dakle, kruna je sadržavala 5 kg srebra i 5 kg zlata, umjesto izdanih 2 kg srebra i 8 kg zlata. Tri kilograma zlata su sakrivena i zamijenjena srebrom.

14. Problemi s kvadratima

14.1. Ribnjak

Na slici je ribnjak oblika četverokuta. (v. sl.).



Četiri stara, raširena hrasta rastu na njegovim kutovima, blizu ruba vode.

Ribnjak treba proširiti tako da mu se površina udvostruči, a zadržati četvrtasti oblik.

Ali stoljetni hrastovi ne smiju se dirati.

Je li moguće proširiti ribnjak na potrebnu veličinu tako da sva četiri hrasta ostanu na svojim izvornim položajima, ne budu potopljena, nego da stoje na obalama novog ribnjaka?

14.2. Laik za parket

Laik za parket, prilikom rezanja kvadrata iz drveta, tesao ih je na sljedeći način: usporedio je duljine njihovih stranica i ako su sve četiri stranice jednake, smatrao je da je kvadrat ispravno izrezan.

Je li ovaj test pouzdan?

14.3. Još jedan parketar laik

Drugi parketar laik provjerio je svoj rad drugačije.

Nije mjerio stranice, već dijagonale odnosno dužine koje spajaju nasuprotne vrhove.

Ako su obje dijagonale bile jednake, laik je smatrao da je kvadrat ispravno izrezan.

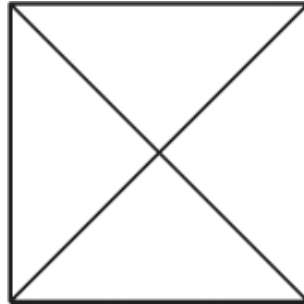
Mislite li i vi tako?

14.4. Treći parketar

Prilikom provjere kvadrata, treći parketar potvrdio je da su sva četiri dijela na koja dijagonale dijele četverokut (v. sl.) jednaka.

Po njegovom mišljenju, to je dokazalo da je izrezani četverokut kvadrat.

Što vi mislite?



14.5. Krojačica

Krojačica treba izrezati komad tkanine u obliku kvadrata.

Nakon rezanja, provjerava svoj rad tako što dijagonalno presavija pravokutni komad i provjerava podudaraju li se stranice.

Ako se podudaraju, zaključuje, tada je izrezani komad savršen kvadrat.

Je li?

14.6. Druga krojačica

Druga krojačica nije se zadovoljila samo provjerom rada svoje prijateljice.

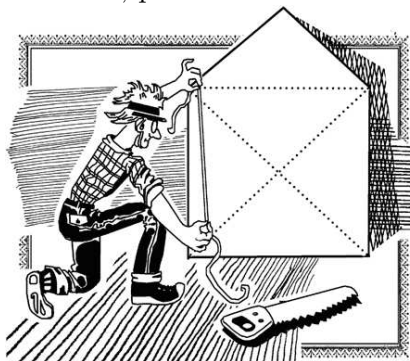
Izrezani pravokutnik prvo je presavila duž jedne dijagonale, a zatim, nakon što je poravnala tkaninu, presavila duž druge dijagonale.

I samo ako su se stranice lika u oba slučaja podudarali, smatrala je da je kvadratni rez ispravno izrezan.

Što mislite o ovom testu?

14.7. Stolarova dilema

Mladi stolar ima peterokutnu dasku, prikazanu na slici.



Možete vidjeti da se sastoji od kvadrata i trokuta dodanog na jednu stranicu, koji je četvrtine veličine kvadrata.

Stolar treba - bez oduzimanja ili dodavanja nekog od dijelova daske složiti kvadrat.

Da bi to učinio, naravno, prvo mora ispiliti komade.

Naš mladi stolar namjerava upravo to učiniti, ali želi podijeliti dasku duž najviše dvije ravne linije.

Je li moguće izrezati našu figuru na komade koristeći dvije ravne linije, tako da definiraju kvadrat?

I ako jest, kako se to može učiniti?

14.8. Cijelo čovječanstvo unutar kvadrata

Trenutno (1924. godine) na cijelom svijetu živi 1 800 milijuna ljudi: 1 800 000 000.

Zamislite da su svi ljudi na svijetu okupljeni u čvrstoj gomili na jednom ravnom mjestu.

Želite ih smjestiti u kvadratnu površinu, računajući jedan četvorni metar za svakih dvadeset ljudi (dvadeset ljudi, čvrsto stisnutih zajedno, moglo bi stati u takav kvadrat).

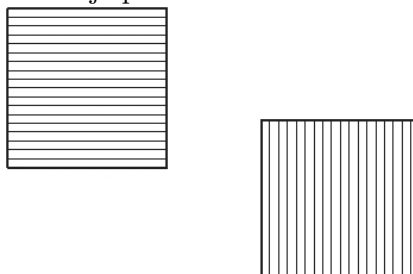
Pokušajte procijeniti okom, bez izračuna, približnu veličinu kvadrata koji bi bio potreban.

Bi li, primjerice, bio dovoljan kvadrat sa stranicom duljine 100 kilometara?

14.9. Sumnjivi kvadrati

Učitelj crtanja zadao je učeniku zadatak da nacрта dva jednaka kvadrata i osjenča ih.

Učenik je zadatak izvršio kao što je prikazano na slici.

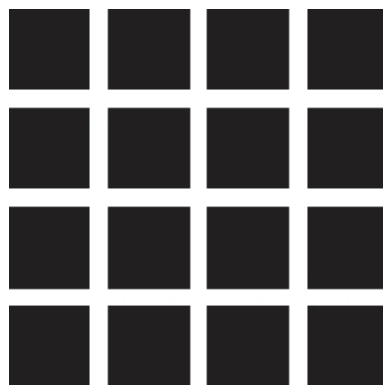


Bio je siguran da su to kvadrati, i to jednaki.

Zašto je tako mislio?

14.10. Tamne mrlje

Drugi je učenik zamoljen da nacрта nekoliko redova crnih kvadrata odvojenih bijelim prugama.



Evo kako je to učinio.

Međutim, možete vidjeti da se blizu kutova kvadrata, gdje se sijeku bijele pruge, nalaze tamne mrlje.

Učenik je inzistirao da ih nije nacrtao.

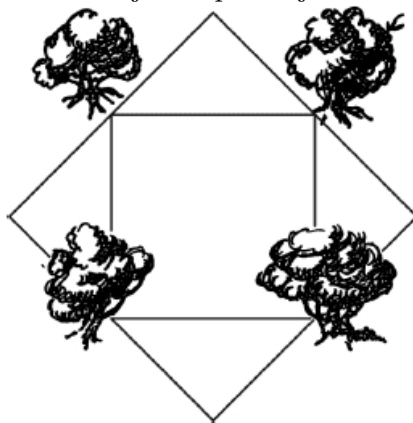
Odakle su se pojavile?

14.11. Rješenja zadataka od 14.1. - 14.10.

Rješenje problema br. 14.1. Udvostručenje površine ribnjaka uz zadržavanje njegovog kvadratnog oblika a da hrastovi ostanu netaknuti.

Novi kvadrat definiramo tako da svaki hrast bude polovište jedne njegove stranice.

Lako je provjeriti da je nova površina dvostruko veća od originalne: jednostavno nacrtajte dijagonale u originalnom ribnjaku i prebrojite rezultirajuće trokute.

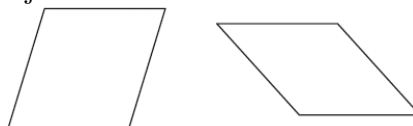


Rješenje problema br. 14.2. Ovaj test nije dovoljan. Četverokut je mogao proći ovaj test čak i bez da je kvadrat.

Primjere takvih četverokuta vidite na slici, gdje su sve stranice jednake, ali kutovi nisu pravi kutovi.

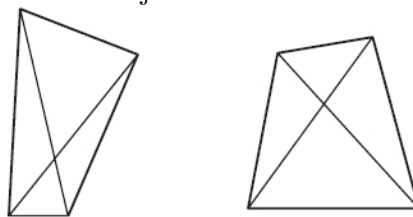
U geometriji se četverokuti s četiri jednake stranice nazivaju rombovi.

Svaki kvadrat je romb, ali nije svaki romb kvadrat.



Rješenje problema br. 14.3. Ovaj test je jednako nepouzdan kao i prvi.

U kvadratu su, naravno, dijagonale jednake, ali nije svaki četverokut s jednakim dijagonalama kvadrat, kao što se može vidjeti na slikama.

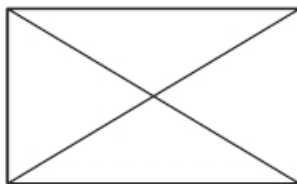


Radnici koji postavljaju parket trebali bi na svakom izrezanom četverokutu provjeriti i stranice i dijagonale; tada bi mogli biti sigurni da je posao obavljen ispravno.

Bilo koji romb s jednakim dijagonalama je svakako kvadrat.

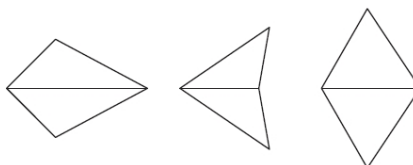
Rješenje problema br. 14.4. Provjera je mogla pokazati samo da testirani četverokut ima prave kutove, tj. da je pravokutnik.

Ali provjera nije mogla potvrditi jesu li mu stranice jednake, kao što se može vidjeti iz crteža.



Rješenje problema br. 14.5. Provjera nije dovoljna. Ovdje je nacrtano nekoliko četverokuta (v.sl.) čiji se rubovi, kada se dijagonalno presaviju, podudaraju.

Ipak, nisu kvadrati.



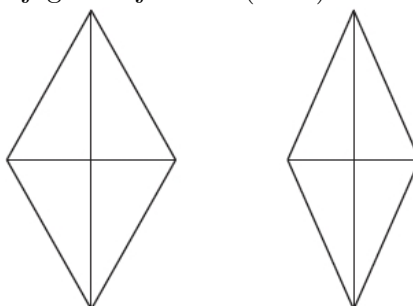
Ova provjera može samo potvrditi da je lik simetričan, ali ništa više.

Rješenje problema br. 14.6. Ovaj test nije bolji od prethodnog.

Možete izrezati bilo koji broj papirnatih četverokuta koji će proći ovaj test, iako uopće nisu kvadrati.

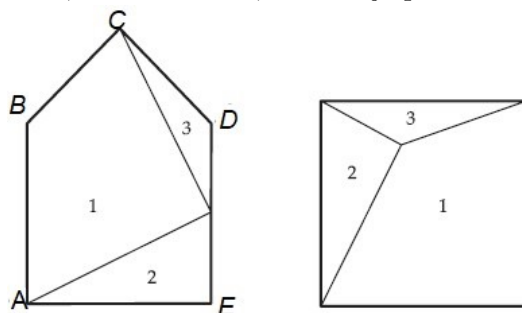
Ovi oblici imaju sve jednake stranice (rombovi su), ali kutovi nisu pravi kutovi - nisu kvadrati.

Da biste doista provjerili je li izrezani komad kvadrat, nakon provjere jednakosti stranica treba provjeriti jesu li mu dijagonale jednake (v. sl.).



Rješenje problema br. 14.7. Jedna linija treba ići od vrha C do polovišta stranice DE , a druga od tog polovišta do vrha A .

Dobivena tri dijela, 1, 2 i 3, tvore kvadrat, kao što je prikazano na crtežu (v. sl.).



Rješenje problema br. 14.8. Stranica kvadrata mora biti deset puta manja od 100 kilometara.

Doista, kvadrat sa stranicom od 10 kilometara (kilometar je gotovo jednak versti) sadrži $10\,000 \cdot 10\,000 = 100\,000\,000$ četvornih metara.

Ako bi 20 ljudi stalo u svaki četvorni metar, tada bi kvadrat zadanih dimenzija primio $100\,000\,000 \cdot 20 = 2\,000\,000\,000$ ljudi, što je više od 1 800 000 000, tj. cijelo stanovništvo svijeta.

Dakle, za smještaj cijelog čovječanstva dovoljan je kvadrat sa stranicom manjom od 10 kilometara.

Rješenje problema br. 14.9. Kvadrati su doista jednaki.

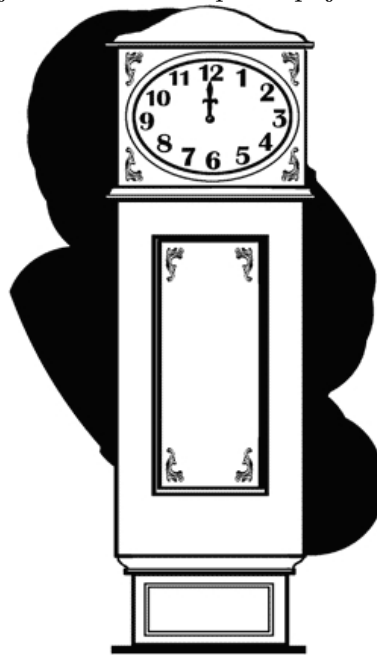
Rješenje problema br. 14.10. Nitko nije stvorio tamne mrlje - one zapravo ne postoje.

Vidimo ih samo kao rezultat optičke iluzije.

15. Problemi sa satovima

15.1. Kada se kazaljke susreću?

U 12 sati velika i mala kazaljka se preklapaju (v. sl.). Ali vjerojatno ste primijetili da to nije jedini put kada se kazaljke sata susreću: preklapaju se nekoliko puta tijekom dana.



Možete li navesti sve slučajeve kada se to događa?

15.2. Kada su kazaljke nasuprotne?

Naprotiv, u 6 sati obje kazaljke pokazuju u suprotnim smjerovima (v. sl.).

Ali je li to samo u 6 sati ili postoje i druga vremena kada su kazaljke postavljene na ovaj način?



15.3. U koje vrijeme?

U koje vrijeme minutna kazaljka je ispred satne kazaljke za isti kut za koji je satna kazaljka ispred broja 12?

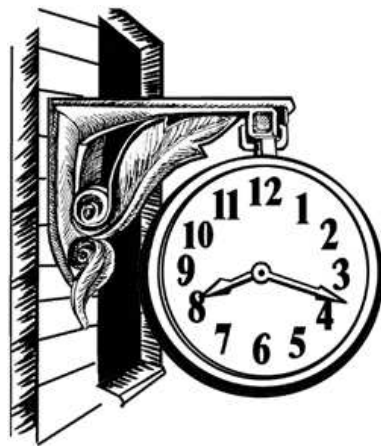
Ili možda postoji nekoliko takvih trenutaka dnevno?

Ili se uopće ne događaju?

15.4. Suprotno

Ako pažljivo promatrate sat, možda ste primijetili kazaljke postavljene u potpuno suprotnom smjeru od onoga što je gore opisano: kazaljka za sate je ispred kazaljke za minute za isti iznos za koji se kazaljka za minute pomaknula od 12. (v. sl.).

U koliko sati je to moguće?



15.5. S obje strane broja šest

Pogledao sam na sat i primijetio da su obje kazaljke bile na istoj udaljenosti od broja šest, s obje njegove strane.

Koliko je to bilo sati?

15.6. Tri i sedam

Sat otkucava tri, i dok otkucava, prolaze tri sekunde.

Koliko vremena treba satu da otkuca sedam?

Za svaki slučaj, upozorit ću vas da ovo nije šala i ne sadrži nikakve skrivene zamke.

15.7. Sat s kompasom

Džepni satovi su sada uobičajeni u inozemstvu, čiji brojčanik nije podijeljen na 12, već na 24 dijela, s oznakama od 1 do 24 sata.

Kazaljka takvog sata napravi puni krug za 24 sata, a ne za 12.

Takav sat može se koristiti kao kompas za vedrih dana.

Kako?

15.8. Na istu temu

Je li moguće, bez kompasa, koristiti naš obični džepni sat za određivanje, barem približno, strana svijeta za vedrog dana?

15.9. Broj šest

Pitajte nekoga starijeg od vas koliko dugo ima džepni sat. Recimo da ga ima već 15 godina.

Nastavite razgovor na ovaj način:

”Koliko puta dnevno pogledate na svoj sat?”

”Vjerojatno dvadesetak puta”, glasit će odgovor.

”To znači da gledate na svoj sat barem 6000 puta godišnje, a tijekom 15 godina vidjeli ste njegov brojčanik od $6000 \cdot 15$, odnosno gotovo sto tisuća puta.

Naravno, trebali biste znati i zapamtiti nešto što ste vidjeli sto tisuća puta.”

”Pa, naravno!”

”Stoga biste trebali biti savršeno upoznati s brojčanikom svog džepnog sata i ne ćete imati problema zamisliti iz sjećanja kako je na njemu označen broj šest.”

I ponudite sugovorniku komad papira i olovku.

On udovoljava vašem zahtjevu, ali . . . u većini slučajeva, crta broj šest na način koji je potpuno drugačiji od broja na njegovom satu.

Zašto?

Odgovorite na ovo pitanje bez gledanja na džepni sat.

15.10. Otkucavanje sata

Stavite džepni sat na stol, udaljite se tri ili četiri koraka i slušajte njegovo otkucavanje.

Ako je u sobi dovoljno tiho, čut ćete ga kako povremeno otkucava: kratko otkucava, zatim se zaustavi na nekoliko sekundi, pa ponovno počne otkucavati i tako dalje.

Kako objašnjavate ovo nepravilno otkucavanje?

15.11. Rješenja zadataka od 15.1. - 15.10.

Rješenje problema br. 15.1. Počnimo promatrati kretanje kazaljke u 12 sati.

U ovom trenutku obje kazaljke se preklapaju.

Budući da se satna kazaljka kreće 12 puta sporije od minutne kazaljke (puni krug napravi u 12 sati, a minutna kazaljka u 1 sat), kazaljke se, naravno, ne mogu sresti unutar sljedećeg sata.

Ali prošao je sat; satna kazaljke je na 1, završivši $1/12$ punog kruga; minutna kazaljka je završila puni krug i ponovno je na 12 sati - $1/12$ kruga iza satne kazaljke.

Sada su uvjeti sustizanja drugačiji nego prije: kazaljka za sate kreće se sporije od minutne kazaljke, ali je ispred, a minutna kazaljka mora sustići.

Ako bi natjecanje trajalo puni sat, tada bi u tom vremenu minutna kazaljka napravila puni krug, a kazaljka za sate $1/12$ kruga; tj. minutna kazaljka bi napravila $11/12$ kruga više.

Ali da bi sustigla satnu kazaljku, minutna kazaljka mora prijeći više od kazaljke sata, samo $1/12$ kruga koji ih razdvaja.

To ne će zahtijevati cijeli sat, već razlomak $1/12$ koji je manji od $11/12$, tj. 11 puta.

To znači da će se kazaljke preklopiti nakon $1/11$ sata, ili $60/11 = 5 \frac{5}{11}$ minuta.

Dakle, kazaljke će se preklopiti $5 \frac{5}{11}$ minuta nakon što prođe 1 sat, tj. u $5 \frac{5}{11}$ minuta poslije jedan.

Kada će se sljedeći susret dogoditi?

Lako je zaključiti da će se to dogoditi nakon 1 sat $5 \frac{5}{11}$ minuta ili u 2 sata $10 \frac{10}{11}$ minuta.

Sljedeći je nakon još 1 sat i $5 \frac{5}{11}$ minuta, tj. u $3:16:04/11$ i tako dalje.

Kao što je lako vidjeti, bit će ukupno 11 preklapanja; jedanaesto će se održati $1 \frac{1}{11} \cdot 11 = 12$ sati nakon prvog, tj. u 12:00 sati; drugim riječima, podudara se s prvim preklapanjem, a sljedeća preklapanja će se ponavljati u isto vrijeme.

Evo svih vremena preklapanja:

Preklapanje 1. - u 1 sat $\gg 5 \frac{5}{11}$ min.

Preklapanje 2. - u 2 $\gg 10 \frac{10}{11}$

Preklapanje 3. $\gg$ - u 3 $\gg 16 \frac{4}{11}$

Preklapanje 4. $\gg$ - u 4 $\gg 21 \frac{9}{11}$

Preklapanje 5. $\gg$ - u 5 $\gg 27 \frac{3}{11}$

Preklapanje 6. $\gg$ - u 6 $\gg 32 \frac{8}{11}$

Preklapanje 7. $\gg$ - u 7 $\gg$ 38 $\frac{2}{11}$

Preklapanje 8. $\gg$ - u 8 $\gg$ 43 $\frac{7}{11}$

Preklapanje 9. $\gg$ - u 9 $\gg$ 49 $\frac{1}{11}$

Preklapanje 10. $\gg$ - u 10 $\gg$ 54 $\frac{6}{11}$

Preklapanje 11. $\gg$ - u 12 sati.

Rješenje problema br. 15.2. Ovaj se problem rješava vrlo slično prethodnom.

Počnimo ponovno u 12 sati kada se obje kazaljke preklapaju.

Moramo izračunati koliko će vremena trebati da minutna kazaljka prestigne satnu kazaljku za točno pola kruga - tada će obje kazaljke pokazivati u točno suprotnim smjerovima.

Već znamo (vidi prethodni problem) da tijekom punog sata minutna kazaljka prestiže satnu kazaljku za $\frac{11}{12}$ punog kruga; da bi je prestigla za samo $\frac{1}{2}$ kruga, trebat će manje vremena od punog sata - manje vremena za isti faktor za koji je $\frac{1}{2}$ manje od $\frac{11}{12}$, tj. trebat će samo $\frac{6}{11}$ sata.

To znači da se nakon 12 sati kazaljke prvi put poravnaju jedna s drugom nakon $\frac{6}{11}$ sata, ili $32\frac{8}{11}$ minuta.

Pogledajte sat na $32\frac{8}{11}$ i vidjet ćete da kazaljke pokazuju u suprotnim smjerovima.

Je li ovo jedini put kada su kazaljke postavljene na ovaj način?

Naravno da ne.

Kazaljke dosežu ovaj položaj $32\frac{8}{11}$ minuta nakon svakog sastanka.

A već znamo da postoji 11 sastanaka u razdoblju od dvanaest sati; stoga su kazaljke postavljene drugačije, također 11 puta u razdoblju od dvanaest sati.

Pronalaženje ovih trenutaka je jednostavno:

$$12 \text{ sati} + 32\frac{8}{11} \text{ minuta} = 12 \text{ sati } 32\frac{8}{11} \text{ minuta}$$

$$1 \text{ sat } 5\frac{5}{11} \text{ minuta} + 32\frac{8}{11} \text{ minuta} = 1 \text{ sat } 38\frac{2}{11} \text{ minuta}$$

$$2 \text{ sata } 10\frac{10}{11} \text{ minuta} + 32\frac{8}{11} \text{ minuta} = 2 \text{ sata } 43\frac{7}{11} \text{ minuta}$$

$$3 \text{ sata } 16\frac{4}{11} \text{ minuta} + 32\frac{8}{11} \text{ minuta} = 3 \text{ sata } 49\frac{1}{11} \text{ minuta, itd.}$$

Prepuštam vama da izračunate preostale trenutke.

Rješenje problema br. 15.3. Ako počnemo gledati kazaljke točno u 12 sati, ne ćemo primijetiti željeni položaj tijekom prvog sata.

Zašto?

Zato što se kazaljka sata pomiče dvanaest puta sporije od minutne kazaljke, pa za isti pomak minutne kazaljke prijeđe samo $\frac{1}{12}$ tog kuta.

Bez obzira na kut za koji se minutna kazaljka pomakne od 12, kazaljka sata pomaknut će se za samo $\frac{1}{12}$ tog kuta, a ne za $\frac{1}{2}$, koliko zahtijeva zadatak.

Ali prošao je sat; sada je minutna kazaljka na 12 sati, kazaljka sata na 1 sat, $\frac{1}{12}$ pune rotacije ispred minutne kazaljke.

Pogledajmo može li se takav položaj kazaljki dogoditi tijekom drugog sata. Pretstavimo da se taj trenutak događa kada se kazaljka sata pomakne za određeni dio punog kruga, što označavamo s x .

Minutna kazaljka je u istom vremenu priješla 12 puta više, tj. $12x$. Ako od ovoga oduzmemo jednu punu rotaciju, tada ostatak, $12x - 1$, mora biti dvostruko veći od x , tj. jednak $2x$.

Dakle, vidimo da je $12x - 1 = 2x$, što implicira da je jedna puna rotacija jednaka $10x$ (zapravo: $12x - 10x = 2x$). Ali ako je $10x =$ jedna puna rotacija, tada je jedan $x = 1/10$ rotacije.

Evo rješenja: Kazaljka sata tada se pomaknula za $12/10$ punog kruga od broja 12, za što je potrebno $12/10$ sati, odnosno 1 sat i 12 minuta.

Minutna kazaljka tada će biti dvostruko dalje od broja 12, tj. $1/5$ okretaja; to odgovara $60/5 = 12$ minuta, kako bi i trebalo biti.

Pronašli smo jedno rješenje problema.

Ali postoje i drugi: tijekom dvanaest sati, kazaljke se postavljaju na isti način ne samo jednom, već nekoliko puta.

Pokušajmo pronaći preostala rješenja.

Da bismo to učinili, čekamo do dva sata; kazaljka za minute je na 12. satu, a kazaljka za sate na 2. satu.

Raspravljajući u skladu s prethodnim korakom, dobivamo jednakost $12x - 2 = 2x$ kada su dva cijela okretaja jednaka $10x$, a stoga je $x = 1/5$ cijelog okretaja.

To odgovara trenutku $12/5 = 2$ sata i 24 minute.

Sljedeće trenutke možete lako izračunati sami. Tada ćete otkriti da su kazaljke postavljene prema zahtjevima problema u sljedećih 10 trenutaka:

u 1 sat i 12 minuta.

u 2 sata $\gg 24 \gg$

u 3 sata $\gg 36 \gg$

u 4 sata $\gg 48 \gg$

u 6 sati

u 7 sati $\gg 12 \gg$

u 8 sati $\gg 24 \gg$

u 9 sati $\gg 36 \gg$

u 10 sati $\gg 48 \gg$

u 12 sati.

Odgovori "u 6 sati" i "u 12 sati" mogu se činiti netočnima - ali samo na prvi pogled.

Doista, u 6 sati, kazaljka za sate je na 6 sati, a kazaljka za minute je na 12 sati, tj. točno dvostruko dalje.

U 12 sati, kazaljka za sate je na 12 sati, a kazaljka za minute, ako hoćete, je na "dvije nule" (jer je dvostruka nula isto što i nula); stoga, ovaj slučaj, u biti, zadovoljava problem.

Rješenje problema br. 15.4. Nakon prethodnih objašnjenja, rješavanje ovog problema sad je jednostavno. Lako je vidjeti, razmišljajući kao i prije, da će potreban položaj kazaljki biti određen jednadžbom:

$$12x - 1 = x/2,$$

dakle $1 = 11 \frac{1}{2} x$, ili $x = \frac{2}{23}$ pune rotacije, tj. $1 \frac{1}{23}$ sata nakon 12 sati.

Stoga će u 12 $14 \frac{1}{23}$ sata kazaljke biti postavljene kako je potrebno.

Doista, minutna kazaljka trebala bi biti postavljena na pola puta između 12 sati i $1 \frac{1}{23}$ sata, tj. u $12 \frac{1}{23}$ sata, što je točno $\frac{1}{23}$ pune rotacije (kazaljka za sate će završiti $\frac{2}{23}$ pune rotacije).

Drugi put, kazaljke će biti postavljene kako je potrebno u trenutku određenom iz jednadžbe:

$$12x - 2 = x/2,$$

gdje je $2 = 11 \frac{1}{2} x$ i $x = \frac{4}{23}$; željeni trenutak je 2 sata $5 \frac{5}{23}$ minute.

Treći željeni trenutak je 3 sata $7 \frac{19}{23}$ minute i tako dalje.

Rješenje problema br. 15.5. Ova se problem rješava na isti način kao i prethodni.

Zamislite da su obje kazaljke bile na 12, a zatim se kazaljka sata pomaknula od 12 za neki dio punog kruga, što ćemo označiti slovom x .

Tijekom istog vremena minutna se kazaljka pomaknula za $12x$. Ako nije prošlo više od jednog sata, tada, prema uvjetu zadatka, minutna kazaljka mora biti udaljena od broja 12 za isti iznos za koji se kazaljka sata pomaknula od broja 12. Stoga vrijedi:

$$1 - 12x = x.$$

Odakle je $1 = 13x$ (jer je $13x - 12x = x$). Stoga je $x = \frac{1}{13}$ punog kruga. Kazaljka sata završi ovaj dio okretaja za $\frac{12}{13}$ sati, tj. pokazuje na $55 \frac{5}{13}$ minuta nakon prvog sata.

U međuvremenu je minutna kazaljka prešla 12 puta veću udaljenost, tj. $\frac{12}{13}$ punog okreta; obje kazaljke, kao što vidite, jednako su udaljene od broja 12, a time i jednako udaljene od 6. sata na suprotnim stranama.

Pronašli smo jedan položaj kazaljki - onaj koji se javlja tijekom prvog sata.

Tijekom drugog sata, sličan položaj će se ponovno pojaviti; nalazimo ga rasuđivanjem u skladu s prethodnom jednadžbom:

$$1 - (12x - 1) = x \text{ ili } 2 - 12x = x,$$

odakle je $2 = 13x$ (jer je $13x - 12x = x$), i stoga je $x = \frac{2}{13}$ punog okreta.

Kazaljke će biti u ovom položaju u $1 \frac{11}{13}$ sata, tj. u $50 \frac{10}{13}$ minuta nakon sekunde.

Treći put kazaljke će dosegnuti traženi položaj kada se kazaljka sata udalji od broja 12 za $\frac{3}{13}$ punog kruga, odnosno u 2 sata i $46 \frac{2}{13}$ minuta, i tako dalje.

Ukupno postoji 11 takvih položaja. Nakon 6 sati kazaljke zamjenjuju mjesta: kazaljka sata zauzima položaje koje je prethodno zauzimala minutna kazaljka, a minutna kazaljka zauzima položaje kazaljke sata.

Rješenje problema br. 15.6. Uobičajeni odgovor je "7 sekundi".

Ali, kao što ćemo uskoro vidjeti, ovaj odgovor je netočan.

Kada sat otkuca tri, postoje dva vremenska razmaka:

1) između prvog i drugog otkucaja;

2) između drugog i trećeg otkucaja.

Oba intervala traju 3 sekunde; stoga svaki vremenski razmak traje upola kraće - točno $1 \frac{1}{2}$ sekunde.

Kada sat otkuca sedam, postoji šest takvih intervala.

Šest takvih razmaka po jednu i pol sekundu jednako je 9 sekundi.

Potrebno je 9 sekundi da otkuca sedam puta.

Rješenje problema br. 15.7. Sunce, u svom prividnom dnevnom gibanju, opisuje puni krug za 24 sata - odnosno u istom vremenu u kojem kazaljka spomenutog stranog sata napravi puni krug.

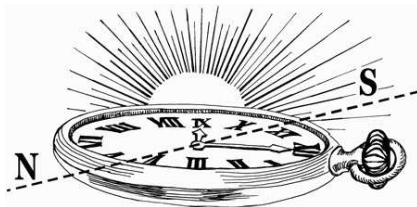
Stoga, ako je u podne, tj. u 12 sati, brojčanik džepnog sata postavljen tako da kazaljka pokazuje prema Suncu, ta će kazaljka, prateći prividno gibanje Sunca, neprestano pokazivati prema njemu.

To dovodi do jednostavnog načina korištenja sata (naravno, samo tijekom dana i po vedrom vremenu) za određivanje smjera prema kojem se Sunce nalazi u podne, odnosno smjera prema jugu.

Da biste to učinili, jednostavno postavite brojčanik tako da kazaljka pokazuje prema Suncu. Tada će smjer prema broju 12 pokazivati smjer u kojem se Sunce nalazilo u podne, odnosno prema jugu.

Rješenje problema br. 15.8. Kazaljka običnog sata napravi puni krug za 12 sati, a ne za 24 sata. To znači da se kreće dvostruko brže od prividnog gibanja Sunca po nebu.

Iz toga je lako shvatiti (vidi prethodni problem) kako pomoću običnog džepnog sata odrediti smjer prema jugu.



Postavite sat tako da kazaljka pokazuje prema Suncu i prepolovite kut između kazaljke i smjera prema broju 12.

Simetrala tog kuta pokazat će smjer prema jugu, odnosno smjer u kojem se Sunce nalazi u podne.

Rješenje problema br. 15.9. Većina ljudi, kao odgovor na naš problem, crta:

6 ili 9, ili: VI ili IA.

To pokazuje da nešto možete vidjeti sto tisuća puta, a ipak to ne prepoznati.

Činjenica je da obično nema broja šest na brojčaniku (muškog sata) jer njegovo mjesto zauzima sekundni brojčanik.

Rješenje problema br. 15.10. Tajanstveni prekidi u otkucavanju sata uzrokovani su jednostavno slušnim umorom.

Naš sluh, kada je umoran, postaje tup na nekoliko sekundi - i tijekom tih intervala ne čujemo otkucavanje. Nakon kratkog vremena, umor popušta i naša prethodna osjetljivost se vraća, pa ponovno čujemo sat.

Zatim se ponovno pojavljuje slušni umor i tako dalje.

16. Neočekivani izračuni

16.1. Čaša graška

Mnogo ste puta držali grašak u rukama, a jednako ste često rukovali i čašom.

Obje veličine bi vam stoga trebale biti poznate.

Sada zamislite čašu napunjenu do vrha graškom i zamislite sav taj grašak posložen u jednom redu, zrno do zrna.

Mislite li da je red duži ili kraći od stola za večeru?

16.2. Lišće drveća

Kad biste ubrali sve listove sa starog stabla - recimo, lipe - i poslagali ih u red, bez praznina, kolika bi, otprilike, bila duljina tog reda?

Bi li bilo moguće, primjerice, okružiti njima veliku kuću?

16.3. Milijun koraka

Vi, naravno, vrlo dobro znate što je milijun i imate jednako dobru predodžbu o duljini svog koraka.

A budući da znate oboje, ne će vam biti teško odgovoriti na pitanje: koliki biste put prešli hodajući, kad biste napravili milijun koraka?

Više od 10 kilometara ili manje?

16.4. Kvadratni metar

Poznavao sam školarca koji, kad je prvi put čuo da u kvadratnom metru ima milijun kvadratnih milimetara, nije htio vjerovati.

Nijedno objašnjenje nije bilo uvjerljivo.

”Odakle ih toliko?” pitao se. ”Ovdje imam list milimetarskog papira, točno metar dug i širok. Može li u ovom kvadratu stvarno biti milijun milimetarskih kvadrata? Nikad neću vjerovati.”

”Prebroj ih ti”, savjetovali su mu.

”I hoću! Imat ću malo slobodnog vremena u nedjelju i pozabavit ću se time.”

U nedjelju je rano ustao i odmah počeo brojati, pažljivo označavajući kvadrate koje je brojao točkicama.

Svake sekunde, nova točkica se pojavljivala pod vrhom njegove olovke; radio je marljivo i posao je brzo napredovao.

Ali je li se tog dana uvjerio da kvadratni metar doista sadrži milijun milimetarskih kvadratića?

16.5. Kubni metar

U jednoj školi, učitelj je pitao: Koliko bi bio visok stup ako bi se sve milimetarske kockice sadržane u kubnom metru složile jedna na drugu?

”Bio bi viši od Eiffelovog tornja (300 metara)!” uzviknuo je jedan učenik.

”Čak viši od Mont Blanca (5 km),” odgovorio je drugi.

Tko je više pogriješio?

16.6. Kubni kilometar

Zamislite kocku čiji je brid dug jedan kilometar.

Koliko bi takvih kutija bilo potrebno, kada bi sve ljude koji žive na svijetu slagali jednog do drugoga?

Uzmite u obzir da svjetska populacija broji 1 800 000 000 ljudi¹ i da jedan kubni metar može u prosjeku primiti pet ljudskih tijela.

16.7. Kosa

Ljudska dlaka je vrlo tanka: debela je približno 20. dio milimetra.

Ali kad bi dlaka bila milijun puta deblja, koliko bi otprilike bila široka?

Jedan od mojih prijatelja, kojem sam postavio ovo pitanje, odgovorio je da bi dlaka tada bila deblja od sobne peći; drugi je tvrdio da bi dlaka bila široka kao cijela soba.

Obojica su, naravno, bili u krivu - ali tko je više pogriješio?

16.8. Koliko portreta?

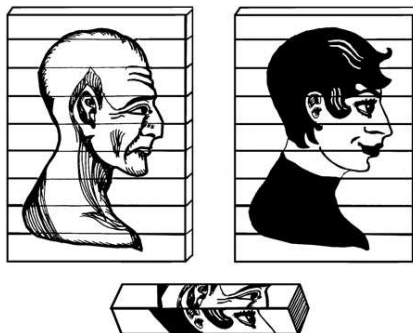
Nacrtajte portret na mapi i izrežite ga na trake, kao što je prikazano na našem dijagramu - recimo, devet traka.

Ako znate barem malo crtati, ne će vam biti teško nacrtati više sličnih traka koje prikazuju različite dijelove lica - ali na takav način da se svake dvije susjedne trake, čak i one koje pripadaju različitim portretima, mogu postaviti jedna do druge bez prekida kontinuiteta linija.

Ako pripremite, primjerice, četiri trake za svaki dio lica², imat ćete 28 traka, od kojih, slaganjem devet odjednom, možete stvoriti razne portrete.

¹Broj stanovnika iz izvornika knjige.

²Najpraktičnije ih je zalijepiti na četiri stranice kvadratnog bloka.



U trgovinama koje su nekad prodavale gotove setove takvih traka (ili šipki) za slaganje portreta, prodavači su uvjeravali kupce da od 36 traka mogu stvoriti tisuću različitih lica.

Je li to istina?

16.9. Francuska brava

Iako je francuska brava poznata svima, malo tko zna njezinu strukturu.

Stoga se često čuju sumnje u postojanje toliko različitih francuskih brava i ključeva.

Međutim, dovoljno je upoznati se s genijalnim mehanizmom ovih brava da bismo vidjeli da mogu biti dovoljno raznolike.

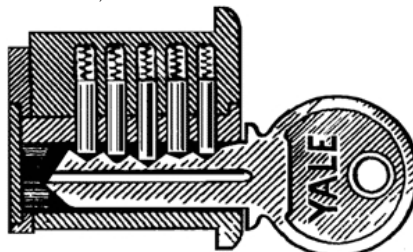


Slika prikazuje francusku bravu kako je vidimo sprijeda (usput, naziv "francuska" je potpuno netočan, budući da su ove brave nastale u Americi, a njihov izumitelj bio je Amerikanac po imenu Yale - zato sve takve brave i ključevi nose natpis "Yale"). Vidite mali krug oko ključanice: to je baza grebena, koji prolazi kroz cijelu bravu.

Zadatak otvaranja brave je okrenuti ovaj greben - ali u tome leži cijela poteškoća.

Greben se drži u određenom položaju s pet kratkih čeličnih šipki kao što je prikazano na slici.

Svaka šipka je u nekom trenutku prepolovljena i samo ako su šipke postavljene tako da su svi rezovi u ravnini s grebenom, može se okrenuti.



Ovaj nužni raspored daje šipkama ključ s odgovarajućim izbočinama na rubu: jednostavnim umetanjem šipke zauzimaju specifičan i jedinstven položaj potreban za otvaranje brave.

Sada je lako razumjeti da broj različitih brava ove vrste doista može biti prilično velik.

To ovisi o tome na koliko se načina svaka šipka može prepoloviti; taj broj, naravno, nije beskonačan, s obzirom na ograničenu visinu zubaca ključa.

Pretpostavimo da se svaka šipka može prepoloviti na dva dijela na 10 različitih načina i pokušajte izračunati koliko se različitih francuskih brava može napraviti pod tim uvjetom.

16.10. Skromna nagrada

Problem koji ću vam predstaviti nije nov, zapravo, vrlo je star.

Dobro je poznat, ali upravo zato sam ga uključio u ovu zbirku zagonetki.

Uostalom, moja knjiga nije namijenjena onima koji već znaju sve što je općepoznato, već onima koji to tek trebaju naučiti.

Dakle, dopustite mi da vam sada ispričam drevnu legendu o nagradi koju je drevni mudrac Seth tražio od hinduističkog vladara Sherama za izum šaha.

Mudrac je tražio da bude nagrađen za izum šahovske ploče tako što će mu dati samo jedno zrno pšenice za prvo polje, dva za drugo, četiri za treće, osam za četvrto i tako dalje, udvostručujući nagradu za svako sljedeće polje, sve dok svih 64 polja ploče nije plaćeno.

Što se tiče šahovskih figura, mudrac nije tražio nikakvu nagradu za njih.

Vladar se zadivio takvom skromnošću i otpustio mudraca, naredivši da mu se odmah isplate potrebna zrna.

Kad je, neko vrijeme kasnije, vladar upitao je li njegova naredba točno izvršena, zbunjeno mu je rečeno da se tražena nagrada ne može isplatiti.

”Zašto?” upitao je vladar.

”Zašto?” pitat ćemo čitatelja.

16.11. Rješenja zadataka od 16.1. - 16.10.

Rješenje problema br. 16.1. Red graška bio bi puno duži od stola.

Promjer graška je otprilike $1/2$ do $1/3$ centimetra.

Ako se držimo potonje dimenzije, tada kocka s rubom od 1 centimetra mora primiti najmanje $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ graška³; stoga, u čaši kapaciteta 200 kubičnih centimetara, broj graška mora biti najmanje 1600.

Slažući ih u jedan red, dobivamo duljinu od $1/2 \cdot 1600 = 800$ centimetara, ili 8 metara.

To je 4 hvata - udaljenost puno duža od bilo kojeg stola.

³To je broj zrna graška koji stanu u kubni centimetar kada su labavo zbijeni; s gušćim zbijenim prostorom, gdje je jedno zrno graška djelomično smješteno u prostor između susjednih zrna, trebalo bi stati više zrna.

Ako pretpostavimo veličinu graška od $1/3$ centimetra, tada u kocki centimetar može primiti barem $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ njih, a čaša može primiti barem $27 \cdot 200 = 5400$.

Duljina reda od 5400 takvih grašaka je $1/3 \cdot 5400 = 1800$ centimetara, ili 18 metara - čak i više nego u slučaju velikog graška.

Rješenje problema br. 16.2. Ne samo kuća, već čak i provincijski grad mogao bi biti okružen redom lišća s jednog stabla, jer bi se takav red protezao oko deset milja!

Doista, staro stablo ima najmanje 200 000-300 000 listova.

Čak i ako se zaustavimo na 250 000 i smatramo da je svaki list širok 5 centimetara, red bi bio dug 1 250 000 centimetara, odnosno 12 500 metara, odnosno 12,5 kilometara.

Rješenje problema br. 16.3. Milijun koraka je puno više od 10 kilometara, čak i više od 100 kilometara.

Ako je korak dug otprilike $3/4$ metra, tada je $1\,000\,000$ koraka = 750 kilometara.

Budući da je Moskva udaljena samo 640 kilometara od Lenjingrada, milijun koraka odvelo bi vas 750 kilometara daleko, dakle dalje od Lenjingrada.

Rješenje problema br. 16.4. Učenik to nije mogao provjeriti istog dana, jer, čak i da je radio danonoćno bez pauze, ne bi izbrojao ni desetinu svih kvadrata.

Doista, dan ima $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86\,400$ sekundi, a kvadratni metar ima 1 000 000 kvadratnih milimetara.

Trebalo bi više od 11 dana neprekidnog rada da bi se izravnim brojanjem provjerilo sadrži li kvadratni metar doista milijun milimetarskih kvadrata.

Kad bi brojao deset sati dnevno, slična provjera bi trajala oko mjesec dana.

Malo tko bi imao strpljenja postići takav podvig izračuna⁴.

Rješenje problema br. 16.5. Oba odgovora su daleko od istine, jer bi složeni stup bio sto puta viši od najviše planine na Zemlji.

Doista, kubni metar je $1000 \cdot 1000 \cdot 1000$, tj. milijardu kubičnih milimetara.

Složeni jedan na drugi, tvorili bi stup visok 1 000 000 000 milimetara, ili 1 000 000 metara, ili 1 000 kilometara!

Rješenje problema br. 16.6. U jednu kutiju zadanih dimenzija mogli bi posložiti puno više ljudi nego što ih ima na Zemlji, i to tri puta!

Lako je izračunati da ako 5 ljudi zauzima volumen od 1 kubnog metra, tada bi 1 800 000 000 ljudi zauzimalo 360 milijuna kubnih metara - a u kubnom kilometru ima 1 000 milijuna kubnih metara.

Rješenje problema br. 16.7. Kosa, kad bi bila milijun puta deblja, premašila bi širinu ne samo bilo koje peći ili sobe, već i gotovo svake zgrade, jer bi joj promjer bio 50 metara!

Doista množenjem širine dlake (0,05 mm) s 1 000 000 dobit ćemo 50 000 mm ili 50 metara.

Usput, to je širina koju bi imala svaka točka tipografskog tipa ove knjige kad bi joj se promjer povećao milijun puta.

Nadalje svako slovo, s takvim povećanjem, bilo bi visoko više od dvije milje!

⁴Međutim, prije pola stoljeća, sličan zadatak je izvršio učitelj crtanja u Engleskoj: pažljivo je postavio milijun točaka u debelu bilježnicu, tisuću na svaku stranicu.

Ovi neočekivani rezultati pokazuju da naš koncept milijuna nije ni blizu tako jasan kao što obično mislimo.

Rješenje problema br. 16.8. Broj portreta je znatno veći od tisuću.

Mogu se prebrojati na sljedeći način.

Označimo devet dijelova portreta rimskim brojevima I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII i IX; za svaki dio postoje četiri trake koje numeriramo arapskim brojevima 1, 2, 3, 4.

Uzmimo traku I, 1. Na nju možemo pričvrstiti trake II, 1; II, 2; II, 3; II, 4.

Stoga su moguće ukupno četiri kombinacije.

Ali budući da se dio I glave može predstaviti s četiri trake (I, 1; I, 2; I, 3; I, 4), a svaka od njih može se spojiti s dijelom II na četiri različita načina, dva gornja dijela glave, I i II, mogu se spojiti na $4 \cdot 4 = 16$ različitih načina.

Svakom od ovih 16 rasporeda, dio III može se spojiti na četiri načina (III, 1; III, 2; III, 3; III, 4), stoga se prva tri dijela fizionomije mogu sastaviti na $16 \cdot 4 = 64$ različita načina.

Slično tome, saznajemo da se dijelovi I, II, III i IV mogu složiti na $64 \cdot 4 = 256$ različitih načina; dijelovi I, II, III, IV i V - na 1024 načina; dijelovi I, II, III, IV, V i VI - na 4096 načina i tako dalje; konačno, svih devet dijelova portreta može se kombinirati na $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$, tj. na 262 144 načina.

Dakle, od naših 9 blokova moguće je sastaviti ne 1000, već više od četvrt milijuna različitih portreta!

Problem je prilično poučan: objašnjava zašto su dvije identične ljudske fizionomije tako rijetke.

Čak je i Vladimir Monomah u svojim "Uputama" izrazio čuđenje kako, s obzirom na ogroman broj ljudi na svijetu, svaki ima svoje jedinstveno lice.

Ali sada smo vidjeli da ako bi ljudsko lice bilo karakterizirano samo s devet crta, od kojih svaka dopušta samo četiri varijacije, moglo bi postojati više od 260 000 različitih lica.

U stvarnosti, međutim, postoji daleko više od devet karakterističnih crta ljudskog lica, a one se mogu razlikovati na više od četiri načina.

Ako imamo 20 osobina $\cdot$ 10 mogućnosti, to je:

$$10^{20} = 100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

Dobiveni broj je mnogo puta veći od broja ljudi na cijelom svijetu (1 800 000 000).

Rješenje problema br. 16.9. Koristeći isto razmišljanje kao i u prethodnom problemu, lako je izračunati da je broj različitih brava $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100\,000$.

Svaka od ovih 100 000 brava ima jedinstveni ključ - jedini koji je može otvoriti.

Postojanje 100 000 različitih brava i ključeva, naravno, pruža dovoljnu sigurnost vlasniku brave, budući da netko tko želi provaliti u sobu koristeći odabrani ključ ima samo 1 prema 100 000 šanse da pronađe odgovarajući ključ.

Naš izračun je samo približan: izračunat je pod pretpostavkom da se svaka igla brave može podijeliti na dva dijela na samo 10 načina.

U stvarnosti, to se vjerojatno može učiniti na mnogo više načina, u kojem bi se slučaju broj različitih brava značajno povećao.

Rješenje problema br. 16.10. "Skromna nagrada", nije se mogla isplatiti jer ne samo u Indiji, već u cijelom svijetu tolika količina zrna ne postoji!

Izračun potrebne količine zrna je težak zadatak.

Zapravo, zahtijeva zbrajanje niza brojeva: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \text{itd.}$

Ovdje je navedeno samo prvih 8 brojeva.

Ali još ih je ostalo 56.

Da bi se pronašao posljednji, 64. broj, potrebno je pomnožiti 2 sa samim sobom 62 puta.

Hindusi, koji još nisu poznavali logaritme, koji skraćuju takve izračune, morali su izvesti ovo množenje primjenjujući obične aritmetičke tehnike pri čemu je na samo prvih 8 brojeva pokazano da ovaj izračun je zamoran.

Istina, mogli biste si olakšati posao i uštedjeti puno vremena dijeljenjem naših 63 faktora u skupine od po 7 dvojki.

Tada biste morali pomnožiti "samo" 9 faktora, svaki jednak 128 - ili, ako više volite, "samo" tri faktora, svaki jednak $(128 \cdot 128 \cdot 128)$.

Ali u stvarnosti biste vidjeli da su riječi "samo" u navodnicima s razlogom, jer ima još puno računanja. A ovo je samo posljednji, 64. član; također biste trebali znati svih prethodnih 63 člana, a zatim ih sve zbrojiti . . .

Za one koji poznaju algebru i upoznati su s logaritmima i progresijama, izvođenje ovog izračuna - doduše samo približno - ne bi predstavljalo nikakav problem.

Budući da ne mogu pretpostaviti da čitatelji ove knjige imaju takvo znanje algebre, a s druge strane, ne namjeravam ih podvrgnuti satima izračuna, ukazat ću na jednostavan način da se barem okvirno stekne predodžba o pravoj veličini "skromne nagrade" hinduističkog mudraca.

Nastavljajući niz 2, 4, 8, 16, 32, 64, itd. do 10. člana, dobivamo 1024.

Budući da pokušavamo samo približno odrediti veličinu posljednjeg člana, dopušteno je izostaviti 24 jedinice u 1024 kako bismo dobili okrugli broj 1000.

Ako prvih deset dvojki, kada se pomnože, daju približno 1000, tada će se isti iznos dobiti množenjem sljedećih 10 dvojki, kao i daljnjih grupa od 10 dvojki.

Imamo ukupno 63 faktora broja dva, tj. šest grupa od 10 i sedmu grupu od tri dvojke.

To znači da bi broj zrna koji pripadaju izumitelju za posljednje, 64. polje šahovske ploče trebao biti približno jednak $1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 (2 \cdot 2 \cdot 2) = 8\,000\,000\,000\,000\,000\,000$.

Osam trilijuna zrna - to je približna vrijednost posljednjeg člana!

Kako bismo izračunali (približno) cijeli zbroj, obratimo pozornost na poučnu značajku niza 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 itd.

Lako je vidjeti da je svaki broj u njemu jednak zbroju svih prethodnih, uvećanom za 1.

Primjerice: $8 = (1+2+4)+1$; $16 = (1+2+4+8)+1$; $32 = (1+2+4+8+16)+1$.

Jasno je da je posljednji, 64. broj u ovom nizu također jednak zbroju 63 prethodna plus 1.

Ali već znamo da je ovaj posljednji broj jednak (otprilike) 8 trilijuna.

Stoga je zbroj svih prethodnih brojeva također približno jednak 8 trilijuna, a ukupan broj zrna pšenice koji pripada izumitelju približno je jednak $1\,600\,000\,000\,000\,000\,000\,000$.

Međutim, ovaj rezultat je svakako manji od stvarne vrijednosti - zapamtite da smo u svakom od 6 množitelja izostavili 24 jedinice (koristeći točno 1000 umjesto 1024).

Točan izračun bi dao rezultat $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,515$.

Kako biste lakše shvatili veličinu ovog broja, imajte na umu da kubni metar (bačva od 80 kanti) sadrži 15 milijuna zrna pšenice.

”Skromna nagrada” dakle je morala zauzimati volumen od približno 120 000 000 000 000 kubičnih metara.

To je 12 000 kubičnih kilometara!

Dalje.

Površina Zemlje - svi njezini kontinenti i oceani - iznosi 500 milijardi četvornih metara.

Stoga, ako bi se naš broj zrna raspršio u ravnomjernom sloju po cijelom svijetu, taj bi sloj bio debeo $1,2 \cdot 10^{12} : 5 \cdot 10^{11} = 2,4$ m

Ako bi se cijeli globus pretvorio u neprekidno polje pšenice (što bi zahtijevalo isušivanje oceana, topljenje polarnih ledenih kapa i navodnjavanje svih pustinja), cijela žetva bi otišla kao nagrada izumitelju šaha.

Zaključno, pozivam čitatelja da sam izračuna duljinu zrna ako bi se sva ta zrna poredala u jednom redu.

Za svaki slučaj, reći ću vam da je udaljenost od Zemlje do Sunca 150 000 000 kilometara - iako ne mislim da biste morali ostati unutar Sunčevog sustava s takvim lancem zrna.

17. Kristalna putovanja i kontinuirano crtanje

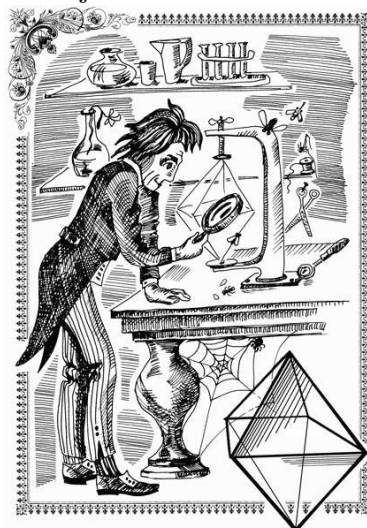
- Što vas toliko intrigira s ovom muhom na kristalu?
- Njeno čudno ponašanje: iskreno, hoda po kristalu, prilično sustavno.
- Gle, uvijek se lijepi za bridove, a ne hoda po stranama. Zašto bi htjela hodati po bridovima kada u blizini ima mnogo ravnih mjesta?
- Čini mi se prilično jednostavnim. Kako su strane ovog kristala zalijepljene?
- Sumnjate da u ljepilu ima nešto slatko što privlači muhu? Čini se da; ona stvarno liže rubove kristala svojim rilom. Zato se polako i sustavno kreće s jednog ruba na drugi!
- I istovremeno, u praksi, rješava zanimljiv problem: prolazak kroz cijeli poliedar duž njegovih rubova bez dva posjeta bilo kojem rubu.
- Je li to uopće moguće?
- U ovom slučaju, to je savršeno moguće: uostalom, ovaj kristal je oktaedar.

"Da, oktaedar. Koja je onda razlika?"

"Ima četiri brida koji se susreću u svakom vrhu."

"Naravno. Ali kako se to odnosi na naš problem?"

"Ima izravnu vezu. Problem prolaska kroz sve bridove poliedra, i to ne više od jednom, rješiv je samo za one poliedre u kojima se u svakom vrhu susreće paran broj bridova."



Muha na kristalu

- O, stvarno! Nisam to znao. Zašto?
- Zašto paran broj bridova mora konvergirati u svakom vrhu? Vrlo je jednostavno. Morate u svaki vrh ući i iz njega izaći, što znači da bridovi kojima prolazite moraju dolaziti u parovima,

Ako, nastavljajući putovanje kroz kristal, stignete do istog vrha drugi put, tj. ako treći brid vodi do njega, tada mora postojati i četvrti brid, tako da možete napustiti taj vrh i ne završiti u slijepoj ulici.

Drugim riječima, broj bridova koji se sastaju u svakom vrhu mora biti uparen, tj. paran. Ako barem jedan vrh poliedra ima neparan broj bridova koji se susreću prema njemu, tada možete doći do tog vrha, iscrpivši sve uparene bridove koji vode do njega, naravno, do posljednjeg neiskorištenog brida, ali više ne ćete moći napustiti ovaj vrh: putovanje će neizbježno ovdje završiti.

"Ali možda uopće ne ću koristiti ovaj rub, budući da očito vodi u slijepu ulicu!"

"Tada ne biste ispunili drugi uvjet našeg putovanja: proći sve rubove bez iznimke."

"Oprostite: ali moglo bi se dogoditi da je ovaj rub posljednji i jedini koji tek treba proći. Tada ga uopće ne treba napuštati: to će biti konačno odredište putovanja."

"Apsolutno točno. A ako bi lik imao samo jedan "neparni" vrh, tada biste morali odabrati rutu tako da taj vrh bude posljednja faza - tada biste uspješno riješili problem. Ili biste mogli početi od ovog vrha - tada se ne biste morali vraćati na njega. Trebao bih samo dodati da lik s jednim "neparnim" vrhom ne može postojati: mora postojati paran broj takvih vrhova - dva, četiri, šest i tako dalje."

"Zašto je to tako?"

"Uzmite u obzir da svaki brid spaja dva vrha. A ako bilo koji vrh ima nespareni brid, tada taj brid mora graničiti s nekim susjednim vrhom i tamo također biti nespareni brid."

"Ali što ako je susjedni vrh također neparan bez tog brida? Tada ga novi brid čini "parnim", a naš "neparni" vrh ostaje sam."

To ne može biti. Ako se, bez našeg brida, neparan broj bridova susreće u susjednom vrhu, tada je jedan od njegovih bridova, onaj koji ostaje izvan para, spojen sa sljedećim vrhom i stoga će se "neparni" vrh kasnije pronaći, ali će i dalje postojati.

Vidite da ako lik ima jedan "neparan" vrh, tada mora postojati i drugi. Broj "neparnih" vrhova ne može biti neparan.

Objasnit ću to na drugi, možda jednostavniji način. Pretpostavimo da želite prebrojati koliko bridova ima neka figura. Brojite bridove koji se susreću u jednom vrhu, zbrajate bridove koji se susreću u drugom, zatim u trećem i tako dalje. Kad sve to zbrojite, što dobijete?

"Figura ima dvostruko više bridova, jer je svaki brid prebrojan dva puta: uostalom, svaki brid spaja dva vrha."

"Upravo tako. Dobit ćete dvostruko više bridova. A ako pretpostavimo da jedan od vrhova ima neparan broj bridova koji se susreću, a svi ostali imaju paran broj, tada će rezultat zbrajanja naravno biti neparan broj. Ali može li udvostručeni cijeli broj biti neparan?"

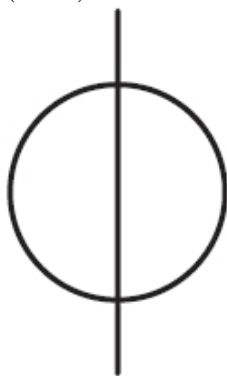
"Naravno da ne. Sada mi je savršeno jasno da svaka figura mora imati dva, četiri - zapravo, paran broj - neparnih vrhova. Ipak, mislim da je moguće proći kroz kristal s dva neparna vrha. Recimo da imamo figuru s dva neparna vrha. Što nas sprječava da započnemo putovanje točno u jednoj od tih točaka, a završimo u drugoj? Tada nema potrebe vraćati se na prvu ili napuštati posljednju. Putovanje će biti završeno u skladu sa svim potrebnim uvjetima."

- Točno! To je tajna uspješnog dovršetka takvih putovanja, ili - što je u suštini isto - pravilo crtanja figura jednim potezom olovke. Ako trebate nacrtati figuru kontinuiranim kretanjem - bilo u ravni ili u prostoru - prvo pažljivo pregledajte figuru i utvrdite ima li "neparne" vrhove, tj. vrhove koji imaju neparan broj linija.

Ako figura ima više od dva takva vrha, problem je nerješiv. Ako ih ima samo dva, tada morate početi crtati od jedne "neparne" točke i završiti na drugoj. Ako uopće nema "neparnih" vrhova, tada možete početi crtati od bilo kojeg vrha i uvijek ćete pronaći način da dovršite cijelu figuru, vraćajući se na početnu točku.

U kojem smjeru pomičete olovku u ovom slučaju nije važno. Samo trebate paziti da ne crtate liniju do vrha od kojeg nema daljnjeg puta, tj. pokušajte ne zatvoriti figure prerano.

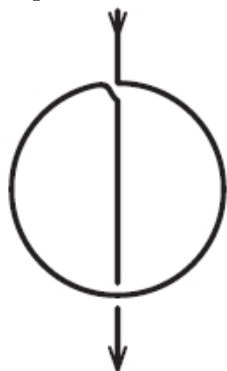
Evo primjera: lik u obliku slova ϕ (v. sl.). Može li se nacrtati jednim potezom olovke?



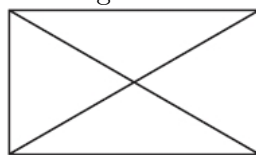
Ima samo dva "neparna" vrha, krajeve štapića. To znači da se može nacrtati samo jednim potezom pera.

Ali kako?

- Morate početi na jednom kraju štapića i završiti na drugom, ovako (v. sl.).

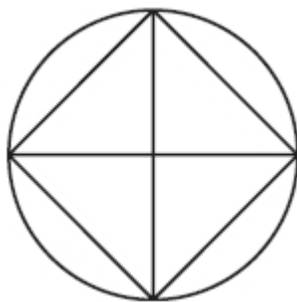


- Kao dijete, mučio sam se pokušavajući nacrtati četverokut s dvije dijagonale (v. sl.) samo jednim potezom olovke. Nisam mogao.



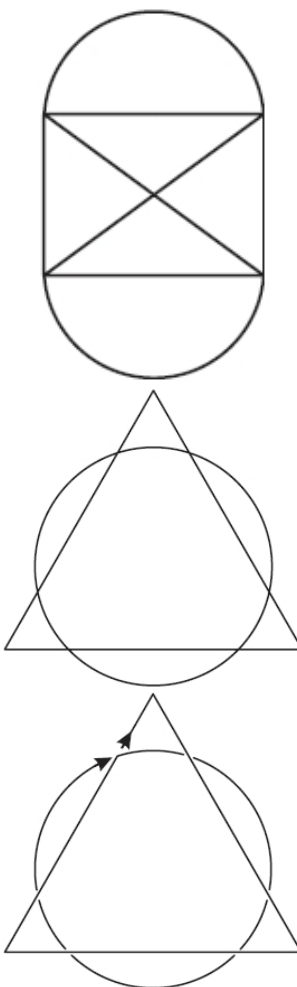
I nije ni čudo: uostalom, ima četiri neparne vrha - kutove četverokuta.

Besmisleno je čak i zbunjivati se ovim problemom: nerješiv je. - A što je s ovom figurom (v. sl.)?



Također se ne može nacrtati jednom neprekidnom linijom jer ima četiri vrha, od kojih se u svakom pet linija konvergira, tj. ima četiri "neparna" vrha.

Međutim, lako je nacrtati figure na sljedeće dvije slike: svi njihovi vrhovi su "parni" (rješenje pogledajte na slici).

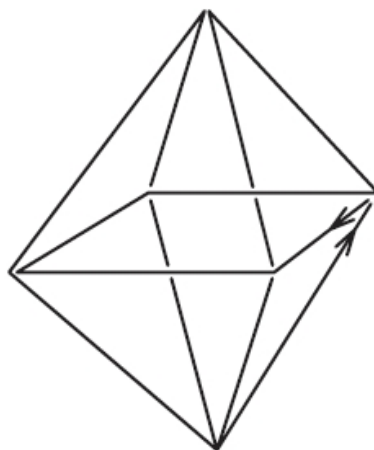


Sada prijedimo na problem koji naša muha pokušava riješiti: proći preko svakog od bridova oktaedra jednom u neprekidnom kretanju.

U svakom vrhu ove figure konvergiraju četiri brida; ona uopće nema "neparnih" vrhova.

Stoga možete započeti svoje putovanje iz bilo kojeg vrha i vratiti se na početnu točku.

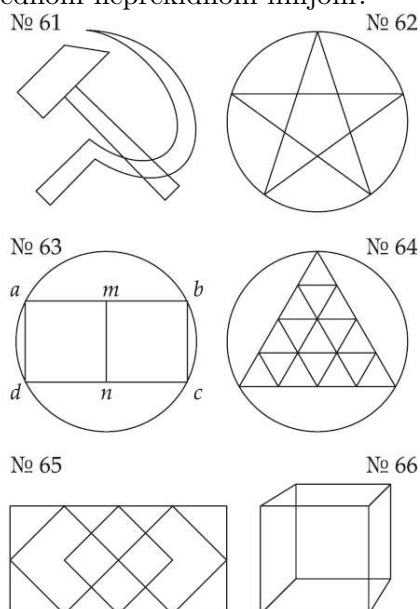
Na slici je prikazano još jedno moguće rješenje.



”Znaš, ovo je zanimljiva vrsta zagonetke! Daj mi desetak sličnih problema, razmislit ću o njima u slobodno vrijeme.”

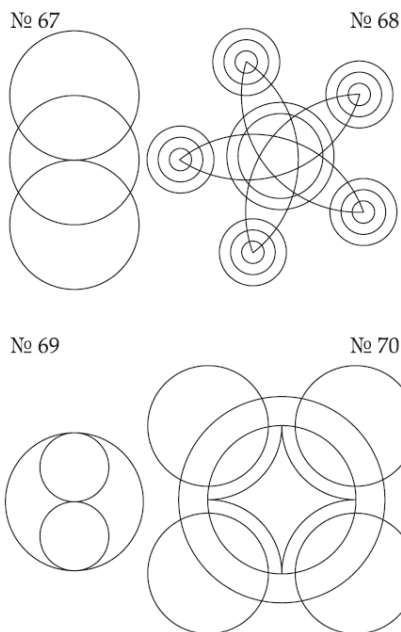
17.1. Likovi No 61.-66.

Mogu li se likovi nacrtati jednom neprekidnom linijom?



17.2. Likovi No 67.-70.

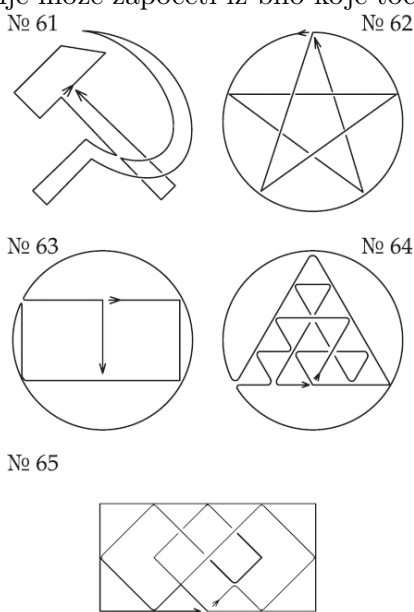
Mogu li se likovi nacrtati jednom neprekidnom linijom?



17.3. Rješenja zadataka od 17.1. - 17.2.

Rješenje problema br. 17.1.

Likovi na slikama označenim brojevima 62, 64, 65, 67, 68, 69 i 70 sigurno se mogu nacrtati neprekidnom linijom. Na tim slikama paran broj linija konvergira u svim točkama presjeka, što znači da crtanje može započeti iz bilo koje točke.



Rješenje zadataka: No. 61-65.

Bilo koja točka može poslužiti kao početna točka, a služiti će i kao završna točka.

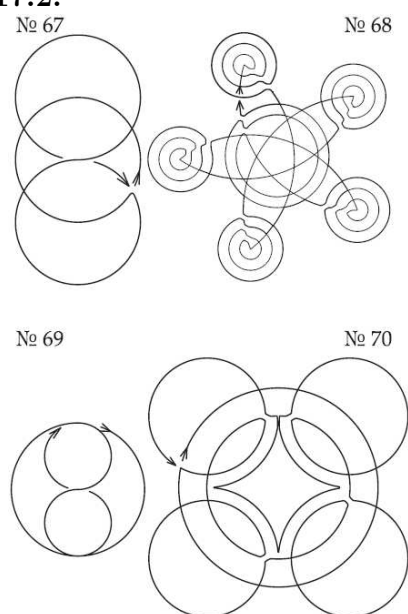
Slika 61 sadrži samo dvije "neparne" točke, naime mjesta gdje drška čekića ulazi u glavu: tri pravca se konvergiraju u svakoj točki.

Stoga se lik može nacrtati neprekidnom linijom samo ako počnemo u jednoj od "neparnih" točaka i završimo u drugoj.

Isto vrijedi i za sliku 63: sadrži samo dvije "neparne" točke, m i n : to moraju biti početna i završna točka prilikom crtanja.

Slika 66 sadrži više od dvije "neparne" točke i stoga ju je apsolutno nemoguće nacrtati jednom neprekidnom linijom.

Rješenje problema br. 17.2.



Rješenje zadataka: No. 67-70.

18. Deset različitih zadataka

18.1. Horizont

Često čitamo i čujemo da je jedan od uvjerljivih dokaza zemaljskog sfernog oblika zaobljenost horizonta.

Budući da je linija horizonta uvijek krug, naša Zemlja mora biti oblika kugle.

Ali razmislite o ovome: kakav bi oblik imala linija horizonta da naša Zemlja nije kugla, već ravnina i kad bi bila beskonačna u svim smjerovima?

18.2. Gdje i kada?

Vjerojatno vam je poznata besmislena rima

*Rano ujutro, navečer,
U podne, u zoru . . .*

Nepoznati autor ovih stihova nastojao je izraziti namjernu apsurdnost i odabrao je riječi koje su jedna drugoj proturječile.

Ipak ta fraza nije u potpunosti besmislena; postoje mjesta na Zemlji gdje je takva definicija vremena u potpunosti primjenjiva i odnosi se na određeni stvarni trenutak.

Gdje i kada se to događa?

18.3. Ezopova visina

”Kažu da je Ezopova¹ glava bila dugačka 7 inča, a noge dugačke kao glava i polovica tijela; tijelo mu je bilo jednako duljini nogu i glave.

Pitanje je, koliko je visok ovaj slavni čovjek?”

18.4. Pet komada lanca

Kovač je dobio pet lanaca, svaki od po tri karike, kao što je prikazano na slici, i zadatak mu je bio spojiti ih u jedan lanac.



Prije nego što je počeo raditi, kovač je razmislio koliko će karika trebati otvoriti i ponovno iskovati.

¹Ovaj problem je posuđen iz opsežnog starog ruskog udžbenika matematike Jefima Vojtjahovskog s kraja 18. stoljeća.

Odlučio je da će morati otvoriti i ponovno iskovati četiri karike.

Ne bi li se isti posao mogao obaviti otvaranjem manjeg broja karika?

18.5. Korištenje četiri petice

Izrazite broj 16 koristeći četiri petice, povezujući ih znakovima računskih operacija.

Kako to učiniti?

18.6. Trešnja

Meso trešnje okružuje košticu slojem iste debljine kao i sama koštica.

Pretpostavimo da su i trešnja i koštica sfernog oblika.

Možete li mentalno izračunati koliko je puta veći volumen mesa trešnje od volumena koštice?

18.7. Dinje

Dvije dinje su na rasprodaji.

Jedna, opsega 72 centimetra, košta 40 rubalja. Druga, opsega 60 centimetara, košta 25 rubalja.

Koja je povoljnija kupnja dinje?

18.8. Nevjerojatan čep

U dasci su izrezane tri rupe: jedna je kvadratna, druga okrugla, a treća je u obliku križa.

Ove rupe prikazane su na našem crtežu.



Morate napraviti čep takvog oblika da odgovara svakoj od ovih rupa.

Možda mislite da je takav univerzalni čep nemoguć: rupe su previše različitog oblika.
Mogu vas uvjeriti da takav čep postoji.
Pokušajte ga pronaći.

18.9. Model Eiffelova tornja

Eiffelov toranj u Parizu, visok 300 metara, izrađen je u cijelosti od željeza i ima masu od 8 000 000 kilograma

Jedan moj prijatelj ima točan model poznatog tornja, mase samo jedan kilogram.

Koliko je visok?

Je li viši ili niži od obične čaše?

18.10. Muha na traci

Imao sam dugu papirnatu traku, crvenu s jedne strane i bijelu s druge.

Zalijepio sam krajeve i stavio dobivenu papirnatu petlju na stol.

Moju je pozornost privukla muha koja je sletjela na crvenu stranu trake i počela lutati po njoj.

Počeo sam pratiti njezino putovanje duž trake i, na svoje zaprepaštenje, primijetio sam da je nakon što je malo lutala duž trake završila na suprotnoj, bijeloj strani, iako je cijelo vrijeme ostala na traci i nikada nije prešla njezin rub.

Nastavljajući pratiti njezino kretanje, ubrzo sam je ponovno vidio na crvenoj strani trake, iako sam mogao sa sigurnošću potvrditi da nije stala niti preletjela rubove trake, već da je cijelo vrijeme puzala duž nje.

Možete li objasniti kako se to moglo dogoditi?

18.11. Rješenja zadataka od 18.1. - 18.10.

Rješenje problema br. 18.1. Kad bi Zemlja bila savršeno ravna, horizont bi i dalje bio kružnica!

Doista: što je horizont? Linija duž koje se nebeski svod naizgled susreće sa Zemljom.

Ali nebeski svod je oblikovan poput kugle.

Kojom drugom linijom bi kugla mogla sijeći ravninu ako ne duž kružnice?

Dakle, sam kružni oblik horizonta ne dokazuje da je Zemlja okrugla!

Rješenje problema br. 18.2. Gdje? Iza Arktičkog kruga.

Kada? Oko 21. prosinca, kada se zimsko Sunce nakratko, u podne, pojavi svojim gornjim rubom iznad horizonta, samo da bi odmah ponovno nestalo ispod njega.

Doista. Ovaj trenutak je "jutro", jer se podudara s izlaskom sunca; ali je i večer, jer se podudara sa zalaskom sunca.

Svakako je podne - podne - i, naravno, zora, jer zora traje dok Sunce još nije izašlo iznad horizonta.

Dakle, to je "rano jutro, večer, podne, zora".

Rješenje problema br. 18.3. Iz opisa problema znamo da su Ezopove noge jednake 7 inča (glava) + polovica duljine njegovog trupa.

Također znamo da je trup = duljina nogu + 7 inča, dakle, duljina nogu = trup minus 7 inča.

Dakle, duljina Ezopovih nogu jednaka je polovici duljine trupa plus 7 inča, ali je istodobno jednaka duljini trupa umanjenoj za 7 inča.

Stoga, $1/2$ trupa + 7 inča = trup - 7 inča, ili: trup je 14 inča duži od $1/2$ trupa, pa je $1/2$ trupa = 14 inča, a cijeli trup = 28 inča.

Zbrajajući duljinu glave i nogu (što zajedno = trup, tj. 28 inča), dobivamo Ezopovu visinu: 56 inča, ili 2 aršina.

Rješenje problema br. 18.4. Dovoljno je odvojiti samo tri karike iz jednog od pet lanaca, a zatim njima spojiti preostala četiri lanca.

Rješenje problema br. 18.5. Postoji samo jedno rješenje ovog problema:

$$\frac{55}{5} + 5 = 16.$$

Rješenje problema br. 18.6. Debljina sloja mesa trešnje jednaka je polumjeru koštice, što znači da je polumjer trešnje dvostruko veći od polumjera koštice, odnosno da je njezin promjer dvostruko veći od promjera koštice.

Stoga je volumen trešnje $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ puta veći od volumena koštice.

Volumen mesa trešnje stoga je $8 - 1 = 7$ puta veći od volumena koštice.

Rješenje problema br. 18.7. Opseg velike dinje (72 cm) je $24/20$, odnosno 1,5 puta, veći od opsega manje dinje (60 cm).

Omjer promjera velike dinje i promjera manje dinje također je 1,2.

Njezin volumen je veći za

$$1\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot 1\frac{1}{5} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{216}{125}$$

Ako manja dinja košta 25 rubalja, tada veća mora koštati $25 \cdot 216/125 = 216/5 = 43$ rublje i 20 kopejki.

Međutim, dinja košta samo 40 rubalja.

Jasno je da je isplativije kupiti veću dinju nego manju.

Rješenje problema br. 18.8. Željeni čep ima oblik prikazan ovdje na slici.

Njime možete začepiti kvadratnu, okruglu ili križnu rupu.



Rješenje problema br. 18.9. Model od 1 kilograma puno je viši od čaše jer je - neočekivano - visok $1\frac{1}{2}$ metra!

Masa modela je 8 000 000 puta manja od mase tornja, pa je, uz pretpostavku da su model i toranj građeni od istog materijala, i njihov volumen u istom omjeru.

Stoga je visina modela manja od visine tornja u omjeru čiji je kub 8 000 000 taj broj je 200, jer $200 \cdot 200 \cdot 200 = 8\,000\,000$.

Dijeljenjem visine Eiffelova tornja, 300 metara, s 200 dobiva se $1\frac{1}{2}$ metra.

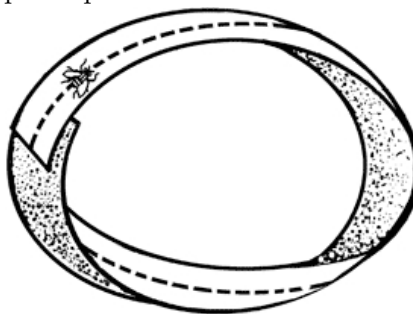
Rezultat je prilično čudan.

Željezni predmet visok $1\frac{1}{2}$ metra teži samo 1 kilogram!

To se objašnjava činjenicom da je Eiffelov toranj, unatoč svojoj velikoj veličini, neobično lagana građevina.

Rješenje problema br. 18.10. Zagonetka se objašnjava činjenicom da je jedan kraj trake prije lijepljenja na drugi kraj bio jednom zavrnut.

Lako je eksperimentalno vidjeti da to stvara petlju, a puzeći po njoj, muha može kružiti s obje strane bez da ikada pređe preko rubova.



19. Deset različitih zadataka

19.1. Tko ima najviše?

Dvoje ljudi je sat vremena brojalo sve ljude koji su prolazili pored njih na pločniku. Jedan od brojača stajao je na vratima kuće, dok je drugi hodao naprijed-natrag po pločniku.

Tko je prebrojao najviše?

19.2. Godine mog sina

Moj sin je sada tri puta mlađi od mene.

Ali prije pet godina bio je četiri puta mlađi od mene.

Koliko sin ima godina?

19.3. Natjecanje

Dvije jedrilice natječu se tko će preploviti 24 milje do mjesta A i natrag u najkraćem vremenu.

Prvi je brod plovio cijelu udaljenost ujednačenom brzinom od 20 milja na sat; drugi je brod plovio tamo brzinom od 16 milja na sat, a natrag brzinom od 24 milje na sat.

Prvi je brod pobijedio u utrci, iako se činilo da je drugi brod trebao zaostajati za prvim brodom na putu prema tamo točno isto koliko je vodio na povratku, te je stoga stigao u isto vrijeme kao i prvi.

Pa zašto je kasnio?

19.4. Na rijeci i jezeru

Veslač veslajući niz rijeku prelazi udaljenost od 5 milja za 10 minuta.

Vračajući se, vesla istu udaljenost za sat vremena.

Stoga, pod zadanim uvjetima, vesla 10 milja za 1 sat i 10 minuta.

Koliko bi mu vremena trebalo da vesla 10 milja u mirnoj vodi jezera?

19.5. Od Enska do Iksograda

Ploveći uz struju, parobrod putuje brzinom od 32 kilometra na sat; ploveći protiv struje, samo 24 kilometra na sat.

Putovanje od mola Ensk do mola Iksograd traje pet sati manje nego povratno putovanje.

Koliko je udaljen Ensk od Iksograda?

19.6. Meko kuhana i tvrdo kuhana

Domaćica je skuhalo pet jaja: dva tvrdo kuhana i tri meko kuhana pri čemu je zaboravila značiti koja su jaja tvrdo kuhana, a koja meko kuhana, te ih je poslužila na istom tanjuru.

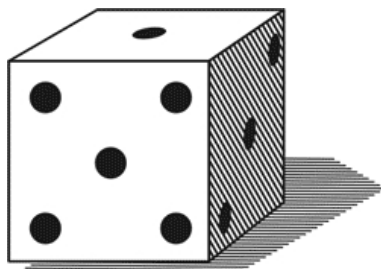
Nasumično birate dva jaja s tanjura.

Bi li se isplatilo kladiti se u jednu rublju protiv pet da ćete dobiti oba tvrdo kuhana jaja?

19.7. Kocke

Dana je kocka čije strane su označene brojevima/točkama $1, 2, \dots, 6$.

Petar se kladi da će, ako baci kocku četiri puta zaredom, kocka pasti na 1 pri sva četiri bacanja.



Vladimir se, međutim, kladi protiv njega: tvrdi da se broj 1/točka ili uopće ne će pojaviti u sva četiri bacanja ili će se pojaviti više puta.

Tko ima veće šanse za pobjedu?

19.8. Sedam prijatelja

Jedan građanin imao je sedam prijatelja.

Prvi ga je posjećivao svake večeri, drugi svake druge večeri, treći svake treće večeri, četvrti svake četvrte večeri i tako dalje, sve do sedmog prijatelja, koji se pojavljivao svake sedme večeri.

Koliko se često događalo da se svih sedam prijatelja okupi u kući domaćina iste večeri?

19.9. Nastavak prethodnog

U večerima kada bi se okupilo sedam prijatelja, domaćin bi ih počastio vinom, a oni bi se u parovima kucnuli čašama.

Koliko su se puta čaše kucnule u takvim večerima?

19.10. Osnivanje Kartage

Postoji sljedeća legenda o osnivanju drevnog grada Kartage.

Didona, kći tirkog kralja, izgubivši muža, kojeg je ubila ruka njezina brata, pobjegla je u Afriku i iskrcala se s mnogim stanovnicima Tira na njezinoj sjevernoj obali.

Tamo je od numidskog kralja kupila onoliko zemlje koliko bi "volovska koža zauzela".

Nakon što je posao sklopljen, Didona je volovsku kožu izrezala na tanke trake i, zahvaljujući tom triku, ogradila komad zemlje dovoljan za izgradnju tvrđave.

Tako je, navodno, nastala tvrđava Kartaga, oko koje je kasnije izgrađen grad.

Pokušajte izračunati, prema ovoj legendi, površinu koju zauzima tvrđava, pretpostavljajući da volovska koža ima površinu od 4 četvorna metra, a širina traka na koje ju je Didona izrezala uzeta je kao jedan milimetar.

19.11. Rješenja zadataka od 19.1. - 19.10.

Rješenje problema br. 19.1. Oba su izbrojala isti broj prolaznika.

Doista, iako je onaj koji je stajao na vratima izbrojio ljude koji su prolazili u oba smjera, onaj koji je hodao prošao je pokraj dvostruko više ljudi.

Rješenje problema br. 19.2. Ako je sin sada tri puta mlađi od svog oca, tada je otac stariji za dva puta više od svoje dobi.

Prije pet godina, otac je, naravno, također bio stariji od svog sina za dvostruko više nego što je sin sada star.

S druge strane, budući da je otac tada bio četiri puta stariji od svog sina, tada je bio stariji za tri puta više od svoje tadašnje dobi.

Stoga je dvostruka sinova sadašnja dob jednaka trostrukoj njegovoj prijašnjoj dobi, ili - ekvivalentno - sin je sada $1\frac{1}{2}$ puta stariji nego što je bio prije pet godina.

Iz ovoga je lako vidjeti da je pet godina polovica sinove prijašnje dobi; stoga je prije pet godina sin imao 10 godina, a sada ima 15.

Dakle, sin sada ima 15 godina, a otac 45.

Doista: prije pet godina otac je imao 40 godina, a sin je imao 10, tj. četiri puta više od svoje dobi.

Rješenje problema br. 19.3. Drugi je brod zakasnio jer je vrijeme koje je uštedio na povratku bilo manje od vremena koje je izgubio na putu prema tamo.

Doista, brzinom od 24 milje na sat putovao je $24/24 = 1$ sat, a brzinom od 16 milje na sat, $24/16 = 1,5$ sati. Stoga je na putu tamo izgubio više vremena nego što je dobio na povratku.

Rješenje problema br. 19.4. Veslač se kreće nizvodno brzinom od pola milje u minuti, a uzvodno brzinom od $1/12$ milje u minuti.

Brzina nizvodno jednaka je brzini veslača u mirnoj vodi uvećanoj za brzinu struje, a brzina uzvodno jednaka je brzini veslača umanjenoj za brzinu struje.

Stoga je $1/2 + 1/12$, tj. $7/12$ milje u minuti, podijeljeno s 2 ($7/24$ milje u minuti), prava brzina veslača.

Stoga će veslač u mirnoj vodi prijeći 10 milja za $10 : 7/24 = 34\frac{2}{7}$ minuta.

Uobičajeni odgovor - da će veslač u jezeru prijeći 10 milja za isto vrijeme kao i u rijeci, budući da se gubitak brzine navodno poništava dobitkom - potpuno je netočan (vidi prethodni problem).

Rješenje problema br. 19.5. Ploveći uz struju, parobrod prijeđe 1 verstu¹ za 3 minute; ploveći protiv struje, 1 verstu za 4 minute.

Za svaku verstu, u prvom slučaju, parobrod dobiva 1 minutu.

A budući da na cijeloj udaljenosti dobiva 5 sati, odnosno 300 minuta, slijedi da je udaljenost od Enska do Iksograda 300 versti.

Doista: $300/15 - 300/20 = 20 - 15 = 5$.

Rješenje problema br. 19.6. Ako, radi lakšeg zapisivanja, prenumeriramo jaja, tada imamo

Tvrdo kuhana Br.1 k1

Tvrdo kuhana Br.2 k2

Meko kuhana Br.1 c1

Meko kuhana Br.2 c2

Meko kuhana Br.3 c3

Od ovih pet jaja može se odabrati sljedećih deset parova:

k1 k2

k1 c1

k1 c2

k1 c3

k2 c1

k2 c2

k2 c3

c1 c2

c1 c3

c2 c3

Vidimo da se samo jedan par - prvi - sastoji od tvrdo kuhanih jaja; ostalih 9 ne daje potrebnu kombinaciju.

To znači da imate samo 1 od 10 mogućnosti dobiti par tvrdo kuhanih jaja; u ostalih 9 od 10 slučajeva gubite.

A ako uložite 1 rublju, onda vaš partner pobjeđuje u 9 od 10 slučajeva, pa bi za ravno-pravnu okladu trebao uložiti 9 rubalja.

Rješenje problema br. 19.7. Nakon četiri bacanja, broj svih mogućih položaja kockice je $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$.

Pretpostavimo da je prvo bacanje već izvršeno, i da je bačen jedan bod.

Zatim, u sljedeća tri bacanja, broj svih mogućih pozicija povoljnih za Petra (tj. bilo koji broj bodova osim jednog boda) je $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Slično tome, postoji 125 mogućih položaja povoljnih za Petra ako se jedan bod baci samo na drugom, trećem ili četvrtom bacanju.

Dakle, postoji $125 + 125 + 125 + 125 = 500$ različitih mogućnosti da se jedan bod pojavi jednom i samo jednom u četiri bacanja.

¹ Versta je zastarjela ruska jedinica za duljinu. Versta je jednaka 1,0668 kilometara (3500 stopa).

Broj nepovoljnih mogućnosti je $1296 - 500 = 796$ (budući da su svi ostali slučajevi nepovoljni).

Vidimo da Vladimir ima veće šanse za pobjedu (796 prema 500) od Petra.

Rješenje problema br. 19.8. Lako je vidjeti da se svih sedam prijatelja može sastati samo onoga dana čiji je redni broj djeljiv s 2, 3, 4, 5, 6 i 7.

Najmanji od tih brojeva je 420.

Stoga su se svi prijatelji sastali samo jednom svakih 420 dana.

Rješenje problema br. 19.9. Svaki od osam gostiju (domaćin i sedam prijatelja) kucne čašama s ostalih sedam; stoga je ukupan broj parova od po dvije čaše $8 \cdot 7 = 56$.

Međutim, svaki par je brojan dva puta (primjerice, treći gost s petim i peti s trećim računali su se kao različiti parovi).

Stoga su čaše kucnuli $56/2 = 28$ puta.

Rješenje problema br. 19.10.

Ako je površina volovske kože 4 četvorna metra, odnosno 4 000 000 četvornih milimetara, a širina remena 1 milimetar, tada je ukupna duljina izrezanog remena (vjerojatno ga je Didona izrezala iz kože u spiralu) 4 000 000 milimetara, odnosno 4 000 metara ili 4 kilometra.

Takav remen može obuhvatiti kvadratnu površinu od 1 četvornog kilometra

20. Optičke iluzije

20.1. Dva luka

Ovaj crtež prikazuje dva luka, svaki s kratkim crticama.

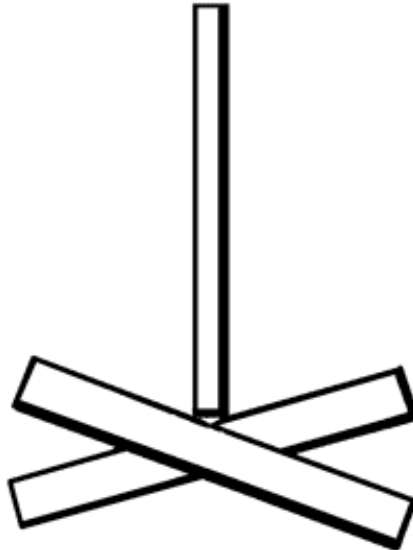
Koji je luk zakrivljeniji: gornji ili donji?



Koji je dulji?

20.2. Tri trake

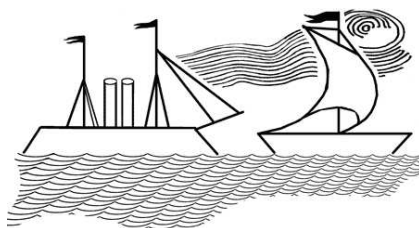
Koja je od tri papirnate trake prikazane na slici najduža?



20.3. Dva broda

Na slici su dva broda: parobrod i jedrenjak.

Koji ima dulju palubu?



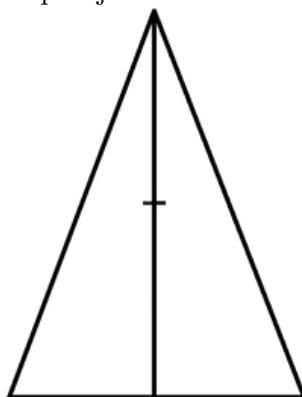
Jesu li palube jednake?

20.4. Gdje je polovište?

Učenika su pitali gdje se nalazi polovište visine ovdje nacrtanog trokuta.

Učenik je pokazao na točku označenu crticom na slici. Po njegovu mišljenju, to je polovište visine.

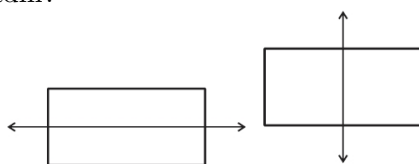
Ispravi to okom, a zatim to i sam provjeri s komadom papira.



20.5. Dva pravokutnika

Učenik je nacrtao dva pravokutnika i precrtao ih pravcima. Tvrdio je da su ti pravokutnici sukladni.

Zašto je mislio da su sukladni?



20.6. Šešir stranca

Učenik je nacrtao dva pravokutnika i precrtao ih pravcem kao na slici.



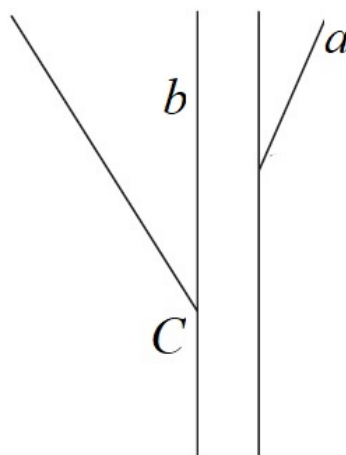
Učenik tvrdi da su pravokutnici sukladni.

Što nije u redu?

20.7. Produljite pravac

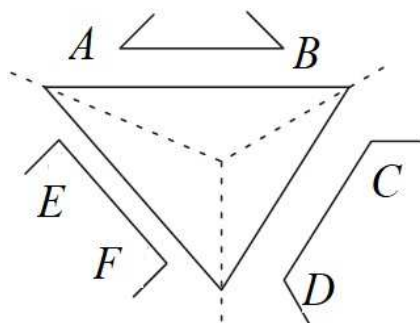
Ako produljite pravac a na slici, gdje će presjeći: iznad točke C ili ispod?

Ako produljite pravac a na slici u kojoj točki će presjeći pravac b ? U točki C ili iznad ili ispod točke C ?



20.8. Koja je dužina najdulja?

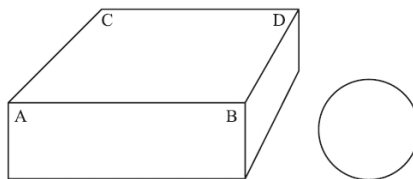
Koja je od dužina $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i $\overline{EF}$ najdulja?



Usporedite dužine $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i $\overline{EF}$

20.9. Hoće li stati?

Hoće li prikazani krug stati između AB i CD (v. sl.)?

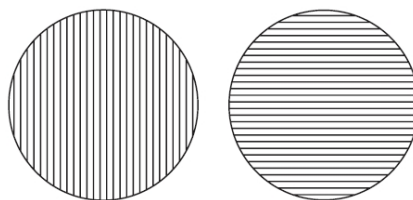


20.10. Dva kruga

Na slici vidite dva zasjenjena kruga, koji se čine sukladni.

Ali nakon što izoštrite oko s prethodnim vježbama, sigurno se ne ćete dati prevariti.

Stoga ne ćete imati problema s odgovorom na pitanje: Koji je krug veći?



20.11. Rješenja zadataka od 20.1. - 20.10.

Rješenje problema br. 20.1. Oba luka su ista.

Rješenje problema br. 20.2. Sve trake su iste duljine.

Rješenje problema br. 20.3. Palube oba broda prikazane su jednake duljine.

Rješenje problema br. 20.4. Polovište je ispravno naznačeno.

Rješenje problema br. 20.5. Jer su stvarno jednaki.

Rješenje problema br. 20.6. Nema grješke: šešir je opisan kvadratom.

Rješenje problema br. 20.7. Pravac a siječe pravac b u točki C .

Rješenje problema br. 20.8. Sve tri dužine su iste duljine.

Rješenje problema br. 20.9. Krug ne će stati.

Rješenje problema br. 20.10. (Problem sa zamkama). Krugovi su podudarni.

Bilješka o autoru



Jakov Isidorovič Perelman (1882.-1942.) bio je poznati ruski i sovjetski pisac, matematičar, fizičar i astronom koji je proslavio popularnu znanost. Rođen je u Bialystoku - Carska Rusija, a danas je to u Poljskoj. Umro je u opkoljenom Lenjingradu. Nikada nije bio znanstvenik u pravom smislu te riječi.

Nije napravio nikakva znanstvena otkrića, nije imao titule ni matematičke diplome. Međutim, cijeli je svoj život posvetio znanosti.

Nikada se nije smatrao piscem. Ali njegove su knjige objavljivane u tako ogromnim nakladama da bi im čak i najuspješniji pisac zavidio. Paradoks nesumnjivo!

A da bismo ga razumjeli, moramo početi ispočetka.

* * * * *

U bivšem provincijskom gradu Bialystoku, u kasnu jesen ili ranu zimu - još jedan paradoks! - 1882. godine, u obitelji skromnog računovođe u tvornici tkanina rođen je drugi sin, Jakov. Obitelj je unajmila mali stan i, s očevom bijednom plaćom, jedva je spajala kraj s krajem. Ubrzo je otac umro, a cijeli teret uzdržavanja i odgoja sinova pao je na majčina ramena.

Sitna, krhka učiteljica u osnovnoj školi obavila je taj zadatak s uistinu herojskom vještinom. Samo zahvaljujući njezinom trudu i brizi, prvo najstariji sin, Osip, a zatim i Jakov, uspješno su diplomirali na Realnoj školi u Bialystoku, a kasnije i na Šumarskom institutu u Sankt Peterburgu.

Ali nisu postali šumari. Osip, odabравši pseudonim "O. Dymov", stekao je znatnu slavu kao modni pisac i duhoviti kolumnist. Jakov, čuvajući obiteljsko prezime netaknutim, na kraju je postao briljantan popularizator znanosti.

Njegov prvi izlet u ovo plemenito područje dogodio se 1899. godine, kada Jakov Isidorovič još nije imao sedamnaest godina. Njegov esej "O očekivanoj vatrenoj kiši" objavljen je u novinama Grodno Gubernskie Vedomosti. U njemu se mladi i nepoznati autor usudio upustiti u žustru raspravu s izvjesnim majstorom koji je tvrdio da će "doći kraj svijeta" u studenom 1899. Perelmanov članak zauzimao je tri velika stupca i ostavio je snažan dojam. Štoviše, dobro odabrani format neformalnog razgovora uspješno je kombiniran s preciznim izračunima, živopisnim usporedbama i povijesnim digresijama.

Tako je prvi put isprobao stil koji će kasnije postati potpis Jakova I. Perelmana.

Već kao student Šumarskog instituta, Jakov je počeo pridonositi časopisu "Priroda i ljudi". Tamo je radio gotovo sedamnaest godina. Tijekom tog vremena, više od petsto njegovih eseja, članaka i bilješki objavljeno je na stranicama časopisa. Velik dio onoga što je objavljeno u časopisu kasnije se našao u njegovoj prvoj knjizi "Zabavna fizika". Objavljena je 1913. Ni autor ni izdavač nisu mogli zamisliti da će knjiga imati tako zapanjujući uspjeh.

U međuvremenu, živopisni kaleidoskop originalnih paradoksa, raznolikih činjenica i nezaboravnih primjera koje je Perelman stvorio na svojim stranicama doslovno je očarao čitatelje.

Znanstvenici i edukatori, a da ne spominjemo obične čitatelje, natjecali su se u hvaljenju "Zabavne fizike" i zahtijevali su nove knjige. Pojavili su se: "Zabavna geometrija", "Zabavna aritmetika", "Zabavna algebra", "Zabavna astronomija", "Zabavna mehanika", kao i "Trikovi i zabava", "Fizika na svakom koraku", "Zagonetke i zanimljivosti u svijetu brojeva" i tako dalje - ukupno više od stotinu naslova. Ukratko, cijela popularno-znanstvena knjižnica.

I ovo je još jedan paradoks: s tako ogromnim pothvatom - a rad potreban za stvaranje knjiga nesumnjivo je bio titanski - Perelman je uspio učiniti milijun drugih stvari.

Predavao je, stvarao nove nastavne planove i programe, uređivao časopise, sudjelovao u znanstvenim društvima i stalno držao predavanja. Perelman je također imao mnogo drugih fascinantnih pothvata iza sebe. Primjerice, dok je radio na petrogradskoj "Konferenciji o posebnim gorivima" 1916.-1917., bio je prvi u Rusiji koji je predložio pomicanje kazaljki sata za sat vremena unaprijed kako bi se uštedjelo gorivo, što je odmah provedeno.

Početkom 1930-ih, Perelman je razvio dizajn prve sovjetske rakete protiv tuče. A sredinom 1930-ih, osmislio je i, zajedno s istomišljenicima, stvorio izvanredan muzej - "Kuću zabavne znanosti". Opće je poznato da je svaka izložba koja drži do sebe prepuna znakova upozorenja: "Držite ruke dalje!", "Ne približavajte se ogradi!" Ovdje je, međutim, bilo suprotno - mogli ste dodirivati stvari, okretati ih ovako i onako, čak i pokušati ih slomiti ako je moguće; ukratko, bili ste temeljito angažirani s eksponatima, od kojih je većina došla iz Perelmanovih knjiga o matematici, fizici i astronomiji.

Muzej je sadržavao neke uistinu jedinstvene predmete, a i neke sasvim obične. Ali čak su i oni zadivljivali posjetitelje svojim mogućnostima. Primjerice, jednostavne trgovačke vage mogle su lako pogoditi bilo koji broj ili ime koje biste mogli smisliti.

Čak je i bife u Kući zabavne znanosti bio opremljen raznim neobičnostima. Uz obične čaše, tanjuriće i žličice, bilo je i "perelmaniziranog" posuđa. Iz boce koja je stajala u usitnjenom ledu točio se kipući čaj, a žličica se topila brže od šećera koji je miješala. Tek kasnije zapanjenim posjetiteljima objašnjeno je da je boca Dewarova tikvica (najnaprednija termosica), a žlica je izrađena od Woodove legure koja se topi na 68 stupnjeva Celzija.

Muzejska zbirka stalno je rasla. Organizatori su se pripremali za otvaranje novih dvorana. Ali njihovi planovi su propali - započeo je Drugi svjetski rat. Muzej je stradao tijekom opsade. Njegov osnivač, nažalost, podijelio je sudbinu svoje zamisli.

Jedan od kratera na Mjeseu nazvan je po Jakovu Perelmanu.

Čovjeku koji nikada nije bio znanstvenik i nikada se nije smatrao piscem.